ANALISI
VETTORIALE
GENERALE
II

P. BURGATTI
T. BOGGIO
C. BURALI-FORTI

GEOMETRIA
DIFFERENZIALE

ANALISI VETTORIALE GENERALE VOL. II

P. BURGATTI - T. BOGGIO - C. BURALI-FORTI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

ANALISI
VETTORIALE
GENERALE
II

P. BURGATTI
T. BOGGIO
C. BURALI-FORTI

GEOMETRIA
DIFFERENZIALE

ANALISI VETTORIALE

P. BURGATTI - T. BOGGIO - C. B

GEOMETRIA DIFFE

ANALISI VETTORIALE GENERALE E APPLICAZIONI

Volume I. - *Trasformazioni lineari* a cura di C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO.

Volume II. - *Fondamenti di Geometria differenziale* (linee. superficie, spazi curvi, geometria proiettiva differenziale) a cura di P. BURGATTI, T. BOGGIO e C. BURALI-FORTI.

Volume III. - *Teoria matematica della elasticità* a cura di P. BURGATTI.

Volume IV. - *Idrodinamica* a cura di T. BOGGIO.

Volume V. - *Elettricità e magnetismo* a cura di R. MARCOLONGO.

ANALISI
VETTORIALE GENERALE
E APPLICAZIONI

VOLUME SECONDO

P. BURGATTI - T. BOGGIO - C. BURALI-FORTI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXX

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi III-1930

PREFAZIONE

Questo secondo volume della **Analisi vettoriale generale** *contiene le applicazioni geometriche del calcolo vettoriale ed omografico, e precisamente quella parte che è detta* **geometria differenziale metrica e proiettiva delle superficie e delle varietà spaziali.** *Per altro è limitata alla esposizione delle cose fondamentali; vuol essere insomma una introduzione allo studio di questa vasta materia. Per ciò molte questioni, anche importanti, ma che si collegano principalmente alla teoria delle funzioni e delle equazioni differenziali, sono state tralasciate di proposito.*

Oggidì seguendo il BIANCHI (1), *geniale prosecutore dell'opera di* GAUSS, *di* LAMÉ, *di* BELTRAMI *e di* RIEMANN, *la teoria delle superficie e degli spazi curvi è fondata sullo studio delle forme differenziali quadratiche e sull'ingegnoso calcolo assoluto di* RICCI *e* LEVI-CIVITA *che a quello si connette. Ne è nato un algoritmo pesante e complicato, che conduce, con calcoli lunghi e per vie artificiose, a formule poco espressive, ed i tediosi sviluppi sono spesso intricati da problemi fittizi non inerenti alle questioni geometriche in esame.*

Tutto ciò è conseguenza dell'uso sistematico delle coordinate; uso che, nato dai primi grandi successi del metodo cartesiano, s' impose poi in tutti i rami della geometria e della

---

(1) I libri più classici in questa materia sono i ben noti trattati di L. BIANCHI: *Lezioni di geometria differenziale.* e di G. DARBOUX: *Théorie des surfaces.*

fisica teoretica, perchè non s' intravvedeva allora la possibilità di avere un calcolo che operasse direttamente sugli enti geometrici e fisici. Ma oggi un vero calcolo assoluto esiste, e si trova esposto nel primo volume di questa collezione e nella parte III di questo volume. La sua applicazione alle varie teorie si può ora fare nella maniera più semplice e completa.

E questo diventa molto importante oggidì, in cui la fisica si va, come suol dirsi, **geometrizzando**; *giacchè le più elevate dottrine geometriche sono entrate a far parte del bagaglio culturale di molti studiosi che non fanno professione di puri geometri, ai quali è necessario uno strumento matematico agile, semplice e generale ad un tempo, atto alla sintesi come alla analisi, che permetta loro economia di tempo e di pensiero.*

Il diligente lettore che vorrà vincere le prime difficoltà, del resto non gravi, inerenti all' uso di nuovi algoritmi, si persuaderà dei grandi vantaggi che presenta il metodo vettoriale generale. Questo almeno speriamo, conformemente al fine che ci siamo proposti scrivendo questo libro.

Ed ora diremo brevemente delle singole parti.

La Parte Prima, redatta dal prof. Burgatti, *contiene i fondamenti dell' ordinaria geometria differenziale delle curve e delle superficie. L' introduzione dello spostamento* $\mathrm{d}P$ *sulla superficie e della omografia* $\sigma = \mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}P$, *essendo* $\mathbf{n}$ *vettore unitario normale in* P, *rende lo studio delle proprietà delle superficie e la risoluzione dei problemi fondamentali assai più semplice e agile e spesso più intuitiva che non sia con l' uso delle classiche forme differenziali quadratiche* (1). *In modo analogo sono studiate le congruenze di curve.*

Il passaggio alle coordinate curvilinee, quando occorra farlo per la risoluzione di particolari problemi, riesce quasi sempre immediato, e ciò è mostrato fin dai primi capitoli,

---

(1) Burali-Forti: *Fondamenti....* « Rend. Civ. Mat. », Palermo, t. 33 1911. In questa memoria fu appunto introdotta e studiata l'omografia σ.

onde rendere più agevole la lettura a coloro che sono abituati all'uso delle coordinate [1].

La Parte Seconda, redatta dal prof. Boggio, *tratta degli spazi curvi, ed è sviluppata secondo concetti che furono già esposti nel 1919 dall'A. in alcune* Note dei Rendiconti delle R. Accademie dei Lincei e di Torino, *e in seguito più ampiamente nell'opera del 1924:* **Espaces-courbes; Critique de la relativité,** *in collaborazione col prof.* Burali-Forti. *In cotesta trattazione però interviene, alcune volte, in modo essenziale, la rappresentazione dello spazio curvo sopra uno spazio euclideo di un egual numero di dimensioni. Qui, invece, la considerazione dello spazio euclideo, che non è in sostanza direttamente inerente alle questioni riguardanti lo spazio curvo, è stata del tutto eliminata. E questo è stato possibile ricorrendo al concetto di differenziale superficiale sul dato spazio, le cui proprietà sono pressochè identiche a quelle dell'ordinario differenziale negli spazi euclidei. Tale possibilità fu già dimostrata dall'A. in alcune* Note *inserite nei* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei *in questi due ultimi anni.*

Come introduzione a questa parte si è ritenuto opportuno esporre sommariamente varie formule di calcolo vettoriale per gli spazi S_n *euclidei, senza per altro insistere su quelle dimostrazioni che sono identiche a quelle nello spazio ordinario.*

Nell'ultimo capitolo, oltre a varie applicazioni, è stabilita l'espressione vettoriale dei simboli di Ricci, *di* Christoffel *e di* Riemann, *delle derivate covarianti e contravarianti delle componenti d'un vettore o d'una omografia, che formano la base dei metodi usuali di studio degli spazi curvi, allo scopo sia di mettere in relazione le formule assolute con le loro equivalenti in coordinate, e sia per rendere più evidente la inutilità di coteste derivate.*

---

[1] Trattati di geometria differenziale in cui già trovasi largo impiego dei metodi vettoriali sono:

F. Sibirani: *Geometria differenziale,* Manuale Hoepli, 1924.

C. E. Weatherburn: *Diff. Geometry of three Dimensions.* Cambridge, 1927.

Esse non sono altro che componenti covarianti e contravarianti della derivata superficiale d' un vettore o d' una omografia, e perciò la considerazione diretta di quest' ultima rende manifestamente i calcoli assai più semplici e i risultati ben più espressivi.

La Parte Terza, redatta dal prof. BURALI-FORTI, *contiene, sotto forma assoluta, i fondamenti della geometria proiettivo-differenziale, che è stata molto sviluppata analiticamente in questi ultimi anni, come può vedersi nell'opera di* FUBINI *e* CĔCH: **Geometria proiettiva differenziale,** *Zanichelli, 1926. Qui occorre l'uso delle formazioni geometriche di* G. PEANO, *le* **F**, *poichè i vettori e le omografie vettoriali non bastano* (1). *La parte fondamentale della teoria delle* **F** *si trova negli* **Elementi di calcolo vettoriale** *e in altri libri qui sotto indicati* (2).

Nel Cap. I si sono dovute dare le nozioni fondamentali per i sistemi lineari di **F** *ad n dimensioni* ($n = 1, 2, 3, 4$) *e delle trasformazioni lineari, o omografie, il cui studio, interessante e semplice, può essere utilmente continuato con i metodi assoluti* (3).

---

(1) G. PEANO: *Calcolo geometrico* (Bocca, Torino, 1888). PEANO ha dato un calcolo geometrico sull' S_3 puramente *assoluto*, cioè del tutto indipendente da coordinate, ma atto a darle e di qualunque specie. Può dirsi derivato dall' *Ausdehnunglehre* di H. GRASSMANN; ma bisogna notare che il calcolo di GRASSMANN (qui par miracle s'applique à la géometrie; CARVALLO) è un calcolo di determinanti e matrici per sistemi ad n dimensioni, e *non è un calcolo assoluto.* Oggi, per fare del nuovo, si ritorna, con nessuna opportunità, a calcoli con determinanti e matrici.

(2) BURALI-FORTI: *Introduction à la géométrie différentielle* (Paris, G. Villars, 1897); *Lezioni di geometria metrico-proiettiva* (Bocca, Torino, 1904); *Geometria analitico-proiettiva* (Petrini, Torino, 2ª ed.).

Per lo spazio ad n dimensioni vedi A. PENSA: *Geometria assoluta dei vettori*, Istituto Lombardo, 1919; *Geometria assoluta delle formazioni geometriche*, Istituto Lombardo, 1920.

(3) È strano che proprio ai geometri debba ripugnare l' uso di questi metodi. G. L. (« Boll. di Matematica », a. 1928, p. LVII) chiama: « *fanatici ciechi* » coloro che sistematicamente si servono di enti assoluti e, pure sistematicamente, non fanno uso di coordinate. Ergo « *fanatici ciechi* », anche coloro che fanno uso *soltanto* di coordinate; con questa differenza:

In altri due capitoli è stato sviluppato brevemente tutto ciò che è fondamentale per le proprietà proiettivo-differenziali delle linee, superficie, inviluppi e quadriche osculatrici. Piccola parte invero, ma sufficiente per continuarne lo studio in maniera veramente geometrica.

Siamo grati alla benemerita Casa Editrice N. Zanichelli d'aver curata la pubblicazione di questo secondo volume con la consueta diligenza.

P. BURGATTI
(R. Università Bologna)
T. BOGGIO
(R. Università - Torino)
C. BURALI-FORTI
(Regia Accademia Militare - Torino)

---

quelli, oltre agli *enti geometrici assoluti*, hanno a disposizione anche le coordinate di qualunque specie, che possono ottenere in modo geometrico e rapido; questi devono contentarsi delle coordinate, facendo sparire la geometria. Quanto è detto da G. L. (*l. c.*, p. LVIII) a proposito del metodo di GRASSMANN va confrontato con la prima di queste note.

PARTE I

GEOMETRIA DIFFERENZIALE DELLE CURVE E DELLE SUPERFICIE

A CURA DEL PROF. P. BURGATTI

Capitolo I.

Teoria delle curve gobbe.

1. Generalità; terna principale; piano osculatore.

Una curva (L) nello spazio ordinario è qui considerata come un luogo di punti P, tale che ad ogni punto P corrisponde un sol valore d'un parametro s, e viceversa. Allora $P = P(s)$ rappresenterà *l'equazione parametrica* della curva.

Come si sa, la derivata di P rapporto a s (si ammette l'esistenza delle successive derivate per ogni valore di s compreso in un certo intervallo) è un vettore parallelo alla tangente in P alla curva. Porremo

$$\frac{dP}{ds} = P'(s) = \boldsymbol{t}(s). \tag{1}$$

Se s misura l'arco della curva compreso fra un suo punto fisso O e il punto generico P, questo vettore è *unitario* ed ha il senso di s crescente. Viceversa: se $\boldsymbol{t}(s)$ è unitario, s misura l'arco OP (per $P = O$ è $s = 0$). Noi qui supporremo che s misuri l'arco.

Il piano in P perpendicolare a $\boldsymbol{t}$ dicesi il *piano normale*. Tutte le sue rette uscenti da P sono normali a $\boldsymbol{t}$. Due fra queste sono di particolare importanza. Da $\boldsymbol{t}^2 = 1$ si trae $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{t} = 0$; perciò il vettore $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ è *normale* a $\boldsymbol{t}$. Indicando col vettore unitario $\boldsymbol{n}$ la sua direzione e verso, la retta uscente da P parallela a $\boldsymbol{n}$ è una delle direzioni in discorso. Chiamasi la *normale principale*. L'altra normale da considerarsi è quella perpendicolare a $\boldsymbol{t}$ e a $\boldsymbol{n}$, precisamente definita dal vettore unitario $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$. Chiamasi *la binormale*.

La terna (t, n, b) è detta *la terna o il triedro principale* in P. Varia di orientazione da punto a punto, ossia al variare di s. Indichiamo con $1:\rho$ il modulo di $\frac{dt}{ds}$ (quantità positiva), avremo allora

$$\frac{dt}{ds} = \frac{n}{\rho}. \tag{2}$$

Vedremo presto il significato geometrico di ρ. Intanto il piano (π) per P che contiene la tangente e la normale principale gode di una proprietà caratteristica, in base alla quale vien detto *piano osculatore*.

Sia P_1 un altro punto di (L) vicinissimo a P; sia cioè

$$P_1 = P(s+h) = P(s) + P'(s)h + P''(s)\frac{h^2}{2} + \dots,$$

ove h si ritiene infinitesimo del primo ordine. Calcoliamo la distanza l di P_1 dal piano (π). Essa è data manifestamente dalla proiezione di $P_1 - P$ sulla normale b a questo piano (che è la binormale); onde si ha

$$l = (P_1 - P) \times b = \left[P'(s)h + P''(s)\frac{h^2}{2} + \frac{P'''(s)h^3}{3!} + \dots \right] \times b.$$

Ma

$$P'(s) \times b = t \times b = 0, \quad P''(s) \times b = \frac{dt}{ds} \times b = \frac{n}{\rho} \times b = 0,$$

quindi resta

$$l = P'''(s) \times b \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots. \tag{3}$$

Dunque cotesta distanza è per lo meno infinitesima del 3° ordine, e questo non accade se si proietta $P_1 - P$ sopra una direzione diversa da b; perciò è proprietà caratteristica del piano (π). Si vede poi che il segno di l cambia con quello di h, ove non sia $P''' \times b = 0$; il che prova che *la curva attraversa in P il piano osculatore*.

Siccome presi due punti P_1 e P_2 vicinissimi a P, per esempio, uno da una parte l'altro dall'altra, la loro distanza dal piano (π) è per lo meno infinitesima del 3° ordine; e dato che un piano è definito da tre punti non allineati; si suol dire con linguaggio geometrico che *il piano osculatore in P è quello che passa per P e per due punti di (L) infinitamente vicini a P; od anche che contiene due tangenti, oppure due normali principali infinitamente vicine.*

Ne consegue che la circonferenza individuata da quei tre punti infinitamente vicini sta nel piano osculatore; onde ha in comune con la curva le due normali vicinissime, che s'incontreranno perciò nel centro C della circonferenza, la quale è chiamata *cerchio osculatore.*

Si noti, dopo ciò che si è detto, che il piano osculatore è il luogo dei punti Q soddisfacenti all'equazione

$$(4) \qquad (P-Q)\times \boldsymbol{b}=0 \quad \text{ossia} \quad (P-Q)\times \boldsymbol{t}\wedge \boldsymbol{n}=0\,.$$

2. Curvature.

Tiriamo ora da un punto fisso A i vettori $M-A=\boldsymbol{t}(s)$, immaginando di dare ad s tutti i valori che gli competono. Il luogo dei punti M sarà una curva sferica (sfera di raggio uno); ad ogni punto $P(s)$ corrisponde un punto $M(s_1)$. Si ricava, derivando e tenendo conto della (2),

$$\frac{dM}{ds_1}\cdot\frac{ds_1}{ds}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{\rho},$$

la quale mostra che $\dfrac{dM}{ds_1}=\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{n}$ sono paralleli, e $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{ds_1}{ds}$. Ma ds_1 misura manifestamente l'angolo $d\theta$ di due tangenti infinitamente vicine, e perciò anche delle corrispondenti normali principali; onde si deduce $ds=\rho d\theta$. Dunque ρ è il raggio del cerchio considerato di sopra, ossia del cerchio osculatore e chiamasi il *raggio di curvatura o di flessione*; $1:\rho$ misura la *prima curvatura* o la *flessione* in P, e il centro del cerchio è il *centro di curvatura.*

Vediamo ora come varia $\boldsymbol{b}$ al variare di s. Calcoliamo la derivata di $\boldsymbol{b}$; da $\boldsymbol{b}^2=1$ e $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}=0$, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{b}=0,\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}+\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\times\boldsymbol{b}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}=0\,;$$

perciò $\frac{db}{ds}$ è parallelo ad n; onde si può scrivere

(4) $$\frac{db}{ds} = \frac{1}{\tau} n.$$

Per vedere il significato di τ, tiriamo dal punto fisso A i vettori $M - A = b(s)$, come già precedentemente pei vettori t. Con lo stesso ragionamento si deduce:

$$\frac{dM}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \frac{n}{\tau},$$

da cui risulta $\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\tau}$. Qui ds_1 misura l'angolo $d\theta$ di due binormali (o di due piani osculatori) infinitamente vicine; epperò la precedente relazione $ds = \tau d\theta$ giustifica la denominazione di *raggio di torsione* (o di seconda curvatura) data a τ, di *torsione* (o seconda curvatura) data a $1:\tau$. Misura, come dice il BIANCHI, la rapidità dello scostarsi della curva dalla giacitura piana. Riguardo al suo segno vedremo più innanzi. Quando $1:\tau$ è nulla lungo un tratto della curva, quel tratto giace in un piano.

3. Formule di Frenet; equazioni intrinseche.

Resta ora a vedere il modo di variare di $n(s)$. Essendo $n = b \wedge t$, si trae

$$\frac{dn}{ds} = \frac{db}{ds} \wedge t + b \wedge \frac{dt}{ds} = \frac{n \wedge t}{\tau} + \frac{b \wedge n}{\rho}$$

ossia

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{b}{\tau} - \frac{t}{\rho}.$$

Unendo questa alle precedenti (2) e (4), abbiamo le formule che dànno le derivate delle tre direzioni principali, dette le *formule di Frenet*:

(I) $$\frac{dt}{ds} = \frac{n}{\rho}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{t}{\rho} - \frac{b}{\tau}, \quad \frac{db}{ds} = \frac{n}{\tau}.$$

Ponendo

$$u = -\frac{t}{\tau} + \frac{b}{\rho},$$

si possono scrivere nella forma più espressiva

$$\text{(I')} \qquad \frac{dt}{ds} = u \wedge t, \quad \frac{dn}{ds} = u \wedge n, \quad \frac{db}{ds} = u \wedge b;$$

le quali, paragonate con note formule di cinematica, dimostrano che $u ds$ è il vettore che definisce la rotazione occorrente per rendere la terna principale in P parallela a quella in $P + dP$ (¹). *Queste formule sono fondamentali.*

Le successive derivate di $P(s)$ si calcolano facilmente tenendo conto delle (I). Si deduce

$$P''(s) = \frac{n}{\rho},$$

$$P'''(s) = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{b}{\tau} - \frac{t}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)' n = -\frac{1}{\tau\rho} b - \frac{t}{\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho}\right)' n, \quad \text{ecc.}$$

L' ultima dà

$$b \times P''' = -\frac{1}{\tau\rho},$$

la quale permette di scrivere la (3) nella forma

$$l = -\frac{1}{\tau\rho}\frac{h^3}{3!} + \dots .$$

Di qui si conclude che quando sia $\frac{1}{\tau} > 0$ la curva attraversa in P il piano osculatore (nel senso di s crescente) andando dalla parte di b a quella di $-b$; viceversa nel caso opposto.

(¹) Si può chiamarlo il *vettore cinetico*. La retta che ha la direzione e il verso di u si suol chiamare l'*asse rettificante*, per una ragione che vedremo. Vedi, ad es., BURGATTI, *Lez. di Meccanica*, Cap. III.

Dalle (I) si deduce che *una curva è definita di forma quando son date le due curvature in funzione di s.*

Questo risulta in modo esatto dai teoremi d'esistenza delle soluzioni dei sistemi d'equazioni a derivate totali. Ma ci si può persuadere della verità di cotesta affermazione in modo sintetico. Fissiamo la posizione della curva fissando un suo punto $P_0(s_0)$ e l'orientazione della terna principale in P_0, ossia t_0, n_0, b_0. Allora possiamo calcolare

$$u_1 = -\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{b_0}{\rho_0}$$

e quindi per mezzo delle (I') gl'incrementi dt_0, dn_0, db_0. Così si conoscerà la terna principale t_1, n_1, b_1 nel punto $P_1 = P_0 + dt = P_0 + t_0 ds$. Nella stessa guisa, essendo noti ρ e τ in P_1, si determineranno il nuovo punto $P_1 + t_1 ds$ e la sua terna principale t_2, n_2, b_2; e così via. La curva risulta così pienamente definita.

Per la proprietà dimostrata,

$$\rho = \rho(s) \quad \tau = \tau(s)$$

si chiamano *l'equazioni intrinseche della curva*.

4. Coordinate cartesiane.

In coordinate cartesiane, posto

$$P - O = xi + yj + zk,$$

si ha subito che

$\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, sono le proiezioni sugli assi, o i coseni di direzione di t;

$\rho\frac{d^2x}{ds^2}$, $\rho\frac{d^2y}{ds^2}$, $\rho\frac{d^2z}{ds^2}$, sono le proiezioni sugli assi, o i coseni di direzione di n;

$\rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)$,... sono le proiezioni sugli assi, o i coseni di direzione di b.

Inoltre risulta

$$\frac{1}{\rho} = n \times P' = \text{mod}\, P'' = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

$$\frac{1}{\tau} = -\rho b \times P''' = -\rho^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

5. Curve particolari; eliche.

Sia $\rho : \tau = c$ (costante). Si deduce dalle (I)

$$\frac{db}{ds} = c\frac{dt}{ds},$$

da cui

$$b = ct + a_0,$$

ove a_0 è costante. Ne consegue $a_0 \times b = 1$, $a_0 \times n = 0$, $a_0 \times t = -c$, $a^2_0 = 1 + c^2$. Si conclude che la tangente fa un angolo θ costante con la direzione fissa a_0 ed è

$$\cos\theta = \frac{-c}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{-\rho}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}}.$$

Si tratta dunque di eliche tracciate sopra a un cilindro le cui generatrici sono parallele ad a_0. Da $a_0 \times n = 0$ si deduce che la normale principale è normale al cilindro.

Viceversa, se $t \times a_0 = -c$ (costante), viene dalla prima delle (I)

$$\frac{n \times a_0}{\rho} = \frac{dt}{ds} \times a_0 = \frac{d(t \times a_0)}{ds} = 0;$$

ossia a_0 è perpendicolare ad n; onde si può porre

$$a_0 = -ct + hb,$$

da cui

$$h\frac{db}{ds} = c\frac{dt}{ds};$$

la quale mostra, in virtù delle (I), che il rapporto $\rho:\tau$ è costante. Questa è dunque *proprietà caratteristica* delle eliche cilindriche.

Sia (C_0) la curva sezione del cilindro fatta con un piano (π) normale ad a_0. Sarà

$$P = P_0(s_0) + zk$$

essendo P_0 il punto di (C_0) ove si proietta P, e z la distanza P_0P, ritenendo qui k vettore unitario parallelo a a_0. Si ha manifestamente

$$z = s_0 \operatorname{cotg}\theta, \quad s = \sqrt{s_0^2 + s_0^2 \operatorname{cotg}^2\theta} = \frac{s_0}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Dopo ciò, derivando, risulta

$$P'(s) = \left(P_0'(s_0) + \frac{dz}{ds_0}k\right)\frac{ds_0}{ds} = (P_0'(s_0) + \operatorname{cotg}\theta\cdot k)\operatorname{sen}\theta$$
$$P''(s) = \operatorname{sen}^2\theta\cdot P_0''(s_0).$$

In virtù di queste, le formule del n. 3 dànno

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{sen}^2\theta\cdot P_0''(s_0)\times n = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}, \tag{5}$$

indicando con $1:R$ la curvatura $P_0''\times n$ in P_0 della sezione normale (C_0). Poi da

$$\cos^2\theta = \frac{\rho^2}{\rho^2+\tau^2}$$

si trae

$$\tau^2 = \rho^2\operatorname{tg}^2\theta, \quad \frac{1}{\tau} = \pm\frac{1}{\rho\operatorname{tang}\theta} = \pm\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{R}. \tag{5'}$$

Si vede di qui che *se l'elica è cilindrico-circolare, le due curvature sono costanti.* Coteste formule (5) e (5′) sono importanti, perchè dànno le due curvature dell'elica in funzione dell'angolo costante θ e della curvatura della sezione retta del cilindro.

6. Curve speciali; curve sferiche.

Vi sono delle curve che godono della proprietà che *il raggio di prima curvatura si ottiene proiettando sulla normale principale in P il vettore $P - O$, essendo O un punto fisso.* Questa proprietà è espressa da

$$(P - O) \times n = - \rho .$$

Ne consegue per le (I)

$$(P - O) \times \frac{dt}{ds} = - 1 , \text{ ossia } (P - O) \times t = c \text{ (costante)};$$

la quale esprime che *la proiezione di $P - O$ sulla tangente è costante.* Viceversa; da questa proprietà si risale all'altra.

Derivando poi la precedente e usando la 2ª delle (I), si ottiene

$$(P - O) \times \left(\frac{t}{\rho} + \frac{b}{\tau}\right) = \rho' ,$$

da cui si ricava

$$(P - O) \times b = - c \frac{\tau}{\rho} + \tau \rho' ;$$

e derivando ancora

$$(P - O) \times \frac{n}{\tau} = \frac{d}{ds}\left(\tau \rho' - c \frac{\tau}{\rho}\right),$$

ossia

$$\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau \rho' - c \frac{\tau}{\rho}\right) = 0 . \tag{6}$$

È la condizione a cui devono soddisfare le curvature di coteste curve.

Se la curva è tracciata sopra una sfera (curva sferica), risulta $c = 0$ e quindi

$$\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}(\tau \rho') = 0 .$$

Quando non esiste un punto fisso O tale che risulti $(P - O) \times n = - \rho$, la (6) manifestamente non ha luogo;

epperò essa è caratteristica delle curve che godono della proprietà indicata.

7. Curve che si corrispondono per parallelismo di una direzione principale.

Data una curva (L), si può chiedere se esista un'altra curva (L_1) che si possa mettere in corrispondenza punto per punto con la (L) in guisa che una delle direzioni principali in P sia parallela alla omonima nel punto corrispondente P_1. Saranno da considerarsi tre casi.

1° caso) Parallelismo delle tangenti; $t_1 = t$ nei punti corrispondenti $P_1(s_1)$ e $P(s)$. Derivando e usando le (I) si ottiene successivamente

$$\frac{dt_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{dt}{ds}, \quad \frac{n_1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{n}{\rho};$$

la quale esprime che anche n_1 sarà parallela a n e che sussisterà la relazione (1)

$$\frac{ds_1}{\rho_1} = \frac{ds}{\rho}.$$

E allora anche b_1 sarà parallela a b; epperò si conclude che *nei punti corrispondenti le terne principali saranno parallele*. Ne consegue

$$\frac{db_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \pm\frac{db}{ds}, \quad \frac{n_1}{\tau_1}\frac{ds_1}{ds} = \pm\frac{n}{\tau}, \quad \frac{ds_1}{\tau_1} = \pm\frac{ds}{\tau}.$$

Si terrà il segno positivo se τ_1 e τ sono dello stesso segno, il negativo se di segni contrari. Paragonata con la precedente dà

$$\frac{\rho_1}{\tau_1} = \pm\frac{\rho}{\tau},$$

che esprime *l'invarianza del rapporto delle curvature.*

---

(1) La relazione $t_1 = t$ implica che s_1 cresce con s, onde $ds_1 \colon ds$ è positivo.

Posto $\frac{ds_1}{ds} = f(s)$, ove $f(s)$ è scelta a piacere, si ricava

$$\rho_1 = \rho f(s), \quad \tau_1 = \pm \tau f(s),$$

che definiscono la (L_1).

Come si vede, nessuna condizione viene imposta alla (L); cosicchè ad ogni (L) corrispondono delle (L_1). Queste furono denominate dal Bianchi le *trasformate di Combescure* della (L).

2° caso) Parallelismo delle binormali. Questo caso coincide col precedente, giacchè da $\boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{b}$ si ricava come precedentemente $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1$ (salvo tutto al più i segni). Perciò *se due curve si corrispondono per parallelismo dei piani osculatori, una è trasformata di Combescure dell'altra.*

3° caso) Parallelismo delle normali principali; $\boldsymbol{n}_1 = \pm \boldsymbol{n}$. Derivando e applicando le (I), si trova subito

$$\left(\frac{\boldsymbol{b}_1}{\tau_1} + \frac{\boldsymbol{t}_1}{\rho_1}\right)\frac{ds_1}{ds} = \pm\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\tau} + \frac{\boldsymbol{t}}{\rho}\right).$$

Sia α l'angolo che $\boldsymbol{t}_1$ fa con $\boldsymbol{t}$; si ha manifestamente

$$\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t} = \cos\alpha, \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}_1 = \operatorname{sen}\alpha, \quad \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_1 = \mp \operatorname{sen}\alpha, \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_1 = \pm \cos\alpha.$$

Allora moltiplicando scalarmente la precedente una volta per $\boldsymbol{t}_1$ e una seconda volta per $\boldsymbol{b}_1$, risulta

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds} &= \pm\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tau} + \frac{\cos\alpha}{\rho}\right), \\ \frac{1}{\tau_1}\frac{ds_1}{ds} &= \pm\left(\pm\frac{\cos\alpha}{\tau} \mp \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Essendo poi $\boldsymbol{t}_1$ perpendicolare a $\boldsymbol{n}$, potremo scrivere in base alle posizioni fatte,

$$\boldsymbol{t}_1 = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{b};$$

da cui, derivando e applicando le (I), si ricava

$$\frac{\boldsymbol{n}_1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\alpha}{\rho}\boldsymbol{n} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tau}\boldsymbol{n} - (\operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{t} - \cos\alpha \cdot \boldsymbol{b})\frac{d\alpha}{ds};$$

ossia, per le precedenti,

$$\frac{\boldsymbol{n}_1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds}=\pm\frac{\boldsymbol{n}}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds}-(\operatorname{sen}\alpha\cdot\boldsymbol{t}-\cos\alpha\cdot\boldsymbol{b})\frac{d\alpha}{ds}.$$

Si deduce di qui $\frac{d\alpha}{ds}=0$, ossia *l'angolo di due tangenti corrispondenti è costante.*

Le (7) si possono invertire. Si ha manifestamente

$$(7')\qquad \begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{ds}{ds_1}&=\mp\left(\frac{\cos\alpha}{\rho_1}\mp\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tau_1}\right),\\ \frac{1}{\tau}\frac{ds}{ds_1}&=\mp\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho_1}\pm\frac{\cos\alpha}{\tau_1}\right).\end{aligned}$$

Dato α e preso per $\frac{ds_1}{ds}$ una funzione qualunque di s, le (7) definiscono una (L_1) (giacchè ne dànno le due curvature) che corrisponde ad (L) per parallelismo delle normali principali. E difatti dalle (7′), equivalenti alle (7), si trae

$$\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\rho}+\frac{\boldsymbol{b}}{\tau}\right)\frac{ds}{ds_1}=-\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\mp\left(\frac{\cos\alpha\cdot\boldsymbol{t}+\operatorname{sen}\alpha\cdot\boldsymbol{b}}{\rho_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mp\operatorname{sen}\alpha\cdot\boldsymbol{t}\pm\cos\alpha\cdot\boldsymbol{b}}{\tau_1}\right).$$

Ma i due vettori

$$\cos\alpha\cdot\boldsymbol{t}+\operatorname{sen}\alpha\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}_1\quad\text{e}\quad\mp\operatorname{sen}\alpha\cdot\boldsymbol{t}\pm\cos\alpha\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1$$

sono unitari, perpendicolari fra loro e ad $\boldsymbol{n}$, talchè la precedente diventa

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds_1}=-\frac{\boldsymbol{t}_1}{\rho_1}-\frac{\boldsymbol{b}_1}{\tau_1};$$

onde, paragonando con le formule di FRENET relative a (L_1), si vede che $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{b}_1\wedge\boldsymbol{t}_1$ è parallela a $\boldsymbol{n}$.

8. Applicazioni; curve di Bertrand.

Stando al 3° caso considerato di sopra, aggiungiamo la condizione che nei punti corrispondenti la normale principale sia comune alle due curve, talchè si abbia

$$P_1 - P = cn\,.$$

Allora si ottiene derivando

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} - t = c\frac{dn}{ds} + \frac{dc}{ds} n\,;$$

dalla quale, a causa delle condizioni

$$t_1 \times n = t \times n = \frac{dn}{ds} \times n = 0\,,$$

si deduce $\frac{dc}{ds} = 0$, ossia $c = \text{cost}$. Dunque *la distanza dei punti P e P_1 è costante.*

Dopo ciò resta (per le (I))

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} = t + c\frac{dn}{ds} = \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) t - \frac{c}{\tau}\, b\,,$$

talchè, riferendosi al numero precedente, risulta

$$\cos\alpha = \left(1 - \frac{c}{\rho}\right)\frac{ds}{ds_1}\,, \quad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{c}{\tau}\frac{ds}{ds_1}\,. \tag{8}$$

L'eliminazione di $ds : ds_1$ porta alla relazione

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho} - \frac{\cos\alpha}{\tau} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{c}\,. \tag{9}$$

Si conclude: *esiste una (L_1) che ha in comune con (L) le normali principali nel solo caso che la curva abbia le curvature legate dalla relazione lineare* (9), *o, in generale, da una relazione lineare* [1]. Queste curve sono dette *curve*

[1] Come è facile persuadersi.

di BERTRAND, dall'autore che primo considerò questo problema.

Manifestamente anche (L_1) è una curva di BERTRAND, che dicesi *l'associata alla* (L). Come è $P_1 - P = cn$, così si ha pure

$$P = P_1 \mp cn_1,$$

e per conseguenza

$$t\frac{ds}{ds_1} = t_1 \pm c\left(\frac{t_1}{\rho_1} + \frac{b_1}{\tau_1}\right) = \left(1 \pm \frac{c}{\rho_1}\right)t_1 \pm \frac{c}{\tau_1}b.$$

Ne risulta, come sopra,

$$\cos\alpha = \left(1 \pm \frac{c}{\rho_1}\right)\frac{ds_1}{ds}, \quad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{c}{\tau_1}\frac{ds_1}{ds}$$

le quali, unite alle (8), dànno

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{\tau\tau_1} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{c^2}, \quad \left(1 - \frac{c}{\rho}\right)\left(1 \pm \frac{c}{\rho_1}\right) = \cos^2\alpha.$$

La prima esprime la proprietà indicata da SCHELL, e cioè che *il prodotto delle torsioni di due curve associate di* BERTRAND *è una costante positiva;* la seconda esprime che *il birapporto dei punti che sulla normale hanno le ascisse* 0, c, ρ, $c \pm \rho_1$ *è costante ed uguale a* $1 : \cos^2\alpha$, come osservò il MANNHEIM.

9. Curve a flessione costante.

Per ottenere le curve a flessione costante $\rho = \rho_0$ basta manifestamente integrare l'equazione

$$P'' = \frac{n}{\rho_0},$$

prendendo per n un vettore unitario funzione qualunque di s. Ma ciò che importa notare è che *coteste curve sono curve di* BERTRAND; giacchè soddisfano alla (9) fatto $\alpha = \pi : 2$.

Volendo vedere la cosa direttamente, consideriamo il luogo dei centri di curvatura

$$P_1 = P + \rho_0 n .$$

Si ottiene al modo solito

$$\frac{dP_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = t + \rho_0\left(-\frac{b}{\tau} - \frac{t}{\rho_0}\right) = -\frac{\rho_0}{\tau} b ,$$

la quale dimostra che *la tangente in P_1 è parallela alla binormale in P*, e per dippiù

$$ds_1 = -\frac{\rho_0}{\tau} ds .$$

Allora da $t_1 = b$ si deduce

$$\frac{dt_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{db}{ds}, \quad -\frac{n_1}{\rho_1}\frac{\rho_0}{\tau} = \frac{n}{\tau}$$

ossia

$$\frac{n_1}{\rho_1} = -\frac{n}{\rho_0},$$

la quale esprime appunto che le normali in P e P_1 coincidono e che le due curve hanno la stessa flessione costante. Si conclude: *se una curva ha la flessione costante, anche il luogo dei suoi centri di curvatura ha la stessa flessione costante.* A causa del parallelismo di t_1 e b, l'angolo α è qui di 90°, come s'era detto.

10. Curve a torsione costante.

Anche le curve a torsione costante $\tau = \tau_0$ si deducono manifestamente con semplici integrazioni, come quelle precedenti. In base alla (9) si potrebbero considerare come particolari curve di Bertrand, ponendo in quella $\alpha = 0$ (parallelismo delle tangenti); ma in tal caso bisognerebbe porre anche $c = 0$. Cosicchè sotto questo riguardo si potrebbero chiamare *curve di* Bertrand *autoassociate.*

11. Curve parallele.

Due curve (L) e (L_1) son dette ***parallele*** se si corrispondono per parallelismo delle tangenti, e se nei punti corrispondenti hanno il piano normale in comune. Per le cose dette al n. 7, la (L_1) è in questo caso una trasformata di COMBESCURE della (L). Sarà $(P_1 - P) \times t = 0$, epperò

$$P_1 - P = xn + yb\,.$$

Derivando e usando le (I) si ricava

$$\frac{dP_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)t + \left(x' + \frac{y}{\tau}\right)n + \left(y' - \frac{x}{\tau}\right)b\,;$$

che solo può essere soddisfatta ponendo

$$\frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{x}{\rho}\right), \quad x' + \frac{y}{\tau} = 0, \quad y' - \frac{x}{\tau} = 0.$$

Le ultime due dànno

$$xx' + yy' = 0, \quad \text{ossia} \quad \mathrm{mod}\,(P_1 - P) = r = \mathrm{cost.}$$

La distanza r dei punti corrispondenti P e P_1 è costante, come nelle curve associate di BERTRAND.

Presa allora r ad arbitrio, e posto $x = r\cos\alpha$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, le precedenti dànno, mediante sostituzione,

$$\alpha' = \frac{1}{\tau} \quad \text{ossia} \quad \alpha = \int \frac{ds}{\tau} + \alpha_0\,;$$

cosicchè restano determinate x e y.

Essendo poi, per le cose dette al n. 7,

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho_1}{\rho} = \pm\frac{\tau_1}{\tau},$$

si deduce

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \pm\frac{\tau_1}{\tau} = 1 - \frac{x}{\rho},$$

che dànno le due curvature della (L_1).

12. Trasformazioni asintotiche delle curve, o trasformazioni di Bianchi [1].

Si voglia anzitutto determinare una curva $P-O=P(t)$ le cui binormali siano parallele al vettore unitario $b(t)$ e la cui torsione sia $f(t)$, essendo t il parametro variabile.

Posto $b\sqrt{\pm f}=v(t)$ (+ o − secondo che f è pos. o neg.), la curva è definita da

$$P-O=\pm\int v'\wedge v\,dt\,.$$

Infatti, si ha

$$P'=v'\wedge v \quad \text{ossia} \quad t\frac{ds}{dt}=v'\wedge v,$$

s essendo l'arco (prendiamo per semplicità il segno +). Derivando ancora e usando le (I), si ottiene

$$\frac{n}{\rho}\frac{ds}{dt}+t\frac{d^2s}{dt^2}=v''\wedge v\,,$$

e ne consegue

$$t\times v\equiv t\times b=0 \quad \text{e} \quad n\times v\equiv n\times b=0,$$

perciò b è la direzione della binormale.

Inoltre la prima dà

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=(v'\wedge v)\times(v'\wedge v)=v'^2\cdot v^2-(v\times v')^2.$$

Ora dalla posizione fatta si deduce

$$v'=\sqrt{f}\frac{db}{ds}\frac{ds}{dt}+(\sqrt{f})'b=\sqrt{f}\,\frac{n}{\tau}\frac{ds}{dt}+(\sqrt{f})'\,b,$$

e quindi

$$v'\times n=\frac{\sqrt{f}}{\tau}\frac{ds}{dt}.$$

---

[1] L. Bianchi: *Sulle configurazioni di* Moebius ecc. « Rend. Cir. Mat. Palermo », 1908.

Ma essendo

$$v' \times n = b \times t \wedge v' = \frac{v}{\sqrt{f}} \times [(v' \wedge v) \wedge v'],$$

sviluppando e tenendo conto delle precedenti, si trova

$$v' \times n = \frac{ds}{dt} \frac{1}{\sqrt{f}}.$$

Si conclude

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{f},$$

ossia la curva ha la torsione voluta.

Ciò posto, data una linea gobba (L) luogo dei punti $P(t)$, si vuol trovarne un'altra (L_1) luogo dei punti $P_1(t)$, in guisa che la retta PP_1 sia l'intersezione dei due piani osculatori corrispondenti.

Per le cose dette di sopra, posto $b\sqrt{\pm \tau} = v$, la data curva sarà definita da

$$P' = \pm v' \wedge v;$$

e in modo analogo per la (L_1) si potrà scrivere

$$P_1' = \pm v_1' \wedge v_1;$$

ove $v_1(t)$ sarà parallelo alla binormale. Ora per la condizione imposta deve risultare

$$(P_1 - P) \times v = 0, \quad (P_1 - P) \times v_1 = 0;$$

perciò è necessario che sia

$$P_1 - P = hv_1 \wedge v. \tag{11}$$

Derivandola e usando le precedenti, si ottiene

$$\pm v_1' \wedge v_1 \mp v' \wedge v = h'(v_1 \wedge v) + h(v_1' \wedge v + v_1 \wedge v'); \tag{o}$$

dalla quale si deduce con la moltiplicazione scalare per v e v_1,

$$\pm v_1' \wedge v_1 \times v = hv_1 \wedge v' \times v, \quad \mp v' \wedge v \times v_1 = hv_1' \wedge v \times v_1.$$

Ne consegue $h = \pm 1$; epperò i segni in P' e P_1' devono essere concordanti: il che prova, per le cose dette disopra, che *la* (L_1) ***avrà torsione d'ugual segno di*** (L) (1). Allora la (o) diventa

$$(v'_1 + v') \wedge v_1 - (v'_1 + v') \wedge v = 0,$$

e a questa si soddisfa nel modo più generale ponendo

$$v'_1 + v' = m(v_1 - v), \tag{12}$$

con m funzione arbitraria.

Viceversa, sussistendo qnesta relazione (o la precedente che è equivalente), la (11) derivata dà appunto

$$P'_1 = \pm v'_1 \wedge v_1.$$

Pertanto si conclude: ***le cercate curve*** (L_1) ***son definite dalla*** (11), ***ove*** $v_1(t)$ ***è la soluzione dell' equazione differenziale lineare*** (12), ***presa*** $m(t)$ ***arbitrariamente*** (2).

Per le cose dette la torsione di (L_1) sarà $\tau_1 = \pm v_1^2$; e dalla (11) si ricava

$$r = \mathrm{mod}\,(P_1 - P) = \sqrt{\tau\tau_1}\,\mathrm{sen}\,\alpha, \tag{13}$$

essendo α l' angolo delle due binormali.

Se si considera la superficie rigata (S) luogo delle rette PP_1, si vede che i piani osculatori in P e P_1 coincidono rispettivamente colle tangenti a (S) negli stessi punti, e questo lungo tutta (L) e (L_1). Siccome le curve

---

(1) Si vede facilmente che bisogna supporre

$$v_1 \wedge v' \times v \neq 0, \quad v'_1 \times v \wedge v_1 \neq 0,$$

altrimenti la (L_1) non differirebbe dalla (L).

(2) Il Bianchi ha osservato che ponendo m sotto la forma di derivata logaritmica di un' altra funzione $\psi(t)$, la soluzione è data da

$$v_1 = \psi\left(a - \int \frac{(\psi v)'}{\psi^2}\,dt\right)$$

essendo a vettor costante arbitrario.

tracciate sopra a una superficie e che hanno questa proprietà si dicono le *asintotiche* della superficie, così il BIANCHI ha chiamato le curve in discorso (L_1) le *trasformate asintotiche di* (L).

13. Casi particolari delle trasformazioni precedenti.

Aggiungiamo la condizione

$$\tau = \tau_1 \quad \text{ossia} \quad v^2 = v_1^{\,2}.$$

Allora la (12) dà

$$(v'_1 + v') \times (v_1 + v) = m(v_1^{\,2} - v^2) = 0,$$

la quale dimostra che la derivata di $(v_1 + v)^2$ è nulla. Dunque

$$(v_1 + v)^2 = 2c \text{ (costante)}.$$

Segue

$$v^2 + v \times v_1 = c,$$

ossia

$$\tau + \sqrt{\tau\tau_1} \cos\alpha = c, \quad (\tau = \tau_1)$$

da cui

$$\cos\alpha = \frac{c}{\tau} - 1.$$

Inoltre essendo $r = \tau \operatorname{sen} \alpha$ (13), si deduce

$$r = \sqrt{2c\tau - c^2}.$$

Così si hanno i valori di α e r. Di qui risulta manifestamente che *se uno degli elementi* τ, α, r *è costante, sono pure costanti gli altri due* (1).

14. Sviluppabili inerenti a una curva.

Ricordiamo che si chiama *superficie sviluppabile* la superficie inviluppo di una semplice infinità di piani.

---

(1) Per altre proprietà vedi la citata Memoria di BIANCHI (§ 11) e quella di PICONE: *Intorno alle trasformazioni asintotiche.* « Rend. Cir. Mat. Palermo », 1915.

Questa denominazione proviene dal fatto che una simile superficie, immaginata flessibile e inestendibile, può essere dispiegata sopra a un piano senza rotture nè duplicazioni, come in particolare i coni e i cilindri. Se

$$[P - P_0(t)] \times a(t) = 0$$

è l'equazione della semplice infinità di piani che si considera (t il parametro variabile), l'inviluppo, come è noto, è il luogo delle curve rappresentate dal sistema

$$(P - P_0) \times a = 0, \quad (P - P_0) \times \frac{da}{dt} - \frac{dP_0}{dt} \times a = 0$$

quando si faccia variare il parametro t.

Qui anche la seconda equazione rappresenta un piano; epperò la curva intersezione è una retta, detta *generatrice*. Manifestamente essa ha la direzione del vettore $a \wedge a'$. È ovvio che i piani inviluppanti la superficie sono i suoi piani tangenti (lungo ogni generatrice) e che due generatrici infinitamente vicine (a parte il caso del cilindro) s'incontrano in un punto. Il luogo di questi punti è una curva (C), alla quale son tangenti le generatrici.

Ogni punto di (C) divide la generatrice corrispondente in due semirette, epperò la sviluppabile si compone di due falde. Esse sono tagliate da un piano qualsiasi in due curve che si raccordano nel punto comune su (C), ma ivi formano una cuspide. Di qui il nome di *spigolo di regresso* della sviluppabile che si dà a (C).

L'equazione di (C) si ottiene cercando l'inviluppo delle generatrici, ossia aggiungendo all'equazioni precedenti quella che si ottiene con un'altra derivazione.

Ciò posto, se consideriamo le semplici infinità dei piani appartenenti al triedro principale (piani principali) di una curva (L), cioè i piani osculatori, i piani perpendicolari alle normali principali, detti *piani rettificanti*, e i piani normali, potremo determinare i loro inviluppi, che costituiscono tre sviluppabili.

La sviluppabile inviluppo dei piani osculatori, in virtù delle proprietà già stabilite, ha manifestamente per spigolo di regresso la curva (L) stessa.

La *sviluppabile rettificante* (inviluppo dei piani rettificanti) ha le generatrici definite dal sistema

$$(\mathrm{o})\quad (Q-P)\times n=0,\quad (Q-P)\times \frac{dn}{ds}=0,\quad (P'\times n=0),$$

P essendo il punto generico di (L); epperò sono parallele alla direzione del vettore

$$n\wedge\frac{dn}{ds}=\left(\frac{t}{\rho}+\frac{b}{\tau}\right)\wedge n=\frac{b}{\rho}-\frac{t}{\tau}=u,$$

(vedi n. 3). Ecco la ragione per cui la retta che ha la direzione parallela al vettore cinetico u è detta *asse rettificante.*

Poichè i due piani (o) passano per P, anche cotesta retta passa per P. La curva (L) appartiene dunque a questa sviluppabile. Siccome la sua normale principale in ogni punto coincide con la normale alla sviluppabile, la (L) è una *geodetica* (¹) della sviluppabile, ossia la linea che segna sulla superficie il più breve cammino fra due dei suoi punti; cosicchè quando si dispiega la sviluppabile sopra un piano, cotesta (L) si trasforma necessariamente in una retta. Da ciò il nome di *sviluppabile rettificante.*

Per cose dette, lo spigolo di regresso è definito dal sistema

$$(Q-P)\times n=0\quad (Q-P)\times\frac{dn}{ds}=0\quad (Q-P)\times\frac{d^2n}{ds^2}=-\frac{1}{\rho},$$

giacchè

$$P'\times\frac{dn}{ds}=-\frac{1}{\rho}.$$

(¹) Si vedranno in seguito le proprietà generali delle geodetiche di una superficie.

Si deduce [1]

$$Q-P=-\frac{1}{\rho}\frac{n\wedge\dfrac{dn}{ds}}{n\wedge\dfrac{dn}{ds}\times\dfrac{d^2n}{ds^2}}.$$

Il numeratore, come si è veduto, è uguale al vettore cinetico u. Quanto al denominatore, per le (I) si ha

$$u\times\frac{d^2n}{ds^2}=u\times\left[-\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)n-\left(\frac{1}{\rho}\right)'t-\left(\frac{1}{\tau}\right)'b\right]=$$
$$=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\rho}\right)'-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\tau}\right)'=-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{\tau}\right)';$$

che è diverso da zero, supposto non costante il rapporto $\rho:\tau$ (cioè non si tratti di eliche). Viene dunque l'equazione

$$Q=P+\frac{\rho u}{\left(\dfrac{\rho}{\tau}\right)'}=P-\frac{\varphi}{\varphi'}t+\frac{1}{\varphi'}b,$$

avendo posto $\rho:\tau=\varphi(s)$. *Lo spigolo di regresso si ottiene portando da P su l' asse rettificante il segmento di lunghezza*

$$\frac{\rho\,\mathrm{mod}\,u}{\varphi'}=\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi'}.$$

---

[1] Quando è dato un sistema di tre equazioni lineari in forma vettoriale $x\times a=l$ $x\times b=m$ $x\times c=n$, ove x è il vettore incognito, questo si ottiene così. In virtù della formula del doppio prodotto vettoriale e delle equazioni date, si ricava subito

$$(a\wedge b)\wedge x=lb-ma,\quad (b\wedge c)\wedge x=mc-nb,\quad (c\wedge a)\wedge x=na-lc,$$

dalle quali risulta

$$hx=na\wedge b+lb\wedge c+mc\wedge a.$$

Moltiplicando scalarmente per c, si ha

$$h=a\wedge b\times c.$$

La terza sviluppabile, detta *polare*, è l'inviluppo dei piani normali $(Q - P) \times t = 0$; epperò le sue generatrici sono definite dal sistema

$$(Q - P) \times t = 0, \quad (Q - P) \times \frac{n}{\rho} - 1 = 0.$$

Il secondo piano è parallelo al piano rettificante, distante di ρ da questo, epperò passante per il centro di curvatura C della curva in P. La generatrice dunque è parallela alla binormale condotta per C; e quindi la sviluppabile in discorso è il luogo di coteste rette e contiene perciò la curva luogo dei centri di curvatura.

Il suo spigolo di regresso è definito dal sistema

$$(Q - P) \times t = 0, \quad (Q - P) \times n = \rho, \quad (Q - P) \times \frac{dn}{ds} = \rho'.$$

Si ricava come di sopra

$$Q - P = \frac{\rho'(t \wedge n) + \rho\left(\dfrac{dn}{ds} \wedge t\right)}{t \wedge n \times \dfrac{dn}{ds}} = \frac{\rho' b - \rho n/\tau}{1/\tau}$$

ossia

$$Q = P + \rho n - \rho' \tau b.$$

15. Evolventi ed evolute.

Consideriamo la sviluppabile luogo delle tangenti ad (L). Ogni curva (L_1) tracciata su di essa in guisa che tagli ortogonalmente le generatrici dicesi una *evolvente di* (L). Se di un filo AB, flessibile e inestendibile e disteso primitivamente sulla curva (L), si tiene fisso il capo P_1 in modo che ad ogni momento il filo si componga di due tratti, AB adagiato ancora sulla curva, BP_1 disteso in linea retta lungo la tangente in B, il capo P_1 descriverà manifestamente una curva che giace su quella sviluppabile e taglia ortogonalmente le generatrici. Di qui il nome di *evolvente* dato a cotesta curva. In contrapposto (L) dicesi *l'evoluta* di (L_1).

L'equazione di una evolvente è $P_1 = P + ht$, con h funzione di s soddisfacente alla condizione

$$P_1' \times t = 1 + h' = 0\,;$$

ossia

$$P_1 = P + (c - s)\,t \qquad (c = \text{cost}).$$

La proprietà cinematica detta prima risulta anche di qui. Spostando poi l'origine sulla curva si può sempre supporre $c = 0$. Allora si ha derivando

$$t_1 \frac{ds_1}{ds} = -s\frac{dt}{ds} = -s\frac{n}{\rho},$$

la quale dimostra che *la tangente alla evolvente in P_1 ha la direzione e il verso opposto della normale principale ad (L) in P.*

È facile risolvere anche il problema inverso: *data la (L_1) trovare tutte le sue evolute (L)*. Per le cose dette dovranno essere verificate le condizioni

$$(P - P_1)\times t_1 = 0, \quad P - P_1 = ht.$$

Per la prima si deve porre

(i) $$P - P_1 = pn_1 + qb_1\,.$$

Derivando e usando le formule di Frenet, si trova

$$\frac{ds}{ds_1}t = \left(1 - \frac{p}{\rho_1}\right)t_1 + \left(\frac{q}{\tau_1} + p'\right)n_1 + \left(q' - \frac{p}{\tau_1}\right)b_1\,;$$

e allora, scrivendo che deve aver luogo la seconda condizione, dal paragone dei termini nei due membri si ottiene

$$p = \rho_1\,, \qquad \frac{\rho_1 q' - q\rho_1'}{q^2 + \rho_1} = \frac{1}{\tau_1}.$$

Quest'ultima è subito integrabile e dà

$$\frac{q}{\rho_1} = tg(\varphi + c) \quad \text{ove} \quad \varphi = \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{\tau_1}\,.$$

E così, determinate p e q, la (i) dà P_1 in funzione di s_1.

Capitolo II.

Teoria delle superficie.

1. Generalità. - Coordinate curvilinee.

Il luogo dei punti $P(u, v)$ dello spazio euclideo che si ottiene facendo variare i due parametri u e v tra certi limiti finiti o infiniti è una superficie (S). I valori di u e v si chiamano *le coordinate di P su (S)*. Supporremo che le derivate prime e seconde di P rispetto a u e v siano finite e continue, salvo che in punti o linee isolate che saranno in ogni caso specificati.

Fissato il valore di v $(v = v_0)$, il luogo dei punti $P(u, v_0)$ per tutti i valori di u è una curva appartenente alla (S); dicesi per brevità *la curva $v = v_0$*. Dando a v_0 tutti i valori che gli competono, si ottiene *la famiglia delle linee $v =$ cost* di (S). In modo analogo si ha *la famiglia delle linee $u =$ cost*. Per ogni punto P passano due linee di ciascuna famiglia corrispondenti ai valori di u e v che individuano quel punto. Sono le *coordinate curvilinee* di P su (S).

Passando da un punto P a un altro punto infinitamente vicino su (S), si ha

$$dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv = P'_u du + P'_v dv .$$

Porremo sempre

$$P'_u = \sqrt{E} \cdot a, \quad P'_v = \sqrt{G} \cdot b,$$

essendo a e b vettori unitari tangenti rispettivamente alle linee $v =$ cost e $u =$ cost passanti per P nel senso crescente di u e v; onde scriveremo

$$dP = \sqrt{E} \cdot a du + \sqrt{G} \cdot b dv. \tag{1}$$

Sarà chiamato lo *spostamento di P su* (S). Più comunemente chiamasi *elemento lineare di* (S) il mod. dP o il suo quadrato; ossia

$$dP \times dP = ds^2 = Edu^2 + 2\sqrt{EG}a \times b\, du\, dv + Gdv^2 \tag{2}$$

che si suol scrivere più brevemente [1]

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{2'}$$

ponendo

$$\sqrt{EG}a \times b = \sqrt{EG}\cos\alpha = F, \quad \text{o} \quad \cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{3}$$

Manifestamente è una forma quadratica essenzialmente positiva per tutti i valori di u e v dai quali dipendono i coefficienti. Definisce la *metrica* della superficie. La lunghezza degli archi elementari delle linee $v = \text{cost}$ e $u = \text{cost}$ sono manifestamente

$$ds_v = \sqrt{E}du \quad ds_u = \sqrt{G}dv.$$

Il vettore unitario

$$n = \frac{a \wedge b}{\operatorname{sen}\alpha} \tag{4}$$

definisce in ogni P la normale alla (S). Si ha inversamente

$$\operatorname{sen}\alpha = a \wedge b \times n = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}. \tag{4'}$$

Se in ogni punto a e b sono ortogonali, si ha $F = 0$, e viceversa; allora le coordinate si dicono *ortogonali*.

Due spostamenti dP e δP sono ortogonali quando risulta

$$dP \times \delta P = Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0. \tag{5}$$

2. Formule e questioni preliminari.

Sia $\varphi(P)$ una funzione dei punti P di (S) (e perciò di u e v). Introduciamo *l' operatore superficiale* grad_s in virtù

---

[1] Sono simboli tradizionali usati ormai da tutti.

del quale *il vettore tangenziale* $\mathrm{grad}_s\,\varphi$ soddisfa alla relazione

$$\mathrm{grad}_s\varphi \times dP = d\varphi, \tag{6}$$

essendo il secondo membro il differenziale di φ quando si passa da P a $P + dP$ [1]. Le grandezze

$$\mathrm{grad}_s\varphi \times \boldsymbol{a}, \quad \mathrm{grad}_s\varphi \times \boldsymbol{b}, \tag{7}$$

sono le derivate di φ nella direzione $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e perciò si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s_u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{7'}$$

Come si vede dalla (6), il vettore $\mathrm{grad}_s\,\varphi$ è normale alla linea $\varphi = \mathrm{cost}$ in ogni punto; perciò la condizione di ortogonalità di due famiglie di linee $\varphi = \mathrm{cost}$ e $\psi = \mathrm{cost}$ tracciate su (S) è

$$\mathrm{grad}_s\varphi \times \mathrm{grad}_s\psi = 0. \tag{8}$$

Sia ora $\boldsymbol{w}$ un vettore funzione di P. L'omografia $\dfrac{d\boldsymbol{w}}{dP}$, detta la derivata di $\boldsymbol{w}$ rispetto a P, applicata a dP dà il differenziale di $\boldsymbol{w}$, cioè $d\boldsymbol{w}$, quando si passa da P a $P + dP$. Per definizione è

$$\mathrm{div}_s\,\boldsymbol{w} = \mathrm{I}_1\frac{d\boldsymbol{w}}{dP}, \quad \mathrm{rot}_s\,\boldsymbol{w} = 2\mathrm{V}\frac{d\boldsymbol{w}}{dP},$$

ossia gli operatori superficiali div_s e rot_s applicati a $\boldsymbol{w}(P)$ danno rispettivamente l'invariante primo e il doppio vettore della omografia $\dfrac{d\boldsymbol{w}}{dP}$. Valgono le formule analoghe a quelle dello spazio che qui per comodo del lettore trascriviamo [2]:

---

[1] Se φ è definita in tutto lo spazio, allora si pone

$$\mathrm{grad}_s\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi - (\mathrm{grad}\,\varphi \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

dalla quale risulta (6).

[2] A. V. G., Vol. I, Cap. II, § 5. Con questa abbreviazione indicheremo d'ora innanzi il Vol. I di questa collezione di Analisi vettoriale generale.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}_s(\varphi w) = \varphi \operatorname{div}_s w + \operatorname{grad}_s \varphi \times w \\
&\operatorname{grad}_s(u \times v) = \mathrm{K}\frac{du}{dP}v + \mathrm{K}\frac{dv}{dP}u \\
(9) \qquad &\operatorname{rot}_s(\varphi w) = \varphi \operatorname{rot}_s w + \operatorname{grad}_s \varphi \wedge w \\
&\operatorname{div}_s(u \wedge v) = v \times \operatorname{rot}_s u - u \times \operatorname{rot}_s v \\
&\operatorname{rot}_s w \times dP \wedge \delta P = d(w \times \delta P) - \delta(w \times dP).
\end{aligned}
$$

Da quest' ultima, fatto $w = \operatorname{grad}_s \varphi$, e notando che è su (S) $dP \wedge \delta P = n d\sigma$ ($d\sigma$ elemento d'area), viene

$$(10) \qquad \operatorname{rot}_s \operatorname{grad}_s \varphi \times n = 0,$$

e non $\operatorname{rot}_s \operatorname{grad}_s \varphi = 0$ come nello spazio. Inoltre fatto $w = n$ risulta

$$\operatorname{rot}_s n \times n = 0.$$

Ma essendo anche per la stessa formula

$$\operatorname{rot}_s n \wedge n = \left(\mathrm{K}\frac{dn}{dP} - \frac{dn}{dP}\right) n = 0,$$

perchè

$$\frac{dn}{dP}n = 0, \quad \mathrm{K}\frac{dn}{dP}n = 0 \quad (\text{da } \operatorname{grad} n^2 = 0),$$

ne consegue

$$(11) \qquad \operatorname{rot}_s n = 0.$$

Questa formula esprime che *il vettore dell' omografia* $\dfrac{dn}{dP}$ *è nullo*, ossia che essa è una *dilatazione*. Vedremo più oltre l' importanza di questo.

In base a ciò la penultima delle (9), fatto $u = n$, $v = \operatorname{grad}_s \varphi$, dà

$$(12) \qquad \operatorname{div}_s(n \wedge \operatorname{grad}_s \varphi) = 0,$$

altra formula importante.

Ora si può porre la questione: *qual' è la più generale soluzione di* $\operatorname{div}_s w = 0$ su (S) [1]? Ponendo

$$w = hn + n \wedge w_1,$$

---

[1] Come si sa nello spazio è $w = \operatorname{rot} u$, con u arbitrario.

cosa sempre possibile, risulta per le (9)

$$h \operatorname{div}_s n - \operatorname{rot}_s w_1 \times n = 0,$$

da cui

$$h = \frac{\operatorname{rot}_s w_1 \times n}{\operatorname{div}_s n}.$$

Basta dunque scegliere w_1 ad arbitrio e per h questo valore.

Se si pone $w_1 = \operatorname{grad}_s \varphi$, si ha per la (10)

$$w = n \wedge \operatorname{grad}_s \varphi,$$

come nella (12).

Ecco un' altra questione importante: *a quale condizione deve soddisfare $u(P)$ affinchè $u \times dP$ sia differenziale esatto su (S)?* Da

$$u \times dP = d\varphi = \operatorname{grad}_s \varphi \times dP$$

si trae la condizione

$$u = \operatorname{grad}_s \varphi + hn.$$

Ne segue

$$u \wedge n = \operatorname{grad}_s \varphi \wedge n,$$

e quindi

(13) $\qquad \operatorname{div}_s (u \wedge n) = 0$ od anche $n \times \operatorname{rot}_s u = 0$.

Questa è la condizione necessaria e sufficiente.

3. Sviluppi in coordinate.

Quando occorra calcolare $\operatorname{grad}_s \varphi$ in funzione dei coefficienti dell' elemento lineare ds^2, si pone

$$\operatorname{grad}_s \varphi = Aa + Bb,$$

e allora per le (7) e (3) si ricava

$$(14) \qquad \begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{E}}{H^2}\left(G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right), \\ B &= \frac{\sqrt{G}}{H^2}\left(E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right), \end{aligned}$$

$$(H^2 = EG - F^2)$$

che sono le componenti (e non le proiezioni) di $\operatorname{grad}_s \varphi$ secondo le direzioni $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Ne consegue

$$(\operatorname{grad}_s \varphi)^2 = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{H^2},$$

e in modo analogo

$$\operatorname{grad}_s \varphi \times \operatorname{grad}_s \psi = \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{H^2}.$$

In particolare per $\varphi = u$ od a v si ha

$$(\operatorname{grad}_s u)^2 = \frac{G}{H^2}, \quad (\operatorname{grad}_s v)^2 = \frac{E}{H^2},$$

e quindi

$$\operatorname{grad}_s u = \frac{\sqrt{G}}{H}\boldsymbol{i}_u, \quad \operatorname{grad}_s v = \frac{\sqrt{E}}{H}\boldsymbol{i}_v,$$

essendo $\boldsymbol{i}_u$ e $\boldsymbol{i}_v$ vettori unitari nelle direzioni perpendicolari a $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}$ (¹) nel senso crescente di u e v.

Di qui si ricava

$$\operatorname{div}_s \boldsymbol{a} = \operatorname{div}_s(\boldsymbol{i}_v \wedge \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot}_s \boldsymbol{i}_v = \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot}_s\left(\frac{H}{\sqrt{E}}\operatorname{grad}_s v\right).$$

Sviluppando e osservando che è $\operatorname{rot}_s \operatorname{grad}_s v \times \boldsymbol{n} = 0$, si ottiene

$$\tag{15} \begin{aligned} \operatorname{div}_s \boldsymbol{a} &= \operatorname{grad}_s \frac{H}{\sqrt{E}} \times \frac{\sqrt{E}}{H}\boldsymbol{i}_v \wedge \boldsymbol{n} = \\ &= \frac{\sqrt{E}}{H}\operatorname{grad}_s \frac{H}{\sqrt{E}} \times \boldsymbol{a} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H}{\sqrt{E}}\right). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\tag{15'} \operatorname{div}_s \boldsymbol{b} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H}{\sqrt{G}}\right).$$

(¹) Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono ortogonali,

$$\operatorname{grad}_s u = \frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{b} \quad \operatorname{grad}_s v = \frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{a}.$$

Queste formule servono per calcolare la div_s di qualunque vettore tangenziale.

In particolare si ha

$$\mathrm{div}_s\, \mathrm{grad}_s\, \varphi = \mathrm{div}_s\, (Aa + Bb);$$

onde sviluppando si trova

$$\mathrm{div}_s\, \mathrm{grad}_s\, \varphi = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{HA}{\sqrt{E}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{HB}{\sqrt{G}}\right)\right], \tag{16}$$

ove A e B hanno l'espressioni (14). Il primo membro s'indica anche con $\Delta_s\, \varphi$ (1).

4. Forma isoterma-isometrica dello spostamento e dell'elemento lineare.

Quando lo spostamento assume la forma particolare

$$dP = m(a\,du + b\,dv) \quad \text{con } a \times b = 0, \tag{17}$$

si dice che ha *la forma isoterma-isometrica*, e le coordinate u e v prendono allora lo stesso nome. Risulta

$$ds^2 = m^2 (du^2 + dv^2).$$

Si ha in particolare

$$ds_v = m\,du, \quad ds_u = m\,dv,$$

per modo che assumendo du e dv uguali, anche gli archi infinitesimi ds_u, ds_v risultano uguali: onde si dice *che i sistemi isotermi $u = cost$ e $v = cost$ dividono la (S) in una rete di quadratini infinitesimi.*

Isotermo si chiama anche lo spostamento

$$dP = m(U\,du + V\,dv),$$

se U e V sono rispettivamente funzioni di u e v soltanto, perchè con un cambiamento di parametri si riduce alla forma (17).

---

(1) Le espressioni di $(\mathrm{grad}_s \varphi)^2$, $\Delta_s \varphi$, $\mathrm{grad}_s \varphi \times \mathrm{grad}_s \psi$ sono i così detti *parametri differenziali* di φ e di (φ, ψ) nelle ordinarie esposizioni di questa teoria.

Nel caso (17) u e v si dicono *parametri isometrici* per la proprietà vista dianzi. Per le formule precedenti (n. 3), affinchè ciò accada occorre che sia

$$\operatorname{grad}_s u = \frac{1}{m}\, b, \quad \operatorname{grad}_s v = \frac{1}{m}\, a,$$

cioè

$$\operatorname{grad}_s u = n \wedge \operatorname{grad}_s v.$$

In generale dunque *affinchè le linee* $\varphi(u, v) = cost$ *e* $\psi(u, v) = cost$ *attribuiscano allo spostamento la forma suddetta è necessario e basta che risulti*

$$\operatorname{grad}_s \varphi = n \wedge \operatorname{grad}_s \psi. \tag{18}$$

Si deduce subito

$$\Delta_s \varphi = \operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s \varphi = 0, \quad \Delta_s \psi = \operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s \psi = 0,$$

la qual proprietà si esprime dicendo *che* φ e ψ *sono armoniche su* (S).

Se s' introduce l' omografia $\varphi + \psi\, n \wedge$ definita in ogni P, la precedente può scriversi

$$\operatorname{grad}_s (\varphi + \psi n \wedge) = 0. \tag{18'}$$

La (18) sviluppata in base alle (7') dà luogo al sistema

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Sono equazioni che s' incontrano nella teoria delle funzioni di variabile complessa, le quali esprimono che $\varphi + i\psi$ è funzione della variabile complessa $u + iv$. Onde risulta che *noto su* (S) *un sistema isotermo* (u, v) *si ottengono tutti gli altri ponendo* $\varphi + i\psi = f(u + iv)$.

L' omografia $\varphi + \psi n \wedge$ è sotto forma assoluta e indipendente dall' ente analitico $i = \sqrt{-1}$ ciò che comunemente dicesi *variabile complessa su* (S); una variabile, cioè, $u + iv$ tale che le linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ formano su (S) un sistema isotermo; e la (18) definisce il legame fra due funzioni *armoniche coniugate* su (S).

Infine si osservi che se $w \times dP = 0$ è l'equazione differenziale d'una famiglia di linee appartenenti a un sistema semisotermo, queste linee si possono determinare con una semplice quadratura. E invero detto ρ il fattore integrante, si avrà intanto per la condizione (13)

$$\mathrm{div}_s\,(\rho w \wedge n) = 0.$$

Poi per l'armonicità della funzione φ definita da

$$\rho w \times dP = \mathrm{grad}_s\,\varphi,$$

deve anche risultare

$$\mathrm{div}_s\,(\rho w) = 0.$$

Queste due equazioni definiscono ρ. Posto $w \wedge n = w_1$ si ottiene sviluppando

$$\mathrm{grad}\log\rho \times w = \mathrm{div}_s\,w, \quad \mathrm{grad}\log\rho \times w_1 = \mathrm{div}_s\,w_1$$

da cui

$$\mathrm{grad}\log\rho = \frac{\mathrm{div}_s\,w}{w^2}\,w + \frac{\mathrm{div}_s\,w_1}{w_1^{\,2}}\,w_1 .$$

5. L'omografia fondamentale; curvature.

Poichè la normale n varia da punto a punto della superficie, subito s'intuisce che avrà fondamentale importanza la considerazione della derivata di n rispetto a P, ossia della omografia $\sigma = \frac{dn}{dP}$ (funzione di P), la quale, applicata a dP, dà la variazione dn di n quando si passa da P a un punto vicinissimo $P + dP$ della superficie stessa ($\sigma(dP) = dn$). Essendo manifestamente nulla la derivata di n nella direzione n, si ha $\sigma n = 0$; cosicchè σ è degenere considerata nello spazio.

Inoltre dal fatto che è $\mathrm{rot}_s\, n = 0$, come si è visto al $n \cdot 3$, segue che σ è *dilatazione*, quindi $\sigma = \mathrm{K}\sigma$. Essa trasforma ogni vettore u in un vettore normale ad n, ossia, come diremo, in un vettore tangenziale, giacchè si ha $\sigma u \times n = u \times \sigma n = 0$.

Pensandola inerente alla sola superficie (e invero è funzione di P), essa è una dilatazione in due dimensioni che trasforma ogni vettore tangenziale in un vettore tangenziale.

Cerchiamo le sue due direzioni unite, che saranno tangenziali. Diciamole c_1 e c_2 (in P), prese in tal verso che risulti $c_1 \wedge c_2 = n$ (si sa che sono ortogònali). Sono definite, per cose note, da

$$\sigma c_1 = \frac{1}{r_1} c_1 \qquad \sigma c_2 = \frac{1}{r_2} c_2 \tag{19}$$

ove $1:r_1$ e $1:r_2$ sono le radici dell'equazione

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 - I_1\sigma \cdot \frac{1}{r} + I_2\sigma = 0,$$

essendo $I_1\sigma$ e $I_2\sigma$ gl'invarianti primo e secondo di σ. Ne consegue pertanto

$$I_1\sigma = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad I_2\sigma = \frac{1}{r_1 r_2}. \tag{19'}$$

Per vedere il significato di r_1 e r_2, cerchiamo se partendo da P c'è una direzione dP tale che la normale in $P + dP$ incontri quella in P. Dovrà esistere un punto $Q = P - rn$ sulla normale in P tale che la retta passante per $P + dP$ e contenente $n + dn$ passi per Q; ossia

$$(Q - P - dP) \wedge (n + dn) = 0.$$

Si deduce

$$- dP \wedge n - rn \wedge dn - dP \wedge dn = 0,$$

o meglio

$$n \wedge (dP - rdn) = dP \wedge dn.$$

Il secondo membro è un vettore diretto come n, il primo invece sarebbe tangenziale. L'uguaglianza perciò non può sussistere, se non è

$$dP = rdn, \quad dP \wedge dn = 0.$$

La seconda è una conseguenza della prima. Ne viene

$$dn = \sigma(dP) = \frac{1}{r} dP.$$

Adunque *le direzioni cercate esistono e sono le direzioni unite* c_1 *e* c_2 *di* σ. Per uno spostamento dP lungo c_1 il punto Q d'incontro delle normali in P e $P+dP$ è alla distanza r_1 da P, e per uno spostamento lungo c_2 è alla distanza r_2. Si dice che questi numeri (coi loro segni) misurano i *due raggi principali di curvatura della superficie in* P. Le direzioni c_1 e c_2 diconsi le *direzioni principali* in P; $\mathrm{I}_1\sigma$ e $\mathrm{I}_2\sigma$ misurano le così dette *curvatura media* e *curvatura totale* o *gaussiana.*

Partendo da P e muovendosi con continuità su (S) seguendo sempre una direzione principale, si descrive una *linea di curvatura.* Il luogo delle normali n lungo questa linea è una superficie sviluppabile. *Si hanno sempre sopra ogni* (S) *due famiglie di linee di curvatura* (*secondo che si considerano le direzioni* c_1 *o le* c_2) *che si tagliano ad angolo retto. Lungo esse le normali alla superficie si distribuiscono in due famiglie di sviluppabili* (¹). Per le cose dette, l'equazione differenziale di queste linee è

$$dP \wedge \sigma(dP) = 0. \tag{20}$$

6. Espressioni per le curvature.

Poniamo $M - O = n(P)$, ove O è un punto fisso. Essendo $\mathrm{mod}\,(M - O) = 1$, veniamo così a stabilire una corrispondenza fra i punti P di (S) e i punti M della sfera di raggio uno, chiamata *rappresentazione sferica o di* GAUSS. Per mezzo di questa possiamo ottenere un'altra interpretazione della curvatura totale, data la prima volta da GAUSS.

Dalla posizione fatta si ricava derivando

$$dM = \sigma(dP).$$

Prendiamo una volta $dP = c_1 ds_1$ e un'altra volta $dP = c_2 ds_2$,

---

(¹) Naturalmente bisogna escludere la sfera e il piano, sulle quali tutte le linee sono di curvatura.

cioè nelle direzioni principali; si ha

$$d_1 M = \sigma c_1 ds_1 = \frac{c_1}{r_1} ds_1, \quad d_2 M = \frac{c_2}{r_2} ds_2,$$

cosicchè i *due corrispondenti spostamenti* $d_1 M$ e $d_2 M$ sulla sfera sono paralleli a c_1 e c_2. Dette dl_1 e dl_2 le loro lunghezze, si ricava

$$dl_1 = \frac{ds_1}{r_1}, \quad dl_2 = \frac{ds_2}{r_2},$$

e quindi

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{dl_1 dl_2}{ds_1 ds_2}.$$

Poichè $ds_1 ds_2$ è l'area d'un rettangolo infinitesimo su (S) e $dl_1 dl_2$ quella del rettangoletto corrispondente sulla sfera, e data anche l'invarianza di $1/r_1 r_2$, si può dire: *la curvatura totale in P è data dall'inverso del rapporto fra l'elemento d'area in P della (S) e il corrispondente nella rappresentazione sferica.* Si vede l'analogia col caso delle curve.

Si possono dare altre espressioni più generali delle due curvature, sia partendo dalle espressioni generali degli invarianti di una omografia, sia trasformando le precedenti. In quest'ultimo modo si ha per le (19)

$$\sigma c_1 \wedge \sigma c_2 = \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} n,$$

e quindi

$$I_2 \sigma = \frac{1}{r_1 r_2} = \sigma c_1 \wedge \sigma c_2 \times n.$$

A causa dell'invarianza di questa espressione, si possono scegliere in P altri due vettori unitari a e b in luogo di c_1 e c_2, in guisa che $a \wedge b$ abbia il verso di n (anche non ortogonali fra loro), e scrivere [1]

$$I_2 \sigma = \frac{\sigma a \wedge \sigma b \times n}{a \wedge b \times n}. \tag{21}$$

---

[1] Se fossero ortogonali, sarebbe $a \wedge b \times n = 1$, come è $c_1 \wedge c_2 \times n = 1$ nella formula precedente.

Osservando che $\sigma a \wedge \sigma b$ è parallelo a n, come $a \wedge b$, si può anche scrivere

$$a \wedge b \cdot \mathrm{I}_2\sigma = \sigma a \wedge \sigma b.$$

Quanto alla curvatura media si ha analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1\sigma = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} &= \sigma c_1 \times c_1 + \sigma c_2 \times c_2 \\ &= \sigma c_1 \times c_2 \wedge n + \sigma c_2 \times n \wedge c_1\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} c_2 = n \wedge c_1 \\ c_1 = c_2 \wedge n \end{pmatrix}$$

ossia

$$\mathrm{I}_1\sigma = (\sigma c_1 \wedge c_2 - \sigma c_2 \wedge c_1) \times n.$$

Anche qui, data l'invarianza di $\mathrm{I}_1\sigma$, si possono usare altri vettori unitari tangenziali a e b come sopra. E allora si ha

$$\mathrm{I}_1\sigma = \frac{(\sigma a \wedge b - \sigma b \wedge a) \times n}{a \wedge b \times n}; \tag{22}$$

ed anche

$$a \wedge b \cdot \mathrm{I}_1\sigma = \sigma a \wedge b - \sigma b \wedge a,$$

in base al solito fatto che questi vettori (prodotti vettoriali) sono diretti come n.

In particolare si possono scegliere i vettori P'_u e P'_v, derivate di $P(u, v)$ rispetto ai parametri, e allora si ha

$$\mathrm{I}_2\sigma = \frac{\sigma(P'_u) \wedge \sigma(P'_v) \times n}{P'_u \wedge P'_v \times n}.$$

Ma notando che

$$\sigma\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right) = \frac{dn}{dP}\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial n}{\partial u} = n'_u, \quad \sigma\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right) = n'_v,$$

si può anche scrivere

$$\mathrm{I}_2\sigma = \frac{n'_u \wedge n'_v \times n}{P'_u \wedge P'_v \times n}; \tag{23}$$

e per le stesse ragioni

$$\mathrm{I}_1\sigma = \frac{(n'_u \wedge P'_v - n'_v \wedge P'_u) \times n}{P'_u \wedge P'_v \times n}; \tag{24}$$

formule utili in taluni casi.

Si noti infine che $I_1\sigma = \operatorname{div} n$, epperò *la curvatura media è misurata dalla divergenza di* n.

Le tre direzioni (c_1, c_2, n) in P formano il *triedro principale*.

7. Altra espressione indipendente da σ della curvatura totale.

Ponendo $(a \wedge n) \wedge a$ al posto di n, si ottiene con facile sviluppo

$$\sigma a \wedge \sigma b \times n = \sigma a \wedge a \times n \cdot (\sigma b \times a) - \sigma b \wedge a \times n \cdot (\sigma a \times a).$$

Dalla formula generale

$$\operatorname{grad}(u \times v) = \mathrm{K}\frac{du}{dP}v + \mathrm{K}\frac{dv}{dP}u$$

applicata a $n \times a = 0$, $n \times b = 0$, si deduce

$$\frac{dn}{dP}a = -\mathrm{K}\frac{da}{dP}n, \quad \frac{dn}{dP}b = -\mathrm{K}\frac{db}{dP}n,$$

e quindi

$$\sigma a \times a = -\frac{da}{dP}a \times n, \quad \sigma b \times a = -\frac{db}{dP}a \times n$$

$$\sigma a \times b = -\frac{da}{dP}b \times n, \quad \sigma b \times b = -\frac{db}{dP}b \times n.$$

Per mezzo di queste la precedente diventa

$$\sigma a \wedge \sigma b \times n = a \wedge \sigma a \times n \cdot \frac{da}{dP}b \times n -$$

$$- a \wedge \sigma b \times n \cdot \frac{da}{dP}a \times n.$$

Ma

$$a \wedge \sigma a = (a \wedge \sigma a \times n)n, \quad a \wedge \sigma b = (a \wedge \sigma b \times n)n,$$

perchè sono vettori diretti come n; per conseguenza

$$\sigma a \wedge \sigma b \times n = \frac{da}{dP}b \times a \wedge \sigma a - \frac{da}{dP}a \times a \wedge \sigma b.$$

Infine, essendo

$$\frac{d(n \wedge a)}{dP} a = n \wedge \frac{da}{dP} a - a \wedge \sigma a ,$$

$$\frac{d(n \wedge a)}{dP} b = n \wedge \frac{da}{dP} b - a \wedge \sigma b ,$$

risulta ancora

$$\sigma a \wedge \sigma b \times n = 2n \wedge \frac{da}{dP} a \times \frac{da}{dP} b -$$

$$- \frac{d(n \wedge a)}{dP} a \times \frac{da}{dP} b + \frac{d(n \wedge a)}{dP} b \times \frac{da}{dP} a .$$

Ma il primo termine è nullo, perchè essendo $\frac{da}{dP} a$ e $\frac{da}{dP} b$ vettori normali ad a, il loro prodotto vettoriale è normale ad n. Resta dunque

$$\sigma a \wedge \sigma b \times n = (a \wedge b \times n) \mathrm{I}_2 \sigma = \tag{25}$$

$$= \frac{d(n \wedge a)}{dP} b \times \frac{da}{dP} a - \frac{d(n \wedge a)}{dP} a \times \frac{da}{dP} b .$$

Questa espressione non contiene più la σ, ma soltanto le direzioni tangenziali a, b, $n \wedge b$, $n \wedge a$; epperò in coordinate sarà funzione soltanto dei coefficienti del ds^2 e delle loro derivate. L'importanza di questo fatto, scoperto da GAUSS, sarà messa in evidenza in altro paragrafo [1].

---

[1] Introducendo i parametri u e v, il secondo membro, a parte il fattore $1 : \sqrt{EG}$, si scrive:

$$\frac{\partial(n \wedge a)}{\partial v} \times \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial(n \wedge a)}{\partial u} \times \frac{\partial a}{\partial v} .$$

Ma, essendo $n \wedge a \times a = 0$, si ha

$$\frac{\partial(n \wedge a)}{\partial v} \times a = - \frac{\partial a}{\partial v} \times n \wedge a , \quad \frac{\partial(n \wedge a)}{\partial u} \times a = - \frac{\partial a}{\partial u} \times n \wedge a ;$$

8. Indicatrice di Dupin. — Sezioni normali.

Posto $dP = h(Q - P)$ (h costante infinitesima), consideriamo la conica luogo dei punti Q

$$\sigma(Q - P) \times (Q - P) = 1$$

giacente nel piano tangente in P. Il suo centro è in questo punto e i suoi assi sono, come è noto, le direzioni unite c_1 e c_2 di σ.

Riferendosi allora a queste direzioni come assi, possiamo porre $Q - P = pc_1 + qc_2$; cosicchè per le (19) l'equazione diventa

$$\left(p\frac{c_1}{r_1} + q\frac{c_2}{r_2}\right) \times (pc_1 + qc_2) = 1,$$

ossia

$$\frac{p^2}{r_1} + \frac{q^2}{r_2} = 1.$$

Sarà una ellisse o una iperbole secondo che r_1 e r_2 sono d'ugual segno o di segno opposto, ossia secondo che la curvatura totale è positiva o negativa. I punti dove essa è positiva si dicono *ellittici*, dove è negativa *iperbolici*. Cotesta conica è detta *l'indicatrice di Dupin*.

Sia t una direzione in P tangente alla superficie. Il piano in P passante per t e n è un piano normale che taglia la (S) secondo una curva, detta *sezione normale*. Essendo proprio n la sua normale principale (salvo il senso), avremo per una formula di Frenet:

$$\pm\frac{1}{\rho} = \frac{dt}{ds} \times n = -\frac{dn}{ds} \times t = -\frac{dn}{dP} t \times t,$$

---

perciò derivando la prima rispetto a u, la seconda rispetto a v e sottraendole, risulta che quella espressione è anche uguale a

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial a}{\partial u} \times n \wedge a\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial a}{\partial v} \times n \wedge a\right);$$

la quale dimostra ancor meglio l'affermazione del testo, e permette facilmente lo sviluppo in coordinate quando occorra. (Burali-Forti, " Fondamenti di geom. diff... „ Rend. Cir. Mat., Palermo, T. 33).

ossia

$$\mp \frac{1}{\rho} = \sigma t \times t.$$

Cosicchè, posto $t = \cos\alpha \cdot c_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot c_2$, risulta per le (19)

$$\mp \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{r_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{r_2}. \tag{26}$$

Questa *formula d'* EULERO dà la curvatura in P di tutte le sezioni normali, e fa vedere che *r_1 e r_2 sono i raggi di curvatura delle sezioni normali principali* (quelle tangenti alle direzioni principali).

Siccome, per cose note, un semidiametro della conica inclinato dell'angolo α sulla direzione c_1 ha una lunghezza R data da

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\alpha}{r_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{r_2}, \tag{27}$$

così dal paragone con la precedente risulta che il *quadrato d'ogni semidiametro di cotesta conica è uguale al raggio di curvatura della sezione normale tangente alla direzione di quel semidiametro.*

Se $r_1 = r_2$ la conica diventa un circolo e tutti i raggi R sono uguali. Il punto P è detto allora un *ombelico.* Così in un ellissoide di rotazione i due vertici sono ombelichi; la sfera ha tutti i punti ombelichi.

9. Direzioni coniugate e asintotiche. — Teorema di Enneper.

Le direzioni degli spostamenti dP e δP in P si dicono *coniugate* se verificano la condizione

$$dP \times \sigma(\delta P) = \delta P \times \sigma(dP) = 0.$$

Posto $dP = h(pc_1 + qc_2)$, $\delta P = h(p_1 c_1 + q_1 c_2)$ (h infinitesimo), si trae

$$\frac{pp_1}{r_1} + \frac{qq_1}{r_2} = 0,$$

la quale esprime che *ogni coppia di direzioni coniugate uscenti da P coincide con una coppia di diametri coniugati della conica indicatrice.* Di qui la loro denominazione [1].

Le direzioni dP *autoconiugate* sono quelle che soddisfano alla condizione

$$\sigma(dP) \times dP = 0,$$

equivalente, per le posizioni precedenti, a

$$\frac{p^2}{r_1} + \frac{q^2}{r_2} = 0.$$

Sono dunque le due direzioni degli asintoti della indicatrice; e perciò *esistono soltanto nei punti iperbolici.* Sono chiamate le *direzioni asintotiche.*

Dalla formula d' EULERO risulta che le corrispondenti sezioni normali hanno curvatura nulla; presentano cioè in P *punti di flesso.* Queste direzioni dividono l' intorno di P in quattro settori; la concavità di ciascuno di essi trovasi alternativamente ora da una parte, ora dall' altra rispetto alla direzione di n. Nei punti ellittici invece tutta la superficie nell' intorno di P giace dalla stessa parte del piano tangente.

Partendo da P e seguendo con continuità sulla (S) sempre una delle due direzioni asintotiche, si ottiene una linea detta *asintotica. C' è dunque una doppia famiglia di asintotiche sopra una superficie* (*o una regione di superficie*) *a punti iperbolici.*

La loro equazione differenziale è manifestamente

$$\sigma(dP) \times dP = 0. \tag{28}$$

Consideriamo infine i piani tangenti in P e $P + dP$, le cui equazioni sono

$$(P - Q) \times n = 0 \quad (P + dP - Q) \times (n + \sigma(dP)) = 0.$$

---

[1] Manifestamente le direzioni principali sono le sole direzioni coniugate e ortogonali.

Si deduce, a meno d'infinitesimi del 2° ordine,

$$(P - Q) \times \sigma(dP) = 0.$$

Dunque l'intersezione PQ dei detti piani tangenti è coniugata alla direzione di dP. Ne consegue: *tracciata su* (S) *una curva* (L), *e considerata la sviluppabile circoscritta a* (S) *lungo* (L) (*inviluppo dei piani tangenti*)*; in ogni punto di* (L) *la direzione della tangente e la generatrice della sviluppabile sono coniugate.* E quindi anche: *la sviluppabile circoscritta ad* (S) *lungo una linea asintotica ha per spigolo di regresso l'asintotica stessa.* E allora manifestamente *i piani osculatori delle asintotiche coincidono coi piani tangenti alla superficie.* Può assumersi come proprietà caratteristica di queste linee.

In base a ciò, essendo n la binormale in P a una linea asintotica, se diciamo t_1 la sua tangente, n_1 la normale principale, τ_1 la torsione, per la formula di Frenet avremo

$$\pm \frac{dn}{ds} = \frac{n_1}{\tau_1} \quad \text{ossia} \quad \pm \sigma t_1 = \frac{n_1}{\tau_1},$$

da cui

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \sigma t_1 \times \sigma t_1 = \sigma t_1 \times \sigma(n_1 \wedge n).$$

Ma per una nota formula ([1]) si ha

$$\sigma(n_1 \wedge n) = I_1 \sigma \cdot t_1 + n \wedge \sigma n_1;$$

per cui sostituendo ed osservando che è $\sigma t_1 \times t_1 = 0$ (direzione asintotica) si trova

$$(29) \qquad \frac{1}{\tau_1^2} = \sigma t_1 \times n \wedge \sigma n_1 = - \sigma t_1 \wedge \sigma n_1 \times n.$$

([1]) La formula è:

$$\sigma(u \wedge v) = I_1 \sigma \cdot u \wedge v - u \wedge \sigma v + v \wedge \sigma u \qquad (\sigma \text{ dilat.})$$

A. V. G., Vol. I, pag. 68.

Il secondo membro è la curvatura totale cambiata di segno. Si ha dunque il seguente *teorema di* ENNEPER: *Il quadrato della torsione delle asintotiche è uguale in ogni punto alla curvatura totale della superficie cambiata di segno* [1].

10. Teoremi di Darboux; formule di Lelieuvre.

Siano $a(u, v)$, $b(u, v)$ due direzioni coniugate in ogni punto $P(u, v)$ di (S); sarà

$$\sigma a \times b = \frac{dn}{dP} a \times b = 0.$$

Ma da grad $(n \times a) = 0$ si trae

$$\frac{dn}{dP} a = -\mathrm{K} \frac{da}{dP} n,$$

epperò la precedente diventa

$$\mathrm{K} \frac{da}{dP} n \times b = \frac{da}{dP} b \times n = 0,$$

che esprime essere $\dfrac{da}{dP} b$ vettore tangenziale. Avremo allora

$$\frac{da}{dP} b = la + mb.$$

Posto $dP = padu + qbdv$, si ha

$$\frac{\partial P}{\partial u} = pa, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = qb, \quad \frac{da}{dP} b = \frac{1}{q} \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial u}\right);$$

epperò la precedente acquista la forma

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = l_1 \frac{\partial P}{\partial u} + m_1 \frac{\partial P}{\partial v}. \tag{30}$$

---

[1] Vedi la fine del numero seguente.

Si conclude: *se le linee* $u = \text{cost}$ *e* $v = \text{cost}$ *formano un sistema coniugato,* $P(u,v)$ *soddisfa all'equazione* (30); *e viceversa (come è manifesto), se* $P(u, v)$ *soddisfa a una equazione differenziale di questo tipo, le linee* $u = \text{cost}$ *e* $v = \text{cost}$ *sono coniugate sulla superficie.* È un teorema indicato da DARBOUX.

In virtù delle cose dette, esso può acquistare anche questa forma geometrica: *se* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *sono in ogni punto di* (S) *direzioni coniugate,* $\frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\boldsymbol{b}$ *e* $\frac{d\boldsymbol{b}}{dP}\boldsymbol{a}$ *sono vettori tangenziali; e viceversa, se questi sono vettori tangenziali,* $\boldsymbol{a}(u, v)$ *e* $\boldsymbol{b}(u, v)$ *sono in ogni punto direzioni coniugate.*

Se si moltiplica scalarmente la (30) per $P - O$ (O punto fisso), si ottiene la stessa equazione in $(P - O)^2$, purchè sia

$$\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0.$$

Dunque *se le direzioni* $\boldsymbol{a}(u, v)$ *e* $\boldsymbol{b}(u, v)$ *sono le direzioni principali, anche* $(P - O)^2$ *soddisfa la* (30); *e viceversa.*

Supponiamo ora che $\boldsymbol{a}(u, v)$ e $\boldsymbol{b}(u, v)$ siano le direzioni asintotiche. Si ha

$$\sigma \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0 \qquad \sigma \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 0,$$

e quindi come precedentemente

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{dP}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n} = 0.$$

Allora $\frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\boldsymbol{a}$, $\frac{d\boldsymbol{b}}{dP}\boldsymbol{b}$ *sono vettori tangenziali. E viceversa, se questi sono vettori tangenziali, le direzioni* $\boldsymbol{a}(u, v)$ *e* $\boldsymbol{b}(u, v)$ *sono in ogni punto le direzioni asintotiche.*

Scrivendo

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\boldsymbol{a} = l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{dP}\boldsymbol{b} = l_1\boldsymbol{a} + m_1\boldsymbol{b}$$

e ragionando come di sopra, si ottengono l'equazioni:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = h\frac{\partial P}{\partial u} + k\frac{\partial P}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = h_1\frac{\partial P}{\partial u} + k_1\frac{\partial P}{\partial v}.$$

Per conseguenza, *se* $u = \text{cost}$ *e* $v = \text{cost}$ *sono le asintotiche, $P(u, v)$ soddisfa a questo sistema, e se $P(u, v)$ soddisfa a un sistema di questo tipo, le* $u = \text{cost}$ *e* $v = \text{cost}$ *sono le asintotiche sulla* (S). È la forma analitica del teorema precedente.

A quest' ultimo teorema si può dare altra forma dovuta a Lelieuvre.

Siano ancora $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ le direzioni asintotiche. Si ha

$$\sigma\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0, \quad \sigma\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 0$$
$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} = 0,$$

da cui

$$\boldsymbol{a} = h_1\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = h_2\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{b}.$$

Essendo $\boldsymbol{a} \times \sigma\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \sigma\boldsymbol{a}$, ne consegue

$$h_1\boldsymbol{n} \times \sigma\boldsymbol{a} \wedge \sigma\boldsymbol{b} = h_2\boldsymbol{n} \times \sigma\boldsymbol{b} \wedge \sigma\boldsymbol{a}$$

e quindi

$$h_1 = -h_2 = h\,.$$

E allora, moltiplicando le due formule vettorialmente membro a membro, si ottiene

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -h^2(\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{b}) = h^2(\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{b} \times \sigma\boldsymbol{a})\boldsymbol{n},$$

da cui

$$-\frac{1}{h^2} = \frac{\sigma\boldsymbol{a} \wedge \sigma\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}},$$

che è la curvatura totale. Dopo ciò risulta

$$\boldsymbol{a} = h\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = -h\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{b}. \tag{31}$$

Se ora si pone $\sqrt{h}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{w}$, e si nota che

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dP}\boldsymbol{a} = \sqrt{h}\sigma\boldsymbol{a} + \frac{d\sqrt{h}}{dP}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{w} \wedge \frac{d\boldsymbol{w}}{dP}\boldsymbol{a} = h\,\boldsymbol{n} \wedge \sigma\boldsymbol{a}$$

e analoga per $\boldsymbol{b}$, risulta

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w} \wedge \frac{d\boldsymbol{w}}{dP}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{w} \wedge \frac{d\boldsymbol{w}}{dP}\boldsymbol{b}.$$

Od anche, scrivendo

$$P'_u = \sqrt{E}a \quad P'_v = \sqrt{G}b\,,$$

si ha

$$(31') \qquad P'_u = w \wedge \frac{\partial w}{\partial u} \quad P'_v = -w \wedge \frac{\partial w}{\partial v}\,,$$

che sono le *formule dovute a Lelieuvre.*

La condizione d'integrabilità è

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(w \wedge \frac{\partial w}{\partial v}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(w \wedge \frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

che sviluppata diventa

$$w \wedge \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0\,,$$

equivalente a

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = mw\,.$$

Si ricava poi dalla posizione fatta $w^2 = h$; cosicchè sarà

$$m = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial^2 \sqrt{h}}{\partial u \partial v}\,.$$

Ne segue che *nelle formule di Lelieuvre w è soluzione dell' equazione* (32). E inversamente: *se w è soluzione d'una equazione del tipo* (32), *le formule di Lelieuvre definiscono una superficie, della quale le linee u e v sono asintotiche e $-1/w^2$ la curvatura totale*; giacchè, risultando soddisfatta la condizione d'integrabilità suddetta, valgono le (31') e quindi le (31).

Questi teoremi sono utili, perchè facendo opportuna scelta di equazioni del tipo (30) o (32), si possono senz'altro ottenere delle superficie sulle quali risultan noti o un sistema coniugato, o le asintotiche.

Notiamo infine che con le formule (31) si può completare il teorema di Enneper. Per quanto si è detto al numero precedente risulta $\sigma a = \pm \frac{n_1}{\tau_1}$ (a in luogo di t_1) e $n \wedge n_1 = a$; e parimenti, *mutatis mutandis*, per la direzione b. Cosicchè le (31) vengono in sostanza ad esprimere il teorema: ***le torsioni delle due asintotiche in ogni punto P sono uguali e di segno opposto; il loro quadrato uguaglia la curvatura totale cambiata di segno.***

Di qui si vede che il teorema di Enneper-Beltrami e le formule di Lelieuvre sono in fondo equivalenti.

11. Ancora della rappresentazione sferica.

Facciamo infine alcune considerazioni sulla *rappresentazione sferica* di queste direzioni. Abbiamo veduto che cotesta rappresentazione è definita da

$$dM = dn = \sigma dP,$$

essendo M il punto della sfera corrispondente a P di (S), e che alle due direzioni principali corrispondono direzioni parallele a quelle, epperò anch' esse *ortogonali.* Ora dalla proprietà delle direzioni asintotiche

$$\sigma dP \times dP = dM \times dP = 0,$$

segue che nella rappresentazione sferica esse vengono girate di 90°. Inoltre per due direzioni coniugate (quelle di dP e δP) essendo

$$\sigma dP \times \delta P = dM \times \delta P = 0, \quad \sigma\delta P \times dP = \delta M \times dP = 0$$

si vede che le due direzioni corrispondenti dM e δM sono perpendicolari alle due primitive, scambiato l'ordine; cosicchè il loro angolo sarà uguale o supplementare a quello di dP e δP (proprietà che contiene come caso particolare le precedenti).

12. Formule fondamentali per le superficie, analoghe a quelle di Frenet per le curve.

Indichiamo con ρ_1 e ρ_2 i raggi di flessione in P delle due linee di curvatura di (S) passanti per P, con n_1 e n_2

le loro normali principali. Sia poi (L) una linea qualunque uscente da P e tracciata sulla (S); $\boldsymbol{t}$ il vettore unitario tangente a (L) in P, $\boldsymbol{h}$ normale a $\boldsymbol{t}$ e nel piano tangente (precisamente $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{t}$), $\frac{1}{\rho}$ la sua flessione, $\boldsymbol{k}$ la sua normale principale. Allora diremo *curvatura tangenziale* [1] di (L) in P la proiezione ortogonale sul piano tangente di $1/\rho$. Sarà indicata con $1/g$, onde avremo

$$(33) \qquad \frac{1}{g} = \frac{\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{k}}{\rho}.$$

Orbene, calcoliamo questa curvatura tangenziale per le due linee di curvatura in P (le cui direzioni sono $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_2$). Si ha

$$\frac{1}{g_1} = \frac{\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{n}_1}{\rho}, \quad \frac{1}{g_2} = -\frac{\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{n}_2}{\rho}.$$

Ma le formule di Frenet dànno

$$\frac{\boldsymbol{n}_1}{\rho_1} = \frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1, \quad \frac{\boldsymbol{n}_2}{\rho_2} = \frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2;$$

cosicchè risulta (tenuto anche conto di $\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2 = 0$)

$$(o) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{g_1} &= \boldsymbol{c}_2 \times \frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1 = -\boldsymbol{c}_1 \times \frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_1 \\ \frac{1}{g_2} &= -\boldsymbol{c}_1 \times \frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_2 \times \frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_2. \end{aligned}$$

Ciò posto, osserviamo che da $\boldsymbol{c}_1^2 = 1$, $\boldsymbol{c}_2^2 = 1$, $\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2 = 0$ segue

$$\boldsymbol{c}_1 \times \frac{d\boldsymbol{c}_1}{dP}\boldsymbol{c}_1 = 0, \quad \boldsymbol{c}_2 \times \frac{d\boldsymbol{c}_2}{dP}\boldsymbol{c}_2 = 0 \text{ ecc.};$$

[1] Si chiama anche *curvatura geodetica* per una ragione che vedremo poi.

talchè si può porre

$$\frac{dc_1}{dP}c_1 = ac_2 + bn, \quad \frac{dc_2}{dP}c_1 = mc_1 + ln$$

$$\frac{dc_1}{dP}c_2 = a_1c_2 + b_1n, \quad \frac{dc_2}{dP}c_2 = m_1c_1 + l_1n.$$

Moltiplicandole scalarmente per n e osservando che è

$$n \times \frac{dc_1}{dP}c_1 = -\frac{dn}{dP}c_1 \times c_1 = -\sigma c_1 \times c_1 = -\frac{1}{r_1}$$

$$n \times \frac{dc_1}{dP}c_2 = -\frac{dn}{dP}c_2 \times c_1 = \sigma c_2 \times c_1 = 0 \ldots\ \text{ecc.},$$

si trovano le uguaglianze

$$b = -\frac{1}{r_1}\ b_1 = 0, \quad l = 0, \quad l_1 = -\frac{1}{r_2}.$$

Inoltre, moltiplicando scalarmente le formule di destra per c_1, quelle di sinistra per c_2, si ricava per le (o)

$$-m_1 = a_1 = \frac{1}{g_2}, \quad m = -\frac{1}{g_1} = -a.$$

Si hanno dunque le seguenti *formule fondamentali* che si cercavano:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dc_1}{dP}c_1 = \dfrac{1}{g_1}c_2 - \dfrac{1}{r_1}n, & \dfrac{dc_1}{dP}c_2 = \dfrac{1}{g_2}c_2 \\[2ex] \dfrac{dc_2}{dP}c_1 = -\dfrac{1}{g_1}c_1, & \dfrac{dc_2}{dP}c_2 = -\dfrac{1}{g_2}c_1 - \dfrac{1}{r_2}n, \end{array} \right.$$

alle quali si possono aggiungere le altre due già note

$$\text{(I')} \quad \frac{dn}{dP}c_1 = \frac{1}{r_1}c_1, \quad \frac{dn}{dP}c_2 = \frac{1}{r_2}c_2.$$

Se introduciamo l'omografia degenere γ definita dalla matrice

$$\gamma \equiv \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dfrac{1}{r_1} & \dfrac{1}{g_1} \\[2ex] -\dfrac{1}{r_2} & 0 & \dfrac{1}{g_2} \\[2ex] 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

si ha

$$\gamma c_1 = \frac{c_2}{r_1} + \frac{n}{g_1}, \quad \gamma c_2 = -\frac{c_1}{r_2} + \frac{n}{g_2},$$

e allora le precedenti assumono la forma notevole

$$(\mathrm{I}') \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dc_1}{dP} c_1 = \gamma c_1 \wedge c_1 & \dfrac{dc_1}{dP} c_2 = \gamma c_2 \wedge c_1 \\ \dfrac{dc_2}{dP} c_1 = \gamma c_1 \wedge c_2 & \dfrac{dc_2}{dP} c_2 = \gamma c_2 \wedge c_2 \\ \dfrac{dn}{dP} c_1 = \gamma c_1 \wedge n & \dfrac{dn}{dP} c_2 = \gamma c_2 \wedge n \, . \end{array} \right.$$

Osserviamo che se $t = ac_1 + bc_2$ è una direzione qualunque tangenziale, si deduce dalle (I′)

$$\frac{dc_1}{dP} t = \frac{dc_1}{dP}(ac_1 + bc_2) = a \cdot \gamma c_1 \wedge c_1 + b \cdot \gamma c_2 \wedge c_1 =$$
$$= - c_1 \wedge (a \cdot \gamma c_1 + b \cdot \gamma c_2)$$

e quindi

$$\frac{dc_1}{dP} t = \gamma t \wedge c_1 \, ,$$

con le analoghe

$$\frac{dc_2}{dP} t = \gamma t \wedge c_2, \quad \frac{dn}{dP} t = \gamma t \wedge n .$$

Il vettore γt ha un significato cinematico importante.

Passiamo dal punto P al punto vicinissimo

$$P + dP = P + t ds,$$

portando la terna principale in P a coincidere con quella in $P + dP$. Se

$$M = P + xc_1 + yc_2 + zn$$

è un punto qualunque rigidamente collegato con la terna indicata (x, y e z costanti), si ha manifestamente derivando

$$\frac{dM}{dP} t = t + x \frac{dc_1}{dP} t + y \frac{dc_2}{dP} t + z \frac{dn}{dP} t \, ,$$

ossia per le precedenti (moltiplicando per ds)

$$dM = tds + \gamma t \wedge (M - P)ds.$$

Questo dimostra che γtds *è il vettore che definisce la rotazione occorrente per rendere la terna principale in* P *parallela a quella in* $P + tds$. Daremo a γt il nome di *vettore cinetico relativo alla direzione* t.

Posto $a = \cos\alpha$, $b = \operatorname{sen}\alpha$ (α è l'angolo di t con c_1), si ricava per le precedenti

$$(34) \qquad \gamma t = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{r_1} c_1 + \frac{\cos\alpha}{r_2} c_2 + \left(\frac{\cos\alpha}{g_1} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{g_2}\right) n.$$

Si noti che mentre l'invariante primo di γ è nullo, *l'invariante secondo è uguale alla curvatura totale.*

13. Formule di Codazzi e di Gauss.

Pensiamo tracciate le linee di curvatura su (S), e siano u e v i parametri indipendenti che variano rispettivamente lungo coteste linee, le cui tangenti sono state indicate con c_1 e c_2. Sia inoltre $\sqrt{E}du$ la lunghezza dell'arco infinitesimo uscente da P nella direzione c_1 ($dP = \sqrt{E}du c_1$), e $\sqrt{G}dv$ la lunghezza dell'arco nella direzione c_2 ($dP = \sqrt{G}dv c_2$). Allora si ha

$$\frac{dc_1}{dP} c_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial c_1}{\partial u}, \quad \frac{dc_1}{dP} c_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial c_1}{\partial v} \quad \text{ecc.}$$

cosicchè le (I) diventano

$$(\mathrm{I}'') \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial c_1}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{g_1} c_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{r_1} n & \dfrac{\partial c_1}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{g_2} c_2 \\[2ex] \dfrac{\partial c_2}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{E}}{g_1} c_2 & \dfrac{\partial c_2}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{G}}{g_2} c_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{r_2} n \\[2ex] \dfrac{\partial n}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_1} c & \dfrac{\partial n}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_2} c_2. \end{array}$$

Sviluppando ora le condizioni d' integrabilità

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial v \partial u}, \quad \text{ecc.}$$

si trovano le tre relazioni

$$\frac{\sqrt{EG}}{g_1 r_2}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_1}\right)=0,\quad \frac{\sqrt{EG}}{g_2 r_1}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_2}\right)=0,$$

$$\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{g_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{g_2}\right).$$

Ora notiamo che per le posizioni fatte si ha

$$\frac{\partial P}{du}=\sqrt{E}c_1 \quad \frac{\partial P}{\partial v}=\sqrt{G}c_2\,;$$

cosicchè risulta

$$\sqrt{E}\,\frac{\partial c_1}{\partial v}+c_1\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\sqrt{G}\frac{\partial c_2}{\partial u}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}c_2\,;$$

dalla quale si deduce

$$(35)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial c_1}{\partial v}\times c_2=\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial c_2}{\partial u}\times c_1=\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$

che sono rispettivamente i valori di $\frac{1}{g_2}$ e di $-\frac{1}{g_1}$ (n. 12).

E allora le condizioni precedenti, sviluppate, prendono la forma

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{r_1}}{dP}c_2+\dfrac{1}{g_1}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)=0 \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{r_2}}{dP}c_1+\dfrac{1}{g_2}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)=0 \qquad \left(\dfrac{d\varphi}{dP}c_2=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v},\ \text{ecc.}\right) \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{g_1}}{dP}c_2-\dfrac{d\frac{1}{g_2}}{dP}c_1-\left(\dfrac{1}{g_1}\right)^2-\left(\dfrac{1}{g_2}\right)^2=\dfrac{1}{r_1 r_2}. \end{cases}$$

Quest' ultima, sotto altra forma, non è altro che la formula di GAUSS per la curvatura totale trovata al n. 7 (forma che fu data da LIOUVILLE). Le altre sono una notevole forma dell'equazioni dette di Mainardi-Codazzi. Si conclude pertanto che *le* (I) *soddisfano alle condizioni d'integrabilità quando le quattro funzioni* r_1, r_2, g_1, g_2 *verificano le tre equazioni* (II); epperò, se queste funzioni, col significato loro attribuito, appartengono veramente a una superficie, esse verificano le (II). E invece di g_1 e g_2 si può parlare di $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ in base alle (35), che esprimono le prime mediante le seconde.

Inversamente: sian date quattro funzioni r_1, r_2, $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ di due parametri u e v soddisfacenti alle (II) (g_1 e g_2 risultando determinate dalle (35)). Allora le (I″), equivalenti alle (I), sono integrabili, e la teoria di quei sistemi differenziali assicura l'esistenza d'una sola soluzione $c_1(u, v)$, $c_2(u, v)$, $n(u, v)$, ossia d'una terna unitaria ortogonale che per una coppia $(u_0 v_0)$ dei valori dei parametri coincide con una terna prefissata. Nota la quale, da

$$dP = \sqrt{E} c_1 du + \sqrt{G} c_2 dv$$

si deduce per quadratura la superficie, sulla quale $(c_1 c_2\, n)$ è il triedro principale. Abbiamo dunque il seguente teorema, analogo a quello delle curve: *Dati i coefficienti* $\sqrt{E}$ *e* $\sqrt{G}$ *del* dP *e i due raggi di curvatura* r_1 *e* r_2 *soddisfacenti alle* (II′), *resta definita intrinsecamente la superficie (a meno cioè della sua posizione nello spazio). Le linee* $u = \text{cost}$ *e* $v = \text{cost}$ *sono le sue linee di curvatura.*

Questo teorema si può anche dimostrare in maniera, diciamo, cinematica, come si è fatto nel caso analogo delle curve, ricorrendo alla considerazione del vettore cinetico (34).

Se sono date le due forme quadratiche

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$
$$-\sigma dP \times dP = Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2,$$

delle quali la prima positiva; per quanto si è detto nelle pagine precedenti, risultano determinate in funzione di quei sei coefficienti le grandezze $g_1 g_2 r_1 r_2$ e le direzioni c_1 e c_2, epperciò anche le (II); cosicchè ordinariamente si dice che se cotesti 6 coefficienti soddisfano alle (II), resta definita intrinsecamente una superficie il cui elemento lineare è dato dalla prima forma quadratica e la cui omografia σ risulta poi dalla seconda; ed è perciò che coteste forme sono dette le *forme fondamentali* nell'ordinario modo di esposizione di questa teoria.

14. Teorema di Joachimstal.

Siano (S) e (S_1) due superficie che si tagliano lungo la linea (L), e sia questa linea di curvatura per ambedue. Siano inoltre a la tangente in P a (L), n e n_1 le normali unitarie a (S) e (S_1).

Si avrà (n. 5)

$$\frac{dn}{dP}a = \frac{1}{r}a, \quad \frac{dn_1}{dP}a = \frac{1}{\rho}a,$$

da cui

$$\frac{dn}{dP}a \times n_1 = 0, \quad \frac{dn_1}{dP}a \times n = 0\,.$$

In virtù di queste risulta

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(n \times n_1) \times a &= \mathrm{K}\frac{dn}{dP}n_1 \times a + \mathrm{K}\frac{dn_1}{dP}n \times a \\ &= \frac{dn}{dP}a \times n_1 + \frac{dn_1}{dP}a \times n = 0,\end{aligned}$$

e quindi, posto $n \times n_1 = \cos\theta$,

$$\operatorname{grad}\theta \times a = 0, \quad \text{ossia} \quad d\theta = 0\,;$$

la quale dimostra che *l'angolo* θ *è costante lungo* (L).

E viceversa; si vede che *se* θ *è costante e* (L) *è linea di curvatura per* (S), *essa è anche linea di curvatura per* (S_1).

Da $n \wedge n_1 = a \operatorname{sen}\theta$, osservando che

$$\frac{d(n \wedge n_1)}{dP}a = n \wedge \frac{dn_1}{dP}a - n_1 \wedge \frac{dn}{dP}a =$$

$$= \frac{n \wedge a}{\rho} - \frac{n_1 \wedge a}{r} = \frac{b}{\rho} - \frac{b_1}{r},$$

si deduce

$$\frac{b}{\rho} - \frac{b_1}{r} = \operatorname{sen}\theta \frac{da}{dP} a .$$

Ma

$$b_1 = \cos\theta \cdot b + \operatorname{sen}\theta \cdot n \quad \text{e} \quad \frac{da}{dP} a = \frac{1}{g_1} b - \frac{1}{r} n ,$$

giacchè a è direzione principale su (S); perciò sostituendo si trova

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\theta}{r} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{g_1} ;$$

relazione notevole che dà *la curvatura di* (L) *appartenente a* (S_1) *in funzione della flessione e della curvatura tangenziale di* (L) *appartenente a* (S). Se le superficie si tagliano ad angolo retto risulta $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{g_1}$ [1].

15. Evoluta di una superficie.

Il luogo dei centri di curvatura F' e F'' è una superficie a due falde (S') e (S'') detta l'*evoluta di* (S). Essa è anche il luogo degli spigoli di regresso delle due famiglie di sviluppabili in cui si distribuiscono le normali di (S).

Consideriamo la falda (S') luogo dei punti

$$F' = P - r_1 n .$$

Si ha differenziando

$$dF' = [1 - r_1\sigma - \mathrm{H}(\operatorname{grad}_s r_1 , n)] dP ;$$

perciò agli spostamenti principali $ds_1 c_1$ e $ds_2 c_2$ su (S) corrispondono sopra (S') gli spostamenti

$$\begin{aligned} (dF')_1 &= -(\operatorname{grad}_s r_1 \times c_1) n\, ds_1 \\ (dF')_2 &= \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) c_2 ds_2 - (\operatorname{grad}_s r_1 \times c_2) n\, ds_2 \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma c_1 &= \frac{c_1}{r_1} \\ \sigma c_2 &= \frac{c_2}{r_2} \end{aligned} \right. .$$

---

[1] Vedi Cap. VII sui sistemi tripli ortogonali.

Di qui si trae per la normale n_1 a (S') in F'

$$n_1 = \frac{(dF')_2 \wedge (dF')_1}{\operatorname{mod}[(dF')_2 \wedge (dF')_1]} = \pm c_1 .$$

Essa dunque è diretta come la direzione principale c_1.
Calcoliamo l' espressione:

$$B' = \frac{dn_1}{dF'}(dF')_2 \times (dF')_1 = \frac{dc_1}{dF'}(dF')_2 \times (dF')_1 .$$

Notando che

$$\frac{dc_1}{dP} c_2 ds_2 = \frac{dc_1}{dF'}\frac{dF'}{dP} c_2 ds_2 = \frac{dc_1}{dF'}(dF')_2$$

si trova subito

$$B' \equiv \frac{dc_1}{dP} c_2 \times n = 0 ,$$

in virtù delle (I). Orbene, $B' = 0$ è la *condizione di coniugio* su (S') delle due direzioni di $(dF')_1$ e $(dF')_2$, e siccome un ragionamento analogo si ripete per l'altra falda (S''), ne consegue il teorema:

Sulle due falde della evoluta le linee corrispondenti alle linee di curvatura della evolvente (S) *formano un sistema coniugato* [1].

Si vede poi subito che *gli spigoli di regresso sono geodetiche della evoluta.* E invero, se (L_1) è una linea di curvatura di (S), e (R') il corrispondente spigolo di regresso su (S'), la tangente in P a (L_1) è, per le cose dette, parallela alla normale principale della (R') in F'.

Si può anche fare il calcolo della curvatura totale di (S') con la solita formula

$$K_1 = \frac{\frac{dc_1}{dF'}(dF')_1 \wedge \frac{dc_1}{dF'}(dF')_2 \times c_1}{(dF')_1 \wedge (dF')_2 \times c_1} \qquad (n_1 = c_1).$$

---

[1] Questo teorema, del resto, risulta anche subito per via geometrica.

In virtù delle precedenti relazioni risulta

$$K_1 = \frac{\frac{dc_1}{dP} c_1 \wedge \frac{dc_2}{dP} c_2 \times c_1}{\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)(\mathrm{grad}_s\, r_1 \times c_1)},$$

e per le formule fondamentali (I):

$$K_1 = \frac{\frac{1}{r_1 g_2}}{\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{dr_1}{dP} c_1}.$$

Un' altra forma si ottiene ricavando $1/g_2$ dalle formule (II) di Codazzi e sostituendo. Si trova

$$K_1 = - \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \frac{\frac{dr_2}{dP} c_1}{\frac{dr_1}{dP} c_1}.$$

In modo analogo si ha per l' altra falda

$$K_2 = - \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \frac{\frac{dr_1}{dP} c_2}{\frac{dr_2}{dP} c_2}.$$

16. Superficie *W*.

Come si è calcolata l' espressione B' nel numero precedente, allo stesso modo si calcolano l' espressioni

$$A' = \frac{dn_1}{dF'} (dF')_1 \times (dF')_1 \qquad C' = \frac{dn_1}{dF'} dF')_2 \times (dF')_2 .$$

Si trova

$$A' = \frac{dc_1}{dP} c_1 ds_1 \times (dF')_1 = \frac{1}{r_1} (\mathrm{grad}_s\, r_1 \times c_1)\, ds_1^2 = \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dP} c_1 ds_1^2$$

$$C' = \frac{dc_1}{dP} c_2 ds_2 \times (dF')_2 = \frac{1}{g_2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) ds_2^2.$$

Per la seconda falda (S'') si avrà manifestamente, *mutatis mutandis*,

$$A'' = -\frac{1}{g_1}\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) ds_1^2, \quad B'' = 0, \quad C'' = \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{dP} c_2 ds_2^2.$$

E si noti che, in virtù delle formule (II) di Codazzi, l'espressione di C' e A'' diventano rispettivamente proporzionali a

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dP} c_2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r_1}\frac{dr_2}{dP} c_1 .$$

Ora è da osservare che in base a questi calcoli l'equazioni differenziali delle asintotiche sulle due falde (S') e (S'') sono in coordinate

$$\frac{du_1}{dF'} dF' \times dF' \equiv A'du^2 + C'dv^2 = 0, \quad A''du^2 + C''dv^2 = 0;$$

epperò affinchè queste linee si corrispondano nei punti F' F'' occorre che risulti $A' : A'' = C' : C''$; ossia, secondo le espressioni trovate,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial u} & \dfrac{\partial r_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial u} & \dfrac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \qquad \left(\frac{dr_1}{dP} c_1 \equiv \frac{\partial r_1}{\partial u} \text{ecc.}\right).$$

la quale esprime che r_1 e r_2 devono essere legate da una relazione.

Le superficie (S) che godono di questa proprietà si chiamano *superficie W*; cosicchè sussiste il seguente teorema di Ribaucour: ***Affinchè sulle due falde della evoluta si corrispondano le linee asintotiche è necessario e basta che la superficie evolvente sia una superficie W.***

Tenendo conto di quella relazione, le precedenti espressioni della curvatura diventano

$$K_1 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\frac{dr_2}{dr_1}, \quad K_2 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\frac{dr_1}{dr_2},$$

da cui

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^4}.$$

Capitolo III.

Linee Geodetiche.

1. Curvatura tangenziale e geodetiche.

Tornando alla nozione di curvatura tangenziale, e indicando con $\boldsymbol{t}$ la direzione in P della linea (L) tracciata su (S), con ρ la sua flessione, si ha per la definizione data (n. 12, Cap. II)

$$\frac{1}{g} = \frac{\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{t}_1}{\rho} \qquad (\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n})$$

essendo $\boldsymbol{n}_1$ la normale principale. Allora per le formule di Frenet [1] si ha

$$\frac{1}{g} = \frac{d\boldsymbol{t}}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1 = -\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t} = -\mathrm{I}_1 \frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP},$$

e quindi

$$\frac{1}{g} = -\operatorname{div}_S \boldsymbol{t}_1\,, \tag{1}$$

perchè

$$\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t}_1 = \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0 \ \text{[2]}.$$

---

[1] È anche per la relazione

$$\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{t}}{dP}\boldsymbol{t}_1 = -\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t}$$

dedotta da $\operatorname{grad}(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1) = 0$.

[2] Si noti che in questo caso si può anche scrivere $\operatorname{div} \boldsymbol{t}_1$ senza l'indice s, perchè $\boldsymbol{t}_1$ è vettore tangenziale, avendosi in base alla definizione di cotesto operatore superficiale

$$\operatorname{div}_S \boldsymbol{t}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{t}_1 - \frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = \operatorname{div} \boldsymbol{t}_1\,.$$

Se $\varphi(P)=0$ è l'equazione della curva (L), si ha manifestamente

$$\boldsymbol{t}_1=\frac{\operatorname{grad}_s \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad}_s \varphi},$$

prendendo $\boldsymbol{t}_1$ nel senso di $\operatorname{grad}_s \varphi$ e $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{t}_1$. Si ha così la *formula di* BONNET:

$$\frac{1}{g}=-\operatorname{div}_s\left(\frac{\operatorname{grad}_s \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad}_s \varphi}\right). \tag{2}$$

Se si conosce invece l'equazione differenziale $\boldsymbol{u}\times dP=0$ della curva (o delle curve), si avrà

$$\boldsymbol{t}_1=\pm\frac{\boldsymbol{u}}{\operatorname{mod} \boldsymbol{u}}.$$

La curvatura tangenziale è nulla per quelle curve lungo le quali è $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}$, ossia che hanno la normale principale coincidente in ogni punto con la normale alla superficie; e viceversa. Son dette *geodetiche.*

Per esse si ha dunque

$$\boldsymbol{n}_1\times\delta P\equiv\frac{d\boldsymbol{t}}{dP}\boldsymbol{t}\times\delta P=0$$

per ogni δP normale ad $\boldsymbol{n}$. Posto

$$\delta P=\frac{\partial P}{\partial u}\delta u+\frac{\partial P}{\partial v}\delta v=\boldsymbol{a}\delta u+\boldsymbol{b}\delta v$$

e indicando con s l'arco della geodetica, la condizione precedente si scinde nelle due seguenti:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\times\boldsymbol{a}=0,\quad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\times\boldsymbol{b}=0,$$

che si possono anche scrivere nella forma

$$\frac{d(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{a})}{ds}-\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{a}}{ds}=0,\quad \frac{d(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{b})}{ds}-\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=0.$$

Ma
$$t = \frac{dP}{ds} = a\frac{du}{ds} + b\frac{dv}{ds} = au' + bv';$$
cosicchè risultano le identità:
$$\frac{\partial t}{\partial u'} = a \quad \frac{\partial t}{\partial v'} = b,$$
$$\frac{da}{ds} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dP}{ds}\right) = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{db}{ds} = \frac{\partial t}{\partial v};$$
e perciò le precedenti diventano
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial t^2}{\partial u'}\right) - \frac{\partial t^2}{\partial u} = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial t^2}{\partial v'}\right) - \frac{\partial t^2}{\partial v} = 0, \tag{3}$$
ove
$$t^2 = (au' + bv')^2;$$
che sono *l'equazioni lagrangiane delle geodetiche* [1]. Naturalmente ammettono l'integrale $t^2 = c$, la qual costante è l'unità se s, come si è detto, misura l'arco della geodetica. È un sistema di due equazioni differenziali di 2° ordine in $u(s)$ e $v(s)$, lineari rispetto alle derivate seconde u'' e v''.

Un' altra forma può dedursi ponendo
$$t = \cos\alpha \cdot a + \operatorname{sen}\alpha \cdot n \wedge a,$$
con manifesto significato di α. Allora da
$$\cos\alpha = t \times a,$$
si trae derivando
$$-\operatorname{sen}\alpha \cdot d\alpha = \frac{dt}{ds}ds \times a + t \times da.$$

Ma il primo termine è nullo, perchè lungo la geodetica $\dfrac{dt}{ds}$ è diretto come n; e perciò, supposto $a^2 = 1$, si

---

[1] Si tenga ben presente che qui a e b non sono unitari.

ricava per la posizione fatta

$$-\operatorname{sen}\alpha \cdot d\alpha = t \times da = \operatorname{sen}\alpha \cdot n \wedge a \times da,$$

ossia

$$d\alpha = -n \wedge a \times da.$$

Nel caso contrario $a^2 \neq 1$, si ha manifestamente

$$(4) \qquad d\alpha = -n \wedge \frac{a}{\operatorname{mod} a} \times d\frac{a}{\operatorname{mod} a} = -\frac{n \wedge a \times da}{a^2}.$$

È la forma della *equazione delle geodetiche dovuta a* GAUSS [1].

2. Teoremi sulle geodetiche e loro traiettorie ortogonali. In base alla teoria dell'equazioni differenziali le (3) dimostrano che *una geodetica è individuata quando sia dato un suo punto P e la tangente t in quello.* Esistono perciò sopra una superficie una doppia infinità di linee geodetiche.

L'equazioni (3) sono quelle stesse che si ottengono cercando, seconde le regole del calcolo delle variazioni, le condizioni affinchè la variazione prima di

$$\int_A^B ds$$

sia nulla sotto l'ipotesi $t^2 = 1$, essendo A e B due punti sufficientemente vicini.

Ne segue che *la geodetica segna sulla superficie la minima distanza fra due suoi punti sufficientemente vicini.*

---

(1) Presi due punti vicinissimi P e P_1 d'una linea (L) di (S) e condotte per essi le geodetiche tangenti a (L) (sono pienamente definite come è detto nel n. 2 che segue); se ε è il piccolissimo angolo che fanno tra loro e s è l'arco PP_1, è facile mostrare in base alla (4) che il limite di ε/s quando P_1 tende a P è uguale alla curvatura tangenziale di (L) in P. Perciò questa curvatura dicesi anche *curvatura geodetica*. Si vede così l'analogia con la nozione di curvatura d'una curva tracciata sopra un piano.

In base alla definizione sono poi evidenti i due teoremi:

1) *ogni geodetica che sia linea di curvatura è necessariamente piana;*

2) *ogni geodetica piana o è una retta, o è linea di curvatura.*

Dalla (2) risulta anche: *le curve* $\varphi = \text{cost}$ *sono geodetiche solamente quando* φ *soddisfa alla condizione*

$$\operatorname{div}_s \left(\frac{\operatorname{grad}_s \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad}_s \varphi} \right) = 0 .$$

Sia $\varphi = \text{cost}$ una famiglia di geodetiche, l'equazione differenziale delle sue traiettorie ortogonali è

$$t \times dP = 0 ,$$

essendo t la tangente in un punto generico della geodetica. Affinchè il primo membro sia differenziale esatto occorre che risulti (n. 2, Cap. II)

$$\operatorname{div}_s (n \wedge t) = 0.$$

Ma nel caso presente, essendo

$$n \wedge t = t_1 = \frac{\operatorname{grad}_s \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad}_s \varphi},$$

per il teorema precedente tale condizione è soddisfatta.

Si conclude: *data una famiglia di geodetiche, le loro traiettorie ortogonali si determinano con una quadratura.*

Lo stesso dicasi manifestamente se è data l'equazione differenziale $u \times dP = 0$ della famiglia di geodetiche.

Consideriamo ora una famiglia di linee $\psi = \text{cost}$, ma tale che $\operatorname{grad}_s \psi$ sia vettore unitario. Allora, se $\varphi = \text{cost}$ sono le traiettorie ortogonali, $\operatorname{grad}_s \varphi$ e $\operatorname{grad}_s \psi$ sono perpendicolari, onde si avrà

$$\frac{\operatorname{grad}_s \varphi}{\operatorname{mod} \operatorname{grad}_s \varphi} = \pm\, n \wedge \operatorname{grad}_s \psi .$$

Prendendo la divergenza risulta

$$\operatorname{div}_s\left(\frac{\operatorname{grad}_s \varphi}{\operatorname{mod}\operatorname{grad}_s \varphi}\right)=\operatorname{grad}_s \psi \times \operatorname{rot}_s \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot}_s \operatorname{grad}_s \psi = 0$$

cioè è nulla la curvatura tangenziale delle $\varphi=\text{cost}$, epperò queste sono geodetiche.

Ne segue ancora che, riferendo i punti P di (S) a questa doppia famiglia, si ha

$$\operatorname{grad}_s \psi \times \frac{\partial P}{\partial \psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \psi} = 1,$$

e quindi anche $\frac{\partial P}{\partial \psi}$ è vettore unitario; cosicchè risulta

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \psi}\, d\psi + \frac{\partial P}{\partial \varphi}\, d\varphi = \boldsymbol{a}\, d\psi + \sqrt{G}\,\boldsymbol{b}\, d\varphi \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = 1,\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0).$$

Si conclude pertanto:

1) *Le linee* $\psi=\text{cost}$ *soddisfacenti alla condizione* $(\operatorname{grad}_s \psi)^2 = 1$ *hanno le traiettorie ortogonali che sono geodetiche, delle quali* $d\psi$ *è l'elemento d'arco*;

2) *Se sulle geodetiche normali ad una linea* (L), *ovvero uscenti da un punto, si portano archi di lunghezza uguale, gli estremi di questi stanno sopra una traiettoria ortogonale alle geodetiche.* Queste traiettorie si chiamano perciò *linee geodeticamente parallele;* e in particolare sono dette *circoli geodetici*, se le date geodetiche escono da uno stesso punto.

Il riferimento dei punti di (S) alla famiglia di geodetiche uscenti da un punto O e ai corrispondenti circoli geodetici vien chiamato un *riferimento geodetico*. È simigliante a quello delle coordinate polari in un piano.

3. Sull' integrazione dell' equazione delle geodetiche.

Abbiamo veduto che se ψ è integrale di

$$(\operatorname{grad}_s \psi)^2 = 1,$$

le $\psi=\text{cost}$ sono traiettorie ortogonali d'una famiglia di geodetiche. Ora osserviamo che se la nota ψ contiene una costante arbitraria a [1], derivando si ottiene

$$\mathrm{grad}_s \psi \times \mathrm{grad}_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) = 0,$$

la quale dimostra che le linee

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \mathrm{cost} = b$$

sono ortogonali alle $\psi = \mathrm{cost}$ per ogni valore di a, epperò sono geodetiche. E siccome in questa equazione entrano le due costanti arbitrarie a e b, si possono sempre determinarle in guisa che la curva corrispondente passi per un dato punto P ed ivi abbia una data direzione. In conclusione, *se è nota una soluzione ψ di* $(\mathrm{grad}_s \psi)^2 = 1$ *contenente una costante arbitraria a, l'integrale generale delle geodetiche è rappresentato da* $\frac{\partial \psi}{\partial a} = b\,(\mathrm{cost.\ arb.})$.

Supponiamo invece di conoscere un integrale primo dell' equazione differenziale delle geodetiche contenente una costante arbitraria a. Possiamo supporlo della forma

$$u(P, a) \times dP = 0.$$

Allora per quanto si è detto nel numero precedente se ne potranno determinare le traiettorie ortogonali

$$\psi(P, a) = \mathrm{cost};$$

e siccome questa equazione contiene una costante arbitraria, per le cose dette dianzi $\frac{\partial \psi}{\partial a} = b$ sarà l'equazione di tutte le geodetiche. Si conclude pertanto:

Dato un integrale primo dell' equazione differenziale delle geodetiche contenente una costante arbitraria, si può determinare in termini finiti l' equazione di tutte le geodetiche. Questi teoremi son dovuti a JACOBI.

---

(1) Non additiva, s' intende.

4. Casi particolari. - Superficie di Liouville.

Supponiamo che esista sulla (S) un sistema ortogonale di linee, riferendosi alle quali risulti

$$dP = \sqrt{U+V}\,(\boldsymbol{a}\,du + \boldsymbol{b}\,dv), \tag{6}$$

essendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ unitari $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0)$ e U e V funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Allora, sviluppando l' equazione $(\mathrm{grad}_s\,\psi)^2 = 1$, si ottiene

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 = U + V$$

che s' integra separando le variabili. Risulta manifestamente

$$\psi = \int \sqrt{U+c}\,du \pm \int \sqrt{V-c}\,dv\,;$$

la quale contenendo la costante arbitraria c, permette di di dedurre l' equazione

$$\frac{\partial\psi}{\partial c} = c'$$

delle geodetiche (teor. prec.). Le superficie sulle quali il dP può acquistare la forma sopra indicata si chiamano *superficie di* LIOUVILLE.

Se si cambiano i parametri u e v in altri p e q in guisa che sia

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dv}\right)^2 = U + V\,;$$

si può porre

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\dfrac{dp}{du}}{\sqrt{U+V}}, \quad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\dfrac{dq}{dv}}{\sqrt{U+V}},$$

e scrivere di conseguenza

$$dP = \frac{\boldsymbol{a}\,dp}{\cos\dfrac{\theta}{2}} + \frac{\boldsymbol{b}\,dq}{\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}}\,. \tag{6'}$$

Ora notiamo che fissate su (S) due curve (L) e (L_1) non geodeticamente parallele, si possono sempre considerare le curve luogo dei punti le cui *distanze geodetiche* da quelle curve hanno somma costante o differenza costante. Le prime son dette *ellissi geodetiche*, le seconde *iperboli geodetiche*. Orbene è chiaro che se u e v sono le dette distanze geodetiche, sarà per le cose dette al n. 2

$$\overline{\mathrm{grad}_s u}^2 = 1 \quad \overline{\mathrm{grad}_s v}^2 = 1 .$$

E allora, se poniamo

$$u + v = 2p, \quad u - v = 2q,$$

si trae

$$\mathrm{grad}_s u + \mathrm{grad}_s v = 2 \,\mathrm{grad}_s p, \quad \mathrm{grad}_s u - \mathrm{grad}_s v = 2\, \mathrm{grad}_s q ;$$

da cui moltiplicando

$$\mathrm{grad}_s p \times \mathrm{grad}_s q = 0 .$$

Si conclude che *le due famiglie* $p = \mathrm{cost}$, $q = \mathrm{cost}$ *di ellissi e iperbole geodetiche formano un sistema ortogonale*. È il *teorema di* WEINGARTEN.

Si ricava poi quadrando

$$(\mathrm{grad}_s p)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad (\mathrm{grad}_s q)^2 = \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

epperò

$$\mathrm{grad}_s p = \cos\frac{\theta}{2}\, b, \quad \mathrm{grad}_s q = \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\, a$$

a e b essendo unitari e ortogonali. Ne consegue (n. 2 Cap. II)

$$dP = \frac{a dp}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{b dq}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}, \tag{7}$$

forma caratteristica di dP quando sia riferito alle due famiglie di linee in discorso.

In particolare si deduce che *le superficie di* LIOUVILLE, il cui dP ha la forma isoterma (6), la quale con un semplice cambiamento di parametri può identificarsi con (7), *sono caratterizzate dalla esistenza sopra di esse di una doppia famiglia isoterma di ellissi e iperbole geodetiche.* È un corollario del DINI.

5. Superficie di rotazione.

Se u indica l'arco di meridiano contato a partire da un certo parallelo, r il raggio d'un generico parallelo, v l'angolo che il generico meridiano fa con un meridiano fisso (longitudine), si ha manifestamente

$$dP = a\,du + rb\,dv, \qquad (a \times b = 0)$$

ove a e b sono i vettori unitari tangenti al meridiano e al parallelo in P, e r è funzione di u in base alla forma della curva meridiana. Si vede allora che questo dP, con un cambiamento di parametro, assume la forma di LIOUVILLE; epperò *le geodetiche di ogni superficie di rotazione si ottengono con quadrature.*

Nel caso presente, essendo

$$t^2 = \left(\frac{dP}{ds}\right)^2 = (u'_s)^2 + r^2(v'_s)^2,$$

la seconda dell'equazioni differenziali (3) diventa

$$\frac{d}{ds}(r^2 v') = 0\,;$$

da cui si deduce

$$r^2 \frac{dv}{ds} = \text{cost.}$$

E siccome $r\,dv/ds$ è uguale al seno dell'angolo φ che l'arco di geodetica ds fa col meridiano, ne consegue il *teorema di* CLAIRAUT: *In ogni punto di una geodetica tracciata sopra una superficie di rotazione il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'angolo d'inclinazione sul meridiano è costante.*

6. Torsione geodetica.

Considerando ora la geodetica uscente da P nella direzione $\boldsymbol{t}$, cerchiamo la sua torsione $1/\tau$ in P. La $\boldsymbol{n}$, normale alla superficie, è anche la normale principale alla geodetica. Supponiamo che coincida anche nel senso, e poniamo $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$ (binormale). Dalle formule di FRENET si deduce

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1 = \sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n},$$

e quindi

$$\frac{1}{\tau} = \boldsymbol{t} \wedge \sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}.$$

Ponendo $dP = \boldsymbol{t}ds$, si può scrivere più generalmente

$$\frac{1}{\tau} = \frac{dP \wedge \sigma(dP) \times \boldsymbol{n}}{ds^2}. \tag{8}$$

Se ci si vuol riferire alle direzioni principali $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_2$ uscenti da P e si pone

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= \cos\alpha \cdot \boldsymbol{c}_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{c}_2, \\ \boldsymbol{t}_1 &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{c}_1 - \cos\alpha \cdot \boldsymbol{c}_2, \end{aligned} \qquad (\boldsymbol{c}_1 \wedge \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{n})$$

viene

$$\sigma\boldsymbol{t} = \cos\alpha \cdot \frac{\boldsymbol{c}_1}{r_1} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{\boldsymbol{c}_2}{r_2}.$$

Ora considerando una linea qualunque (L) uscente da P nella direzione $\boldsymbol{t}$, il BONNET ha chiamato *torsione geodetica della* (L) *in* P la torsione della linea geodetica che esce da P nella stessa direzione $\boldsymbol{t}$ (tangente dunque a (L)). Si vede allora che *le linee di curvatura sono caratterizzate dalla proprietà di aver nulla la torsione geodetica in ogni loro punto,* giacchè l'equazione differenziale di queste curve è $\sigma(dP) \wedge dP = 0$.

Indichiamo la torsione geodetica con $1/\tau_g$ e cerchiamo che relazione passa fra questa e la torsione vera $1/\tau$ della curva (L). Si ha per una formula di FRENET

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{d\boldsymbol{n}_1}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_1,$$

essendo $\boldsymbol{n}_1$ e $\boldsymbol{b}_1$ la normale principale e la binormale in P alla (L). Sia $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$ e

$$\boldsymbol{n}_1 = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{n} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{t}_1, \quad \boldsymbol{b}_1 = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{n} + \cos\alpha \cdot \boldsymbol{t}_1;$$

si ricava

$$\frac{d\boldsymbol{n}_1}{dP}\boldsymbol{t} = \cos\alpha \cdot \sigma\boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{t},$$

e quindi

$$-\frac{1}{\tau} = \cos\alpha \cdot \sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_1 + \operatorname{sen}\alpha \frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_1 + \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{t}.$$

Ma

$$\sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_1 = \cos\alpha \cdot \sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1,$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_1 = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t} =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha \cdot \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1; \qquad \left(\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dP}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1 = 0\right)$$

per conseguenza

$$-\frac{1}{\tau} = \sigma\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1 + \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{t}$$

e infine

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_g} - \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{t}, \tag{9}$$

che è la relazione cercata.

Risulta in particolare che *la torsione geodetica coincide con la vera solo quando sia* $\alpha = \text{cost}$ *lungo la* (L).

Capitolo IV.

Superficie rigate [1].

1. Generalità.

Data una curva (L) luogo dei punti $P(s)$, ove s è l'arco; se da ogni P si tira una retta la cui orientazione vari con continuità da punto a punto, si viene a costruire *una superficie rigata*; ed ogni superficie rigata si può ottenere in questo modo. Segue allora che ogni punto Q della superficie è definito da

$$Q = P(s) + x\boldsymbol{u}(s)$$

essendo $\boldsymbol{u}^2 = 1$ e x la distanza di Q da P sulla generatrice. La (L) dicesi la *direttrice*. Si ricava

$$dQ = (P' + x\boldsymbol{u}')ds + \boldsymbol{u}dx, \tag{1}$$

ove P' è la tangente unitaria in P alla (L).

Da $\boldsymbol{u}^2 = 1$ segue $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' = 0$; epperò i tre vettori noti $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'$ funzioni di s formano sempre una terna ortogonale. Porremo

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{v}}{p(s)}, \quad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w},$$

per modo che $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sia una *terna ortogonale unitaria*. La normale $\boldsymbol{n}$, essendo perpendicolare ad $\boldsymbol{u}$, sarà rappresentata con questa terna da

$$\boldsymbol{n} = \cos\theta \cdot \boldsymbol{v} + \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{w}. \tag{1'}$$

---

[1] Lo sviluppo di questo capitolo è inspirato alla Nota di Burali-Forti: *Sulle superficie rigate.* “Rend. R. Acc. Lincei„, 1918.

Dalla identità $\operatorname{grad}(n \times u) = 0$ si deduce

$$\mathrm{K}\frac{dn}{dQ}u = -\mathrm{K}\frac{du}{dQ}n, \quad \text{ossia} \quad \sigma u = -\mathrm{K}\frac{du}{dQ}n;$$

e siccome $\frac{du}{dQ}u = 0$, ne viene

$$\sigma u \times u = 0. \tag{2}$$

Dunque *σu è vettore tangenziale perpendicolare ad u in ogni punto.*

Perciò si potrà scrivere

$$\sigma u = \pm m u \wedge n = \mp m u_1 \qquad (u_1^2 = 1).$$

E si vede subito che *$-m^2$ non è altro che la curvatura totale.* Invero si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_2\sigma = \sigma u_1 \wedge \sigma u \times n &= \mp m \cdot \sigma u_1 \wedge u_1 \times n = \mp m \cdot \sigma u_1 \times u \\ &= \mp m u_1 \times \sigma u = -m^2. \end{aligned}$$

Dalla (2) risulta intanto che le *generatrici sono asintotiche*, come del resto è evidente *a priori*. Le loro traiettorie ortogonali sono definite dall'equazione

$$u \times dQ = 0,$$

ossia, per la (1), da

$$(P' \times u)\, ds + dx = 0;$$

la quale, per essere $P' \times u = \cos\alpha$ una nota funzione di s *è integrabile senz'altro con una quadratura.*

Se il valore di dx che si ricava di qui vien sostituito nella espressione di dQ, si ottiene la lunghezza dell'elemento lineare perpendicolare in Q alla generatrice u; è dunque il modulo di

$$dQ = (P' + xu' - \cos\alpha \cdot u)\, ds,$$

ossia

$$\operatorname{mod} dQ = \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{x^2}{p^2} + \frac{2x}{p}(P' \times v)}\, ds.$$

Quando in un punto d'una generatrice l'elemento dQ normale alla generatrice u è anche perpendicolare alla generatrice vicinissima $u + u'ds$, esso segna manifestamente la minima distanza fra coteste due generatrici infinitamente vicine. Ora da

$$u \times dQ = 0 \quad \text{e} \quad (u + u'ds) \times dQ = 0$$

si trae

$$u' \times dQ = P' \times u' + xu'^2 = 0$$

da cui

$$x = -\frac{P' \times u'}{(u')^2} = -p(P' \times v) = x_0 \tag{3}$$

epperò *questo valore di x definisce il piede Q_0 di cotesta minima distanza sulla generatrice uscente da P.* Il luogo (T) di questo punto Q_0 è detto la *linea di stringimento* della rigata. Ne consegue che *la direttrice sarà la linea di stringimento quando, e solo quando, risulti $P' \times u' = 0$.*

Sostituendo poi nella precedente espressione di mod dQ il valore x_0 ad x, si ottiene il valore della minima distanza:

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - (P' \times v)^2}\, ds.$$

In virtù della relazione

$$(P' \times u)^2 + (P' \times v)^2 + (P' \times w)^2 = 1,$$

diventa semplicemente

$$P' \times w ds \quad \text{oppure} \quad P' \times u \wedge u'ds.$$

Infine da $P' \times u = \cos \alpha$ si deduce, derivando,

$$P'' \times u + P' \times u' = -\operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'.$$

Se la (L) è geodetica, P'' è diretto come n, epperò $P'' \times u = 0$, e viceversa; se è linea di stringimento, risulta, come si è detto, $P' \times u' = 0$, e viceversa; e se taglia sotto angolo costante la generatrice si ha $\alpha' = 0$. Pertanto si conclude:

Se ad una linea tracciata sopra una rigata appartengono due delle tre proprietà: 1) *di essere geodetica;* 2) *di essere* *linea di stringimento;* 3) *di tagliar le generatrici sotto angolo costante, ad essa appartiene anche la terza.* È un teorema di BONNET.

2. Modo di variare di n lungo una generatrice. Teorema di Chasles.

Vediamo come varia n quando Q si sposta lungo una fissata generatrice. Si ha chiaramente (dQ normale ad u)

$$n = \frac{dQ \wedge u}{\operatorname{mod} dQ} = \frac{P' \wedge u + xu' \wedge u}{\operatorname{mod} dQ} ds.$$

Ponendo

$$P' = \cos\alpha \cdot u + \operatorname{sen}\alpha\,(\cos\varphi v + \operatorname{sen}\varphi \cdot w)$$

si trae

$$P' \wedge u = -\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi \cdot w + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi \cdot v$$

$$P' \times v = \operatorname{sen}\alpha\cos\varphi = -\frac{x_0}{p}, \quad u' \wedge u = -\frac{w}{p}.$$

Talchè risulta

$$n = \left(\frac{x_0 - x}{p} w + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi \cdot v\right)\frac{ds}{\operatorname{mod} dQ}.$$

Confrontando con la (1') si deduce

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi \cdot \frac{ds}{\operatorname{mod} dQ}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{(x_0 - x)ds}{p \operatorname{mod} dQ},$$

e quindi

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x_0 - x}{p\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi} = \frac{x_0 - x}{h}. \tag{4}$$

Questa formula dovuta a CHASLES dà la legge che si cercava; mostra cioè come varia il piano tangente alla rigata quando, partendo dal punto di stringimento, il punto Q si sposta lungo una generatrice. Il parametro h dicesi il *parametro distributore.*

Se si considera il punto $Q_1(x_1)$ per il quale sia

$$x_0 - x_1 = -h\operatorname{cotg}\theta,$$

lo stesso piano che è tangente in $Q(x)$ risulta normale alla superficie in Q_1. Perciò ad ogni piano passante per una generatrice corrispondono due punti, in uno dei quali questo piano è tangente alla superficie, nell'altro è normale. Avendosi

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x) = -h^2,$$

queste coppie di punti generano sulla generatrice una involuzione, della quale $Q_0(x_0)$ è il punto centrale.

3. Curvature.

Per il calcolo delle curvature nel generico punto Q serviamoci delle formule del Capitolo II, e cioè

$$\mathrm{I}_2\sigma = \frac{n_s' \wedge n_x' \times n}{Q_s' \wedge Q_x' \times n}, \quad \mathrm{I}_1\sigma = \frac{(n_s' \wedge Q_x' - n_x' \wedge Q_s') \times n}{Q_s' \wedge Q_x' \times n},$$

notando che si ha, in base alla espressione di dQ,

$$Q_s' = P' + xu', \quad Q_x' = u,$$

e per una posizione fatta

$$n = \cos\theta \cdot v + \operatorname{sen}\theta \cdot w.$$

Si ricava intanto

$$n_s' = \cos\theta \cdot v' + \operatorname{sen}\theta \cdot w', \quad n_x' = (-\operatorname{sen}\theta \cdot v + \cos\theta \cdot u)\theta_x';$$

poi notando che sussistono le relazioni

$$v' \wedge v \times n = v' \times v \wedge n = (v' \times u)\operatorname{sen}\theta,$$
$$w' \wedge v \times n = (u \times w')\operatorname{sen}\theta = 0 \ \text{(1)}$$
$$w' \wedge w \times n = -(u \times w')\cos\theta = 0,$$
$$v' \wedge w \times n = -(u \times v')\cos\theta,$$

il numeratore di $\mathrm{I}_2\sigma$ diventa semplicemente

$$-\cos\theta \cdot (u \times v')\,\theta_x'.$$

---

(1) $w' = u' \wedge v + u \wedge v'$, e quindi $w' \times u = u' \times v \wedge u = -u' \times w = 0$.

Ma

$$v' = pu'' + p'u', \quad v' \times u = pu \times u'' = -\frac{1}{p}$$

giacchè

$$u \times u'' = -u' \times u' = -\frac{1}{p^2},$$

perciò quel numeratore è $\theta_x' \cdot \dfrac{\cos\theta}{p}$.

Quanto al denominatore si ha

$$Q_s' \wedge Q_x' = (P' + xu') \wedge u = P' \wedge u - \frac{xw}{P};$$

talchè sostituendo a $P' \wedge u$ l'espressione calcolata nel numero precedente risulta

$$Q_s' \wedge Q_x' = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \cdot v + \frac{x_0 - x}{p} w$$

e quindi

$$Q_s' \wedge Q_x' \times n = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \cos\theta + \frac{x_0 - x}{p} \operatorname{sen}\theta$$

$$= \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \left(\cos\theta + \frac{x_0 - x}{h} \operatorname{sen}\theta\right).$$

In virtù della formula di Chasles, si ottiene più semplicemente

$$Q_s' \wedge Q_x' \times n = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta} = \frac{h}{p\cos\theta}.$$

In conclusione si trova

$$\mathrm{I}_2\sigma = \frac{\cos^2\theta}{h}\theta_x'.$$

Si può anche calcolare θ_x' derivando la formula di Chasles; e allora si ottiene

$$\frac{\theta_x'}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{h},$$

e quindi

$$(5) \qquad \mathrm{I}_2\sigma = -\frac{\cos^4\theta}{h^2},$$

formula notevole della *curvatura totale.*

Ora passando al calcolo dell' invariante primo, si ha per le formule precedenti

$$n \times n_s' \wedge Q_x' = (\cos\theta \cdot v' + \operatorname{sen}\theta\, w') \times u \wedge n =$$
$$= (\cos\theta \cdot v' + \operatorname{sen}\theta \cdot w') \times (\cos\theta \cdot w - \operatorname{sen}\theta \cdot v)$$
$$= \cos^2\theta \cdot v' \times w - \operatorname{sen}^2\theta \cdot v \times w' = v' \times w,$$

perchè

$$w \times w' = 0, \quad v \times v' = 0, \quad -v' \times w = v \times w'.$$

E similmente

$$n_x' \wedge Q_s' \times n = (-\operatorname{sen}\theta \cdot v + \cos\theta \cdot w) \times (P' + xu') \wedge n \cdot \theta_x'$$
$$= (-\operatorname{sen}\theta \cdot v + \cos\theta \cdot w) \times (\cos\theta \cdot P' \wedge v +$$
$$+ \operatorname{sen}\theta \cdot P' \wedge w + x \operatorname{sen}\theta \cdot u' \wedge w)\, \theta_x'$$
$$= (P' \times v \wedge w)\theta_x' = -(P' \times u)\theta_x' = -$$
$$= -\cos\alpha \cdot \theta_x'.$$

Per conseguenza risulta

$$\mathrm{I}_1\sigma = \frac{v' \times w + \cos\alpha \cdot \theta_x'}{h/p\cos\theta}.$$

Usando il θ_x' dedotto di sopra, e notando che è

$$v' \times w = pu'' \times w,$$

si ha infine per la curvatura media la formula semplice

$$(6) \qquad \mathrm{I}_1\sigma = \frac{p\cos\theta}{h^2}\,(ph(u'' \times w) - \cos\alpha\cos^2\theta).$$

Se la direttrice è traiettoria ortogonale della generatrice (e si può sempre sceglierla tale), si ha semplicemente

$$\mathrm{I}_2\sigma = -\frac{\cos^4\theta}{p^2\operatorname{sen}^2\varphi}, \quad \mathrm{I}_1\sigma = \frac{p\cos\theta}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

4. Deformazione delle rigate.

Immaginiamo di deformare la direttrice di una rigata (S) come fosse una linea flessibile e inestendibile, in guisa che trasporti seco le generatrici mantenute rigidamente collegate con essa. Si otterrà così una nuova rigata. Se l'elemento lineare di questa conserva la stessa forma

$$\overline{dQ}^2 = (1 + P' \times u' + xu'^2)\, ds^2 + 2 \cos\alpha\, ds dx + dx^2$$

di quello della (S) primitiva, si dice ch' essa è ***applicabile su quella***; giacchè la si può pensare ottenuta per deformazione da (S), quando s' immagini la (S) come realizzata mediante un velo flessibile e inestendibile.

La ricerca dunque delle superficie applicabili su (S) si riduce a determinare $P(s)$ e $u(s)$ in guisa che sia

$$P' \times u' = l, \quad u'^2 = \frac{1}{p^2}, \quad P' \times u = \cos\alpha,$$

essendo l, p, α funzioni date. Posto, rispetto a una terna fondamentale fissa,

$$u = \cos\beta \cdot i + \operatorname{sen}\beta(\cos\gamma \cdot j + \operatorname{sen}\gamma \cdot k),$$

la seconda equazione diventa

$$\beta'^2 + \gamma'^2 \operatorname{sen}^2\beta = \frac{1}{p^2},$$

che permette di determinare γ, fissata che sia β ad arbitrio. Così restan noti u e u'; epperò sono noti per ogni valore di s i vettori v e w considerati nei numeri precedenti.

Dopo ciò resta da risolvere rispetto a P' il sistema

$$P' \times v = lp, \quad P' \times u = \cos\alpha, \quad P'^2 = 1.$$

Si ha

$$w \wedge P' = (u \wedge v) \wedge P' = \cos\alpha \cdot v - lpu;$$

e moltiplicando ancora vettorialmente per w si ottiene

$$P' - (P' \times w)w = \cos\alpha \cdot u + lpv,$$

da cui

$$1 - (P' \times w)^2 = \cos^2\alpha + l^2p^2.$$

Abbiamo dunque le tre proiezioni di P':

$P' \times u = \cos\alpha$, $P' \times v = pl$, $P' \times w = \pm\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - p^2l^2}$,
cosicchè si deduce

$$P' = \cos\alpha \cdot u + plv \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - p^2l^2}\,w\,, \tag{7}$$

da cui con una quadratura si ottiene $P(s)$.

Abbiamo visto che $P' \times w\,ds$ è la minima distanza di due generatrici infinitamente vicine; epperò quel radicale è reale e diverso da zero, se la rigata non è sviluppabile. Si noti infine che fissata l'arbitraria β di cui sopra, si ottengono due superficie deformate corrispondenti ai due segni della formula precedente.

Si può naturalmente valersi della arbitrarietà di β per imporre alla deformata opportune condizioni. Ma questo riuscirebbe in massima difficile. Perciò il Beltrami ha sostituito un altro metodo a questo, che è dovuto a Minding.

È chiaro che deformando la superficie, come si è detto di sopra, si ottiene sempre una rigata, ma non è sempre applicabile sulla data. Ed allora si può dapprima cercare le forme della direttrice che corrispondono a superficie applicabili.

Indichiamo con ψ l'angolo che la binormale b in P alla direttrice fa con la normale n in P alla rigata. Sia n_1 la normale principale, t_1 la direzione tangenziale perpendicolare a $P' = t$, $(n = t \wedge t_1)$. Si ha

$$P' \times u = \cos\alpha, \quad t_1 \times u = \operatorname{sen}\alpha$$
$$b = \operatorname{sen}\psi \cdot t_1 + \cos\psi \cdot n, \quad n_1 = \cos\psi \cdot t_1 - \operatorname{sen}\psi \cdot n\,,$$

dalle quali si ricava

$$t \times u = \cos\alpha, \quad n_1 \times u = \operatorname{sen}\alpha\cos\psi, \quad b \times u = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi.$$

Essendo per le cose dette di sopra $t \times u' = l$, si ha, derivando la prima e usando le formule di Frenet,

$$l + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\psi}{\rho} = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \alpha_s'\,,$$

ossia

$$\frac{\cos\psi}{\rho} = -\left(\frac{l}{\operatorname{sen}\alpha} + \alpha_s'\right);$$

la quale dimostra che la curvatura tangenziale della direttrice non deve variare per deformazione.

Ora derivando le altre due, e tenendo presente che $\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{u}' = -\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha$ [1], coll'uso delle formule di FRENET si ottiene

$$\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\rho} - \frac{\boldsymbol{b}}{\tau}\right) \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{u}' = (\operatorname{sen}\alpha\cos\psi)'$$

$$\frac{\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{u}}{\rho} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}' = (\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi)'$$

ossia

$$\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi}{\tau} + \frac{\cos\psi\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}')\operatorname{sen}\psi =$$

$$= (\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi)'$$

$$\frac{\cos\psi\operatorname{sen}\alpha}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\psi\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}')\cos\psi = (\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi)'.$$

Eliminando fra queste e la precedente $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}'$ e ψ si ottiene una relazione fra le due curvature ρ e τ della direttrice. Scelta allora una curva soddisfacente a quella relazione, risulteranno determinate $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}$, indi ψ e infine

$$\boldsymbol{u} = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\alpha(\cos\psi \cdot \boldsymbol{n}_1 + \operatorname{sen}\psi \cdot \boldsymbol{b}).$$

---

[1] da $\boldsymbol{u} = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \boldsymbol{t}_1$.

Capitolo V.

Rappresentazione delle superficie e superficie applicabili.

1. Rappresentazione di una superficie sopra un' altra.

Quando si stabilisce una corrispondenza $P_0 = f(P)$ fra i punti P e P_0 di due superficie (S) e (S_0), si dice che si fa *una rappresentazione di* (S) su (S_0). Considerando l'omografia $\beta = \frac{dP_0}{dP}$ (funzione di P), supposta invertibile, la relazione

$$(1) \qquad dP_0 = \beta dP$$

dà la corrispondenza fra gli spostamenti dP uscenti da P e gli spostamenti dP_0 uscenti da P_0; cosicchè la β trasforma ogni direzione tangenziale a (S) in P in una direzione tangenziale a (S_0) in P_0.

Se dP e δP sono due spostamenti ortogonali, tali saranno anche i corrispondenti dP_0 e δP_0 quando risulti

$$\beta dP \times \beta\delta P = 0.$$

Posto $\mathrm{K}\beta \cdot \beta = \gamma$, che è dilatazione, questa condizione diventa

$$\delta P \times \gamma dP = 0;$$

la quale sarà soddisfatta insieme a $\delta P \times dP = 0$ quando sia

$$\gamma dP = m dP.$$

Dunque esiste una coppia di direzioni che si conserva ortogonale nella rappresentazione ed è la coppia delle direzioni unite della dilatazione γ. Ne consegue il teorema di Tissot: *Esiste sempre un sistema di linee ortogonali* *su* (S) *che si conserva ortogonale nella rappresentazione di* (S) *su* (S_0). L'equazione differenziale di tale sistema è manifestamente

$$dP \wedge \gamma dP = 0. \tag{2}$$

Posto

$$dP_0 = ds_0 t_0, \quad dP = ds \cdot t \ (t_0 \text{ e } t \text{ vettori unitari})$$

si ha

$$ds_0 t_0 = ds \cdot \beta t, \quad ds_0^2 = ds^2 \cdot (\gamma t \times t) = m^2 ds^2,$$

epperò

$$m^2 = \gamma t \times t$$

chiamasi il *modulo della rappresentazione.* È in massima funzione di P e di t.

Ponendo poi $\dfrac{t}{m} = P - M$, l'equazione

$$\gamma(P - M) \times (P - M) = 1$$

rappresenta nel piano tangente a P una ellisse (luogo dei punti M); onde, essendo $(P - M)^2 = 1/m^2$, si deduce che *il modulo in* P *varia con l'orientazione come l'inverso del semidiametro di cotesta ellisse.*

La considerazione di γ si presta a varie altre deduzioni facili a vedersi; qui non ne diremo altro.

2. Rappresentazione conforme.

Quando il modulo m è indipendente dalla orientazione (ma funzione di P) l'ellisse precedente degenera in un circolo, epperò la γ non può essere che l'omotetia m^2. Si deduce subito che in questo caso tutti i sistemi ortogonali si conservano ortogonali nella rappresentazione, e perciò anche gli angoli di due direzioni tangenziali qualunque.

Inoltre, essendo proporzionali gli elementi lineari corrispondenti, ogni triangolo infinitesimo su (S) risulta rappresentato da un triangolo *simile* su (S_0). *In questa rappresentazione c'è dunque similitudine nelle parti infinitesime,* perciò essa vien detta *conforme.*

Segue anche che ogni sistema isotermo di (S) ha per immagine su (S_0) un sistema pure isotermo; giacchè da

$$dP = N(adu + bdv) \qquad (a \times b = 0)$$

si trae in base alla rappresentazione,

$$dP_0 = mN(adu + bdv).$$

E inversamente; se i sistemi isotermi si corrispondono sulle due superficie, sarà necessariamente $ds_0^2 = m^2 ds^2$. E allora, per le cose dette al Cap. II (n. 4), *si otterranno le rappresentazioni conformi di (S) su (S_0) uguagliando la variabile complessa di (S) a una funzione della variabile complessa di (S_0).*

Una superficie può anche rappresentarsi conformemente su se stessa, facendo corrispondere due dei suoi sistemi isotermi. Ma qui non entreremo in particolari, che sono studiati in appositi libri d'analisi.

3. Superficie applicabili.

Poniamo ora la condizione che in virtù della rappresentazione ogni elemento ds di (S) conservi la sua lunghezza su (S_0); dovrà risultare

$$(dP_0)^2 = \beta dP \times \beta dP = dP \times \mathrm{K}\beta(\beta dP) = (dP)^2,$$

per conseguenza

$$\gamma = \mathrm{K}\beta \cdot \beta = 1, \quad \text{ossia} \quad \mathrm{K}\beta = \beta^{-1}.$$

Ma questa è la proprietà che caratterizza le *isomerie*; perciò la condizione imposta potrà solo verificarsi se β è isomeria a invariante terzo uguale a uno. Allora definiamola interamente mediante la corrispondenza

$$dP_0 = \beta dP, \quad n_0 = \beta n,$$

ove n e n_0 indicano le normali a (S) e (S_0) nei punti corrispondenti. Esse non sono contraddittorie, perchè da

$$dP_0 \times n_0 = 0$$

si trae

$$\beta dP \times \beta n = 0, \quad dP \times K\beta(\beta n) = dP \times n = 0,$$

che è vera.

Manifestamente tutti i sistemi ortogonali di (S) si conservano ortogonali su (S_0), e in generale gli angoli di due direzioni tangenziali qualunque si conservano. Ma ora si domanda: Data la (S) è sempre possibile questa rappresentazione sopra una (S_0) qualunque? Se si ricorda quanto si è trovato al n. 7 del Cap. II, e cioè che la curvatura totale è esprimibile coi soli coefficienti del ds^2, si deduce, a cagione della relazione imposta $ds^2 = ds_0^2$, che *la* (S_0) *deve avere nei punti corrispondenti la stessa curvatura totale di* (S).

La (S) e (S_0) si chiamano allora *superficie applicabili* l'una sull'altra; la *metrica* sulle due superficie è identica.

Se la (S) s'immagina realizzata mediante un velo flessibile e inestendibile e la si deforma senza rotture nè duplicature, ogni deformata è una (S_0) *applicabile* su (S) con la deformazione inversa. Ebbene la curvatura totale rimane invariata. Queste deformazioni si chiamano *deformazioni per flessione*.

Del resto, a parte l'espressione gaussiana della curvatura, la proprietà ora detta si può dimostrare direttamente nel seguente modo indicato da BURALI-FORTI. Senza togliere generalità si può pensare la (S) orientata in guisa che una sua terna ortogonale in un certo punto P, della quale faccia parte n, sia parallela alla corrispondente di (S_0) in P_0. Allora in P è $\beta = 1$.

In $P + dP$ sarà $\beta = 1 + \varepsilon$, con ε omografia infinitesima. Ora, dovendo essere

$$(1 + \varepsilon) \cdot K(1 + \varepsilon) = 1,$$

ossia

$$\varepsilon + K\varepsilon = -\varepsilon K\varepsilon,$$

segue che la dilatazione di ε (il primo membro) è infinitesima del 2° ordine, cosicchè la ε, ossia $d\beta$, può ridursi alla sua parte assiale. Poniamo dunque

$$d\beta = \boldsymbol{i} \wedge, \quad \delta\beta = \boldsymbol{j} \wedge$$

$\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ essendo infinitesimi. Allora da $\boldsymbol{n}_0 = \beta \boldsymbol{n}$ si deduce

$$d\boldsymbol{n}_0 = d\boldsymbol{n} + \varepsilon \boldsymbol{n} = d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{n}, \quad \delta \boldsymbol{n}_0 = \delta \boldsymbol{n} + \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{n},$$

da cui

$$d\boldsymbol{n}_0 \wedge \delta \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{n}_0 = (d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{n}) \wedge (\delta \boldsymbol{n} + \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n},$$

perchè nel secondo membro basta prendere la parte $\boldsymbol{n}$ di $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n} + \varepsilon \boldsymbol{n}$.

Sviluppando e trascurando gl' infinitesimi di ordine superiore, risulta

$$d\boldsymbol{n}_0 \wedge \delta \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{n}_0 = d\boldsymbol{n} \wedge \delta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n},$$

ossia

$$\sigma_0 dP_0 \wedge \sigma_0 \delta P_0 \times \boldsymbol{n}_0 = \sigma dP \wedge \sigma \delta P \times \boldsymbol{n}.$$

D' altra parte si ottiene anche, nella stessa approssimazione,

$$dP_0 \wedge \delta P_0 \times \boldsymbol{n}_0 = \beta dP \wedge \beta \delta P \times \beta \boldsymbol{n} = dP \wedge \delta P \times \boldsymbol{n};$$

epperciò risulta

$$\frac{\sigma_0 dP_0 \wedge \sigma_0 \delta P \times \boldsymbol{n}_0}{dP_0 \wedge \delta P_0 \times \boldsymbol{n}_0} = \frac{\sigma dP \wedge \sigma \delta P \times \boldsymbol{n}}{dP \wedge \delta P \times \boldsymbol{n}},$$

che dimostra l' uguaglianza delle curvature totali.

4. Invarianti di flessione.

Oltre alla curvatura totale esistono altri *invarianti di flessione*, che sono pure utili a considerarsi per la risoluzione dei vari problemi inerenti a questa teoria.

Taluni sono quasi evidenti; ma si possono determinare con una ricerca sistematica; e noi seguiremo quella indicata da BOTTASSO (1).

---

(1) *Sulla flessione delle superficie...* « Rend. R. Acc. Lincei », 1915.

Premettiamo che ad ogni vettore tangenziale $v(P)$ corrisponde su (S_0) un vettore v_0 pure tangenziale, perchè $v_0 \times n_0 = \beta v \times \beta n = v \times n = 0$. Da $n_0 = \beta n$ si ricava differenziando

$$(3) \quad d\beta \cdot n = dn_0 - \beta dn = \sigma_0 dP_0 - \beta\sigma dP = (\sigma_0\beta - \beta\sigma)dP\,;$$

formula utile (¹). Inoltre da $\beta\delta P = \delta P_0$ (δ differenziale), si ha

$$d\beta(\delta P) = d\delta P_0 - \beta(d\delta P)\,;$$

e quindi, per la formula di sviluppo del doppio prodotto vettoriale,

$$\begin{aligned} d\beta(\delta P) \wedge [dP_0 \wedge \delta P_0] &= [d\delta P_0 \times \delta P_0 - \beta(d\delta P) \times \delta P_0]dP_0 \\ &\quad - [d\delta P_0 \times dP_0 - \beta(d\delta P) \times dP_0]\delta P_0 \\ &= [d\delta P_0 \times \delta P_0 - d\delta P \times \delta P]dP_0 \\ &\quad - [\delta dP_0 \times dP_0 - \delta dP \times dP]\delta P_0 \text{ (²)}. \end{aligned}$$

Ma questo secondo membro è nullo, come risulta dalla differenziazione di $(dP_0)^2 = (dP)^2$ o di $(\delta P_0)^2 = (\delta P)^2$; epperò $d\beta(\delta P)$ ha la direzione di $dP_0 \wedge \delta P_0$, ossia di n_0. Segue dunque in generale (essendo v vettore tangenziale qualunque come δP)

$$d\beta \cdot v = hn_0\,.$$

Si ricava

$$h = n_0 \times d\beta \cdot v = v \times \mathrm{K}d\beta \cdot n_0 = v \times (\sigma\mathrm{K}\beta - \mathrm{K}\beta \cdot \sigma_0)dP_0\,,$$

ossia

$$h = (\beta\sigma - \sigma_0\beta)v \times dP_0\,;$$

che sostituita nella precedente dà la seguente formula:

$$(4) \quad d\beta \cdot v = [(\beta\sigma - \sigma_0\beta)v \times dP_0]n_0 = \mathrm{H}((\beta\sigma - \sigma_0\beta)v, n_0)dP_0\,.$$

Mediante le formule stabilite si deduce (da $v_0 = \beta v$)

$$dv_0 = \beta dv + d\beta \cdot v = \beta \frac{dv}{dP}\mathrm{K}\beta(dP_0) + \mathrm{H}((\beta\sigma - \sigma_0\beta)v, n_0)dP_0$$

(¹) Insieme alla analoga $d\mathrm{K}\beta \cdot n_0 = \mathrm{K}d\beta \cdot n_0 = (\sigma\mathrm{K}\beta - \mathrm{K}\beta\sigma_0)dP_0$.

(²) Si ricordi che $\mathrm{K}\beta(dP_0) = \beta^{-1}dP_0 = dP$.

e perciò

$$\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dP_0} = \beta\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\mathrm{K}\beta + \mathrm{H}((\beta\sigma - \sigma_0\beta)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}_0). \tag{5}$$

Ne consegue anzitutto

$$\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dP_0}\boldsymbol{n}_0 = \beta\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{n}. \tag{6}$$

Inoltre

$$\mathrm{I}_1\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_1\left(\beta\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\mathrm{K}\beta\right) + (\beta\sigma - \sigma_0\beta)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}_0 = \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta\cdot\beta\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) + \\ + \boldsymbol{v}\times(\sigma\mathrm{K}\beta\boldsymbol{n}_0 - \mathrm{K}\beta\sigma_0\boldsymbol{n}_0),$$

ossia, essendo $\mathrm{K}\beta\cdot\beta = 1$, $\sigma\mathrm{K}\beta\boldsymbol{n}_0 = \sigma\boldsymbol{n} = 0$, $\sigma_0\boldsymbol{n}_0 = 0$,

$$\mathrm{I}_1\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_1\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}. \tag{7}$$

Dunque *l'invariante primo* di $\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ *è un invariante di flessione.*

Sia ora φ funzione di P. Si ha per definizione

$$\operatorname{grad}_S\varphi\times dP = d\varphi.$$

Se ne deduce

$$\operatorname{grad}_S\varphi\times\mathrm{K}\beta dP_0 = \beta(\operatorname{grad}_S\varphi)\times dP_0 = d\varphi$$

e quindi

$$\beta(\operatorname{grad}_S\varphi) = \operatorname{grad}_S\varphi(P_0). \tag{8}$$

In base a questa e alla (6), sono *invarianti di flessione*

$$(\operatorname{grad}_S\varphi)^2 \quad \mathrm{e} \quad \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{n}\right)^2,$$

come risulta moltiplicando ciascuna di quelle uguaglianze scalarmente per se stessa [1].

---

[1] Manifestamente anche $\operatorname{grad}_S\varphi\times\operatorname{grad}_S\psi$ e

$$(\operatorname{grad}_S\varphi\wedge\operatorname{grad}_S\psi)^2 = (\operatorname{grad}_S\varphi)^2(\operatorname{grad}_S\psi)^2 - (\operatorname{grad}_S\varphi\times\operatorname{grad}_S\psi)^2.$$

sono invarianti di flessione.

Se poi nella (7) si pone $v = \mathrm{grad}_s\,\varphi$, risulta che è *invariante di flessione*

$$\mathrm{I}_1 \frac{d\,\mathrm{grad}_s\,\varphi}{dP}, \quad \text{ossia} \quad \mathrm{div}_s\,\mathrm{grad}_s\,\varphi.$$

E similmente, ponendo $v = \mathrm{grad}_s\,\varphi / \mathrm{mod}\,\mathrm{grad}_s\varphi$, risulta che

$$\frac{1}{g} = -\,\mathrm{div}_s\left(\frac{\mathrm{grad}_s\,\varphi}{\mathrm{mod}\,\mathrm{grad}_s\,\varphi}\right),$$

ossia la ***curvatura tangenziale d'ogni linea*** $\varphi = \mathrm{cost}$ *è* ***un invariante di flessione*** (cosa visibile, del resto, con semplice ragionamento diretto). In particolare dunque le geodetiche $(1/g = 0)$ si trasformano per flessione di (S) nelle geodetiche di (S_0).

Applichiamo ora l' operatore I_2 alla (5) e, ricordato che è

$$\mathrm{I}_2\left(\beta \frac{dv}{dP}\,\mathrm{K}\beta\right) = \mathrm{I}_2\left(\mathrm{K}\beta\beta\,\frac{dv}{dP}\right) = \mathrm{I}_2 \frac{dv}{dP},$$

sviluppiamo secondo la formula [1]

$$\mathrm{I}_2(\alpha + \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_1\alpha \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \alpha \boldsymbol{b},$$

osservando che nel caso presente è $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$. Si ottiene subito

$$\mathrm{I}_2 \frac{dv_0}{dP_0} = \mathrm{I}_2 \frac{dv}{dP} - (\beta\sigma - \sigma_0\beta)v \times \beta\, \frac{dv}{dP}\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

Di qui risulta in particolare: *quando* $\frac{dv}{dP}\boldsymbol{n}$ *è nullo* [2], *l'invariante secondo di* $\frac{dv}{dP}$ *è un invariante di flessione.*

---

[1] Essendo in generale, come facilmente si verifica,

$$\mathrm{I}_1(\alpha\alpha_1) = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_2\alpha_1 + \mathrm{I}_1\alpha \cdot \mathrm{I}_1\alpha_1 - \mathrm{I}_2(\alpha + \alpha_1)$$

e

$$\mathrm{I}_1(\alpha\mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b}, \quad \mathrm{I}_2\mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0,$$

ne segue

$$\mathrm{I}_2(\alpha + \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_1\alpha \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b},$$

che è la formula che qui si applica.

[2] o parallelo a $\boldsymbol{n}$.

Indichiamo con φ e ψ i parametri nei punti corrispondenti P e P_0. Si ha

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial P}{\partial \psi} d\psi ;$$

onde applicando l'omografia β della corrispondenza si ottiene

$$dP_0 = \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right) d\psi ,$$

e quindi paragonando

$$\frac{\partial P_0}{\partial \varphi} = \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right), \quad \frac{\partial P_0}{\partial \psi} = \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right).$$

Ne risulta, per la proprietà di β,

$$(10) \left(\frac{\partial P_0}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial P_0}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)^2, \quad \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} \times \frac{\partial P_0}{\partial \psi} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \times \frac{\partial P}{\partial \psi};$$

che dimostra *l'invarianza* di coteste quantità.

Si osservi però che questi invarianti non sono distinti dai precedenti. E invero dalla nota identità

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \text{ (1)},$$

posto

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}_s\, \varphi, \quad \boldsymbol{b} = \mathrm{grad}_s\, \psi, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{u} = dP,$$

si deduce

$$(\mathrm{grad}_s\, \varphi \wedge \mathrm{grad}_s\, \psi \times \boldsymbol{n})\, dP = d\varphi \cdot \mathrm{grad}_s\, \psi \wedge \boldsymbol{n} - d\psi \cdot \mathrm{grad}_s\, \varphi \wedge \boldsymbol{n},$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{\mathrm{grad}_s\, \psi \wedge \boldsymbol{n}}{\mathrm{grad}_s\, \varphi \wedge \mathrm{grad}_s\, \psi \times \boldsymbol{n}}, \quad \frac{\partial P}{\partial \psi} = -\frac{\mathrm{grad}_s\, \varphi \wedge \boldsymbol{n}}{\mathrm{grad}_s\, \varphi \wedge \mathrm{grad}_s\, \psi \times \boldsymbol{n}},$$

---

(1) Si può sempre scrivere

$$\boldsymbol{u} = p \cdot \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + q \cdot \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + r \cdot \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b},$$

da cui

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} = p(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \text{ .... ecc.};$$

quindi risulta l'identità soprascritta.

i cui quadrati si esprimono appunto mediante gl'invarianti

$$(\mathrm{grad}_s\, \varphi)^2, \quad (\mathrm{grad}_s\, \psi)^2, \quad (\mathrm{grad}_s\, \varphi \times \mathrm{grad}_s\, \psi)^2.$$

Si ricava inoltre dalle precedenti il ds^2 espresso per le nuove variabili φ e ψ:

$$(11) \quad ds^2 = \frac{(\mathrm{grad}_s \psi)^2 d\varphi^2 - 2(\mathrm{grad}_s \varphi \times \mathrm{grad}_s \psi) d\varphi\, d\psi + (\mathrm{grad}_s \varphi)^2 d\psi^2}{(\mathrm{grad}_s\, \varphi \wedge \mathrm{grad}_s\, \psi)^2}.$$

5. Invarianti particolari.

Gl'invarianti precedenti possono dirsi *generali*, data la generalità di φ e $\boldsymbol{v}$. Prendiamo invece i gradienti delle funzioni particolari

$$z = \boldsymbol{k} \times (P - O), \; \rho = \frac{1}{2}(P - O)^2, \; f = (P - O) \times \boldsymbol{n},$$

essendo O un punto fisso e $\boldsymbol{k}$ vettore costante (il loro significato è manifesto). Si ha (vedi nota al Cap. II, (n. 2))

$$\mathrm{grad}_s\, z = \boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \quad \mathrm{grad}_s\, \rho = (P - O) - f\boldsymbol{n},$$
$$\mathrm{grad}_s f = \sigma(P - O)$$

e quindi

$$\frac{d\, \mathrm{grad}_s\, z}{dP} = -(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}) \frac{d\boldsymbol{n}}{dP} - \mathrm{H}(\mathrm{grad}_s\, (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}), \boldsymbol{n})$$

$$(12) \qquad = -(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})\sigma - \mathrm{H}(\sigma \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n})$$

$$\frac{d\, \mathrm{grad}_s\, \rho}{dP} = 1 - f\sigma - \mathrm{H}(\mathrm{grad}_s f, \boldsymbol{n})$$

$$= 1 - f\sigma - \mathrm{H}(\sigma(P - O), \boldsymbol{n}).$$

Queste mostrano che

$$\frac{d\, \mathrm{grad}_s\, z}{dP} \boldsymbol{n} = 0, \quad \frac{d\, \mathrm{grad}_s\, \rho}{dP} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n};$$

epperò si conclude per le cose dette (9) che *non solo gli invarianti primi, ma anche*

$$\mathrm{I}_2 \frac{d\, \mathrm{grad}_s\, z}{dP}, \quad \mathrm{I}_2 \frac{d\, \mathrm{grad}_s\, \rho}{dP}$$

sono invarianti di flessione.

Gl' invarianti primi hanno espressioni notevoli messe in evidenza da Beltrami. Dalle precedenti si deduce subito

$$(13)\qquad \begin{aligned} \operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s z &= I_1 \frac{d \operatorname{grad}_s z}{dP} = -(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})\, I_1 \sigma \\ \operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s \rho &= I_1 \frac{d \operatorname{grad}_s \rho}{dP} = 3 - f \cdot I_1 \sigma , \end{aligned}$$

ove $I_1\sigma$, come sappiamo, è la curvatura media; sono appunto le espressioni cercate.

Applicando poi l' operatore I_2 alle (12), e valendosi delle formule già adoperate, si ottengono per gl' invarianti secondi l' espressioni seguenti [1]:

$$(14)\qquad \begin{aligned} I_2 \frac{d \operatorname{grad}_s z}{dP} &= (1 - (\operatorname{grad}_s z)^2) \cdot I_2 \sigma \\ I_2 \frac{d \operatorname{grad}_s \rho}{dP} &= 2 I_1 \frac{d \operatorname{grad}_s \rho}{dP} - [\overline{(\operatorname{grad}_s \rho}^2 - 2\rho]\, I_2 \sigma - 3 , \end{aligned}$$

ove $I_2\sigma$, come sappiamo, misura la curvatura totale.

Occorre notare che se s' introduce la derivata superficiale d' un vettore mediante la definizione

$$\left(\frac{dv}{dP}\right)_s = \frac{dv}{dP} - \mathrm{H}\left(n, \frac{dv}{dP}\, n\right),$$

si ha per le cose dette dianzi

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \operatorname{grad}_s z}{dP}\right)_s &= \frac{d \operatorname{grad}_s z}{dP} \\ \left(\frac{d \operatorname{grad}_s \rho}{dP}\right)_s &= \frac{d \operatorname{grad}_s \rho}{dP} - \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}), \end{aligned}$$

e perciò si vede che anche ***gli invarianti primo e secondo delle derivate superficiali*** sono ***invarianti di flessione.***

---

[1] Si tengano presenti le relazioni

$$(\operatorname{grad}_s z)^2 = 1 - (k \times n)^2, \quad (\operatorname{grad}_s \rho)^2 = 2\rho - f^2 .$$

In particolare si ha

$$\mathrm{I}_2\left(\frac{d\,\mathrm{grad}_s\,\rho}{dP}\right)_s = \mathrm{I}_2\,\frac{d\,\mathrm{grad}_s\,\rho}{dP} - \mathrm{I}_1\,\frac{d\,\mathrm{grad}_s\,\rho}{dP} + 1\,;$$

epperò la seconda delle (14) espressa con le derivate superficiali diventa

$$(14')\quad \mathrm{I}_2\left(\frac{d\,\mathrm{grad}_s\,\rho}{dP}\right)_s = \mathrm{I}_1\left(\frac{d\,\mathrm{grad}_s\,\rho}{dP}\right)_s - [\overline{\mathrm{grad}_s\,\rho}^2 - 2\rho]\,\mathrm{I}_2\sigma - 1$$

6. Problemi relativi alla applicabilità.

I principali problemi che si presentano nella teoria della applicabilità sono i seguenti:

1) date due superficie, riconoscere se sono applicabili l'una sull'altra;

2) determinare tutte le superficie applicabili sopra una superficie data;

3) deformare per flessione una superficie in guisa che una sua linea acquisti una data forma o proprietà prestabilita;

4) determinare tutte le coppie (S) e (S_0) di superficie applicabili tali che, quando (S_0) rotola su (S), un punto o una retta rigidamente collegati con (S_0) descrivano rispettivamente una superficie o una congruenza rettilinea aventi proprietà prestabilite.

Le considerazioni degli articoli precedenti consentono di risolvere o di discutere questi problemi; ma qui non vogliamo farne una trattazione completa, per non uscire dai limiti del nostro programma ([1]). Considereremo soltanto in succinto il primo problema, che si risolve compiutamente, e qualche caso particolare dell'ultimo.

Riguardo al primo problema, siccome la curvatura totale C e $(\mathrm{grad}_s\,C)^2$ sono invarianti di flessione, dovrà esistere una

---

([1]) Vedi L. Bianchi « Lezioni di geom. differenziale » e la Memoria « Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili ». Rend. Cir. Mat. Palermo, 1914, 2ª serie.

corrispondenza fra i punti $P(u, v)$ di (S) e $P_0(u_0, v_0)$ di (S_0) che renda soddisfatte le uguaglianze

$$
(15) \qquad \begin{gathered} C(u, v) = C_0(u_0, v_0) \\ (\operatorname{grad}_s C)^2 = (\operatorname{grad}_{s_0} C_0)^2. \end{gathered}
$$

Se queste sono *contraddittorie*, l'applicabilità è manifestamente impossibile. Invece, se sono compatibili e indipendenti, esse stesse devono essere atte a definire la corrispondenza fra i punti di (S) e (S_0). In questo caso, posto per semplicità

$$
C' = (\operatorname{grad}_s C)^2, \quad C_0' = (\operatorname{grad}_{s_0} C_0)^2,
$$

o le relazioni d'invarianza

$$
\begin{gathered} (\operatorname{grad}_s C')^2 = (\operatorname{grad}_{s_0} C_0')^2, \\ \operatorname{grad}_s C \times \operatorname{grad}_s C' = \operatorname{grad}_{s_0} C_0 \times \operatorname{grad}_{s_0} C_0' \end{gathered}
$$

sono conseguenze delle (15), e allora si conclude per l'applicabilità, giacchè in base alla (11) il ds^2 di (S) diventa identico al ds_0^2 di (S_0); oppure non sono conseguenze delle (15), e l'applicabilità diventa impossibile.

Resta da esaminare il caso in cui le (15) non sono indipendenti.

Se questo accade, bisognerà considerare un altro invariante di flessione in luogo di C'. Si può prendere $\operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s C$ e scrivere

$$
(16) \qquad \operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s C = \operatorname{div}_{s_0} \operatorname{grad}_{s_0} C_0 \quad (\Delta_s C = \Delta_{s_0} C_0)
$$

unitamente a $C = C_0$; su questo sistema si ripeterà il ragionamento precedente. Ma se tanto la seconda delle (15) quanto la (16) non sono indipendenti da $C = C_0$, si ha un nuovo caso da esaminare.

Sia dunque

$$
\begin{aligned} (\operatorname{grad}_s C)^2 &= f(C) \qquad & (\operatorname{grad}_{s_0} C_0)^2 &= f(C_0) \\ \Delta_s C &= F(C) & \Delta_{s_0} C_0 &= F(C_0). \end{aligned}
$$

Consideriamo una qualunque superficie la cui curvatura C

soddisfi alle prime due condizioni. Riferiamo i suoi punti alle linee $C = \text{cost}$ e alle loro traiettorie ortogonali $\varphi = \text{cost}$. Si avrà

$$\text{grad}_s\, \varphi \times \text{grad}_s\, C = 0 \quad \text{e quindi} \quad \text{grad}_s\, \varphi = m \cdot \boldsymbol{n} \wedge \text{grad}_s\, C.$$

Da questa si trae

$$(\text{grad}_s\, \varphi)^2 = m^2 (\text{grad}_s\, C)^2 = m^2 f(C);$$

e vogliamo ora determinare il moltiplicatore m.

A tal fine, essendo inversamente

$$\frac{1}{m} \text{grad}_s\, \varphi \wedge \boldsymbol{n} = \text{grad}_s\, C,$$

si ottiene

$$\text{div}_s\, \text{grad}_s\, C = \text{grad}_s \frac{1}{m} \times \text{grad}_s\, \varphi \wedge \boldsymbol{n} = -\text{grad}_s \log m \times \text{grad}_s\, C \text{ (1)},$$

ossia

$$\text{grad}_s \log m \times \text{grad}_s\, C = -F(C).$$

Ma avendosi

$$\text{grad}_s \log m = \frac{\partial \log m}{\partial \varphi} \text{grad}_s\, \varphi + \frac{\partial \log m}{\partial C} \text{grad}_s\, C,$$

risulta sostituendo

$$\frac{\partial \log m}{\partial C} (\text{grad}_s\, C)^2 = -F(C),$$

ossia

$$\frac{\partial \log m}{\partial C} = -\frac{F(C)}{f(C)} = \psi(C);$$

da cui si deduce

$$m = \Phi\, e^{\int \psi(C) dC} = \Phi L(C),$$

ove Φ è funzione della sola φ. E allora, essendo

$$(\text{grad}_s\, C)^2 = f(C), \quad (\text{grad}_s\, \varphi)^2 = \Phi^2 L^2, \quad \text{grad}_s\, C \times \text{grad}_s\, \varphi = 0,$$

---

(1) perchè $\text{div}_s\, (\text{grad}_s\, \varphi \wedge \boldsymbol{n}) = 0$.

risulta in base alla (11)

$$ds^2 = \frac{dC^2}{f(C)} + \frac{d\varphi^2}{\Phi^2 L^2};$$

talchè con un opportuno cambiamento di parametri $C = h(u)$, $\Phi = h_1(v)$ si avrà

$$ds^2 = du^2 + R^2(v)dv^2.$$

Questo elemento lineare appartiene alle superficie di rotazione (Cap. III, n. 5); perciò si conclude che *le superficie considerate sono applicabili sopra una superficie di rotazione, la cui linea meridiana dipende esclusivamente da $F(C)$ e $f(C)$.*

Risulta di qui che le linee $\varphi =$ cost sono geodetiche di (S), cosa che si poteva vedere fin da principio.

Da questo teorema risulta subito: *le due considerate superficie (S) e (S_0) sono sempre applicabili l'una sull'altra, perchè sono tutte e due applicabili sulla stessa superficie di rotazione, e ciò in infiniti modi.*

7. Caso delle superficie a curvatura costante.

Si dimostra che *due superficie aventi la stessa curvatura costante sono sempre applicabili l'una sull'altra in una tripla infinità di modi.* La semplice e diretta dimostrazione data dal BIANCHI è la seguente.

Riferiamo i punti di (S) a una famiglia di geodetiche e alle loro traiettorie ortogonali; avremo per cose note (Cap. III, n. 2)

$$dP = \boldsymbol{a}du + \sqrt{G}\boldsymbol{b}dv \quad (\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = 1, \ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0) \tag{17}$$

ove $v =$ cost sono le geodetiche, du il loro elemento d'arco. Si può fare la scelta in guisa che la particolare linea $u = 0$

---

(1) Si ricordi (Cap. II, n. 13) che le curvature tangenziali sono in generale (quando $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

sia essa stessa una geodetica e che il parametro v sia l'arco di questa linea contato da una origine fissa O. Allora, essendo nulla la curvatura tangenziale di $u=0$ e $(dP)_{u=0}=dv$, si ha [1]

$$\text{(o)} \qquad \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0}=0, \qquad \left(\sqrt{G}\right)_{u=0}=1.$$

Dalla formula di GAUSS (Cap. II, n. 13, (II)), posto $\frac{1}{r_1 r_2}=C$, si ricava nel caso presente

$$(18)\, C=-\frac{\partial\frac{1}{g_2}}{\partial u}-\left(\frac{1}{g_2}\right)^2=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Ora distinguiamo i tre casi $C=0$, $C>0$, $C<0$.

Se è $C=0$, risulta subito integrando

$$\sqrt{G}=f(v)u+f_1(v).$$

Ma per soddisfare alle (o) bisogna prendere $f(v)=0$, $f_1(v)=1$, epperò $\sqrt{G}=1$.

L'elemento (17) diventa quello del piano; la (S) è applicabile sul piano, ossia è una sviluppabile.

Se è $C=\frac{1}{R^2}>0$, si ricava integrando la (18),

$$\sqrt{G}=f(v)\cos\frac{u}{R}+f_1(v)\,\mathrm{sen}\,\frac{u}{R},$$

che per le (o) si riduce a

$$\sqrt{G}=\cos\frac{u}{R}.$$

Lo spostamento

$$dP=adu+\cos\frac{u}{R}\cdot bdv$$

compete manifestamente alla sfera di raggio R; onde si conclude:

Le superficie a curvatura costante positiva $1/R^2$ *sono applicabili sulla sfera di raggio* R, *epperò l'una sull'altra.*

Sia infine $C = -\frac{1}{R^2} < 0$. Si ricava nello stesso modo

$$\sqrt{G} = \operatorname{senh} \frac{u}{R} \qquad \text{(seno iperbolico)}$$

e quindi

$$dP = a du + \operatorname{senh} \frac{u}{R} \cdot b dv.$$

Dunque *lo spostamento sopra ogni superficie a curvatura costante negativa è riducibile a questa forma*, che si dice appartenere alla *superficie pseudosferica di raggio R*. Esse dunque sono applicabili l'una sull'altra, e l'infinità dei modi di applicabilità risulta dalla arbitraria scelta della famiglia di geodetiche sopra considerata. Per lo studio di queste superficie il lettore potrà vedere il classico libro del Bianchi.

8. Problema di Bianchi-Calò.

Passando ora a trattare problemi del tipo 4) enunciato al n. 6, consideriamo il seguente *problema di* Calò: *trovare le coppie* (S) *e* (S_0) *di superficie applicabili, tali che la distanza di un punto qualunque* P *di* (S) *da un piano fisso* (π) *uguagli la distanza del punto corrispondente* P_0 *di* (S_0) *da un punto fisso* O.

Sia k il vettore unitario normale al detto piano, le condizioni del problema sono

$$(dP)^2 = (dP_0)^2, \quad (k \times (P - O))^2 = (P_0 - O)^2. \tag{19}$$

Differenziando la seconda si ottiene

$$k \times dP = \frac{(P_0 - O) \times dP_0}{k \times (P - O)}.$$

E siccome

$$\pm k \times (P - O) = \operatorname{mod} P - O), \quad \operatorname{mod} dP = \operatorname{mod} dP_0,$$

si conclude che i segmenti condotti per i punti P normalmente al piano (π) hanno la stessa giacitura, rispetto agli elementi dP del piano tangente in P, come i segmenti (uguali) OP_0 congiungenti i punti P_0 con O rispetto al piano tangente in P_0 a (S_0). In base a questo il problema enunciato equivale al seguente: ***dato un piano fisso*** (π), ***trovare una superficie*** (S) ***tale che, immaginando i segmenti*** PM ***tirati dai punti*** P ***normalmente a*** (π) ***invariabilmente collegati alla*** (S) ***nelle sue flessioni, esista una deformata*** (S_0) ***di*** (S) ***per la quale tutte le estremità*** M ***si uniscano in un sol punto*** O.

Allora è facile comprendere che facendo rotolare la (S_0) sulla (S) (i punti di contatto dovranno essere i punti corrispondenti), il punto O trascinato da (S_0) (invariabilmente collegato con essa) nelle sue ∞^2 posizioni descriverà il piano (π); epperò il problema di CALÒ è equivalente a quest'altro del BIANCHI: ***determinare tutte le coppie*** (S) ***e*** (S_0) ***di superficie applicabili tali che un certo punto O trascinato da*** (S_0) ***nel suo rotolamento su*** (S) ***descriva un piano.***

Scriviamo la seconda delle (19) sotto la forma più semplice

$$z^2 = 2\rho_0;$$

ne deduciamo [1]

$$z \operatorname{grad}_S z = \mathrm{K} \frac{dP_0}{dP} (\operatorname{grad}_0 \rho_0);$$

ossia, per la proprietà di $\beta = \dfrac{dP_0}{dP}$ (n. 3),

$$\beta(z \operatorname{grad}_S z) = \operatorname{grad}_0 \rho_0;$$

cosicchè $\operatorname{grad}_0 \rho_0$ e $z \operatorname{grad}_S z$ sono vettori tangenziali corrispondenti rispetto alla omografia β della applicabilità. Allora, applicando le (7) e (9), risulta

$$\mathrm{I}_1 \frac{d \operatorname{grad}_0 \rho_0}{dP_0} = \mathrm{I}_1 \frac{d(z \operatorname{grad}_S z)}{dP}, \quad \mathrm{I}_2 \frac{d \operatorname{grad}_0 \rho_0}{dP_0} = \mathrm{I}_2 \frac{d(z \operatorname{grad}_S z)}{dP}.$$

---

[1] In generale è $\operatorname{grad}_P \varphi = K \dfrac{dP_0}{dP} (\operatorname{grad}_{P_0} \varphi)$. Per semplicità, in luogo dell'indice s_0 scriviamo soltanto 0.

Dopo ciò, se nella (14), poniamo ρ_0 e P_0 in luogo di ρ e P, e teniamo conto delle precedenti, si ottiene [1]

$$\mathrm{I}_2 \frac{d(z \operatorname{grad}_s z)}{dP} - \mathrm{I}_1 \frac{d(z \operatorname{grad} z)}{dP} = (z^2 - \operatorname{grad}_0{}^2 \rho_0)\, \mathrm{I}_2\sigma_0 - 1.$$

Ma

$$(\operatorname{grad}_0 \rho_0)^2 = \beta(z \operatorname{grad}_s z) \times \beta(z \operatorname{grad}_s z) = (z \operatorname{grad}_s z)^2 \quad (\mathrm{K}\beta \cdot \beta = 1)$$

$$\mathrm{I}_2\sigma_0 = \mathrm{I}_2\sigma = \frac{1}{1 - (\operatorname{grad}_s z)^2}\, \mathrm{I}_2 \frac{d \operatorname{grad}_s z}{dP}$$

in virtù della prima delle (14) e perchè le curvature totali sono uguali nei punti corrispondenti; perciò risulta

$$(20) \quad \mathrm{I}_1 \frac{d(z \operatorname{grad}_s z)}{dP} - \mathrm{I}_2 \frac{d(z \operatorname{grad}_s z)}{dP} = 1 - z^2 \mathrm{I}_2 \frac{d \operatorname{grad}_s z}{dP}.$$

È in forma assoluta l'equazione differenziale del 2° ordine a cui soddisfano tutte le superficie (S).

Può assumere altre forme. Poniamo per brevità

$$\operatorname{grad}_s z = u, \quad k \times n = Z;$$

si ha

$$z^2 \mathrm{I}_2 \frac{du}{dP} = \mathrm{I}_2 \left(z \frac{du}{dP}\right) = \mathrm{I}_2 \left(\frac{dzu}{dP} - \mathrm{H}\,(u, u)\right)$$

$$= \mathrm{I}_2 \frac{dzu}{dP} - \mathrm{I}_1 \frac{dzu}{dP} \cdot u^2 + u \times \frac{dzu}{dP} u$$

con $u^2 = 1 - Z^2$, come si è veduto. Allora sostituendo si ottiene

$$1 = Z^2 \cdot \mathrm{I}_1 \frac{dzu}{dP} + u \times \frac{dzu}{dP} u,$$

e sviluppando

$$1 = z Z^2 \mathrm{I}_1 \frac{du}{dP} + Z^2 u^2 + z u \times \frac{du}{dP} u + u^4.$$

---

[1] Qui per semplicità si è tralasciato l'indice *s*, ma s' intende che sono derivate superficiali.

Ma essendo $u = k - Zn$, risulta anche

$$\sigma u = \sigma k, \quad \frac{du}{dP} = -Z\sigma - \mathrm{H}(\mathrm{grad}_s Z, n),$$

e quindi

$$\frac{du}{dP} u \times u = -Z \cdot \sigma k \times k.$$

Dopo ciò si ottiene infine, riponendo i simboli primitivi,

$$\text{(21)} \qquad \frac{k \times n}{z} + (k \times n)^2 \cdot \mathrm{I}_1 \sigma + \sigma k \times k = 0,$$

che è un'altra forma della (20), e si presta più facilmente ad essere tradotta in un qualunque sistema di coordinate.

Più semplice è prendere l'equazione della (S) in coordinate cartesiane $z = z(x, y)$, equivalente a $x = u$, $y = v$, $z = z(u, v)$; allora è

$$dP = (i + pk)dx + (j + qk)dy \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$P_x' = i + pk, \quad P_y' = j + qk$$

$$n = Xi + Yj + Zk = \frac{-pi - qj + k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$k = -Z(XP_x' + YP_y' - n).$$

Con facile sviluppo si trova l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1 + p^2 + q^2}{z},$$

che mediante la sostituzione $\varphi = \log z$ si riduce a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = e^{-2\varphi}.$$

L'integrale di questa è noto, e si ha

$$z = \frac{\zeta^2 + \zeta_1^2 + 1}{2\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}}$$

essendo $\zeta = x + iy$ e ζ_1 la coniugata. Così i problemi enunciati son risoluti.

In maniera analoga si può risolvere l'altro problema di BIANCHI: ***Trovare tutte le coppie (S) e (S₀) di superficie applicabili, per le quali il punto O, trasportato da (S₀), descrive una sfera;*** equivalente a quest'altro di CALÒ: ***Trovare le coppie (S) e (S₀) di superficie applicabili, per le quali sia costante la somma o la differenza delle distanze di due punti corrispondenti da due centri fissi.*** Ma qui non ne diremo altro. Il lettore potrà vedere la memoria citata.

Capitolo VI.

Congruenze di rette.

1. L'omografia di una congruenza [1].

Se da ogni punto P d'una regione aciclica dello spazio si immagina tirata una retta avente la direzione e il verso d'un vettore unitario $u(P)$ (funzione regolare di P), si viene a costruire in massima un *complesso di rette* (∞^3). Per lo studio di questo è fondamentale l'omografia vettoriale

$$\lambda = \frac{du}{dP},$$

che definisce, mediante la relazione $\lambda dP = du$, l'incremento du corrispondente a dP. Essendo $u^2 = 1$, si deduce

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{K}\frac{du}{dP}u = \mathrm{K}\lambda u = 0$$

e quindi
$$\lambda v \times u = 0,$$

ossia ogni vettore v vien trasformato in un altro perpendicolare a u.

Ne consegue che *l'invariante terzo è nullo*; inoltre dalla nota formula

$$\mathrm{R}\lambda = \mathrm{I}_2\lambda - \mathrm{I}_1\lambda\cdot\mathrm{K}\lambda + \mathrm{K}\lambda^2,$$

si deduce

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{R}\lambda u = \mathrm{I}_2\lambda\cdot u.$$

---

[1] Le congruenze furono studiate con questi metodi da M. Pieri « Sulla rapp. vettoriale delle congruenze di raggi ». Rend. Cir. Mat. Palermo, 1912, 1° sem.

Ma qui dobbiamo considerare il caso particolare caratterizzato dalla condizione

$$\frac{du}{dP}u = \lambda u = 0. \tag{3}$$

Allora il complesso si riduce a ∞^2 rette, e prende perciò il nome di *congruenza*. Invero, lungo ogni retta (P, u) il vettore u non varia, essendo nulla la derivata di u nella direzione u; cosicchè le rette non possono essere che in numero di ∞^2.

Tagliando la congruenza con una opportuna superficie (S), ciascuna retta ha un punto P su (S). Viceversa: presa una (S) e tirata per ogni suo punto una retta parallela a un dato vettore $u(P)$, si viene a costruire una congruenza, giacchè $\lambda u = 0$. Perciò u e λ si possono pensare funzioni di due parametri u e v; quegli stessi che individuano i punti P di (S); la quale in questo caso sarà detta *superficie base.*

L'omografia λ della congruenza non è in massima dilatazione. Essendo

$$(\operatorname{rot} u)\wedge = \frac{du}{dP} - \mathrm{K}\frac{du}{dP},$$

segue

$$\operatorname{rot} u \wedge u = 0,$$

ossia

$$\operatorname{rot} u = 2fu \text{ (}^1\text{)}. \tag{4}$$

2. Congruenze normali.

In particolare può essere $\operatorname{rot} u = 0$. Questo accade solo quando esiste una superficie (Σ) che taglia ortogonalmente

---

[1] Occorre notare che, quando ci si riferisce a una (S), la derivata superficiale di u è definita da

$$\left(\frac{du}{dP}\right)_s = \frac{du}{dP} - \mathrm{H}\left(n, \frac{du}{dP}n\right) \qquad n = \text{norm. a } (S)$$

ossia

$$\lambda_s = \lambda - \mathrm{H}\left(n, \frac{du}{dP}n\right);$$

tutte le rette della congruenza. Questa allora vien detta *congruenza normale*. Invero sia (S) una superficie base. Dalla formula di definizione

$$\mathrm{rot}_s\, u = \mathrm{rot}\, u - n \wedge \frac{du}{dP} n, \quad n = \mathrm{norm.\, a}\,(S);$$

ne viene

$$\mathrm{rot}_s\, u \times n = 0\,; \quad \text{ossia} \quad \mathrm{div}_s\,(n \wedge u) = 0. \tag{5}$$

Ma questa è la condizione perchè $u \times dP$ sia differenziale esatto su (S); ne consegue che le superficie $\varphi = \mathrm{cost}$ definite da

$$u \times dP = d\varphi,$$

tagliano ortogonalmente la congruenza. Sono le superficie luogo dei punti

$$Q = P - \varphi u,$$

giacchè

$$dQ \times u = u \times dP - d\varphi = 0.$$

Si conclude: ***condizione necessaria e sufficiente affinchè una congruenza sia normale è che abbia per omografia una dilatazione. Riferendosi a una superficie base, questa condizione è anche espressa da*** $n \times \mathrm{rot}_s\, u = 0$.

La precedente condizione equivale a

$$\mathrm{mod}\,(dP) \cdot \cos\,(u,\, dP) = d\varphi,$$

epperò resta sempre soddisfatta quando si deforma la con-

---

epperò per uno spostamento dP su (S) si ha sempre $\lambda_s dP = \lambda dP = du$. Operando dunque su spostamenti dP appartenenti ad (S) sarà indifferente scrivere λ o λ_s. Ma si osservi che non è $\lambda_s u = 0$, come $\lambda u = 0$, perchè

$$\lambda_s u = -\,\mathrm{H}(n,\, \lambda n) u = -\,(n \times u) \lambda n.$$

Si vede così che $\lambda_s u$ è nullo solo per $\lambda n = 0$ o per $n \times u = 0$. Infine per a tangenziale ad (S) si ha

$$\lambda_s a = \lambda a, \quad \lambda_s a \times u = a \times \mathrm{K}\lambda u = 0, \qquad (\mathrm{K}\lambda_s u = \mathrm{K}\lambda u)$$

ossia $\lambda_s a$ è normale ad u.

gruenza in modo che $\mathrm{mod}(dP)$ e $\cos(u, dP)$ rimangano invariati. Sussiste perciò il seguente teorema di BELTRAMI:

Se si flette la superficie base e questa trasporta seco le rette della congruenza, supposte con essa invariabilmente collegate, la nuova congruenza che ne risulta è ancora normale; ed anzi i punti che prima stavano sopra una superficie ortogonale alla congruenza si ritrovano sopra una superficie ortogonale alla nuova congruenza.

Supponiamo ora che le rette della congruenza siano le traiettorie di raggi luminosi che vanno a colpire la (S), pensata come superficie riflettente o rifrangente. Se v è la direzione di u riflesso o rifratto in P, e $1/i$ l'indice di rifrazione, le note leggi fisiche sono compendiate nella relazione

$$v \wedge n = i(u \wedge n). \tag{6}$$

Perciò nel caso di $i = \mathrm{cost}$, se è $\mathrm{div}_S (u \wedge n) = 0$, risulta anche $\mathrm{div}_S (v \wedge n) = 0$, condizione di normalità per la congruenza (P, v). E lo stesso accade se i, pur non essendo costante, verifica l'equazione

$$\mathrm{grad}_S\, i \times u \wedge n = 0.$$

Cosicchè vale il seguente *teorema di* MALUS-DUPIN: *Ogni congruenza normale resta normale dopo rifrazione (o riflessione) attraverso a una superficie, sia che l'indice di rifrazione sia costante ovunque, sia che si mantenga costante solamente lungo le traiettorie ortogonali alle curve inviluppo sopra (S) delle proiezioni ortogonali dei raggi sui piani tangenti.*

Si noti che la (6) è equivalente a

$$v \times dP = iu \times dP.$$

E a proposito di rifrazione si può osservare che due congruenze non normali (P, u) e (P_1, u_1) rifrangendosi su due certe superficie (S) e (S_1) potranno trasformarsi in una medesima congruenza (P, v) quando siano verificate le condizioni

$$v \times dP = iu \times dP, \quad v \times dP_1 = i_1 u_1 \times dP_1 .$$

Il Levi-Civita ha dimostrato che questo è possibile in infiniti modi; onde sussiste il teorema:

Due congruenze non normali sono sempre deducibili l' una dall' altra con due rifrazioni (con una se sono normali); e si può disporre delle due superficie rifrangenti in modo che ∞^1 rette della prima congruenza si trasformino in ∞^1 rette della seconda (1).

3. Sviluppabili di una congruenza.

Cerchiamo la minima distanza ε fra la retta (P, u) e un'altra infinitamente vicina $(P + dP, u + du)$. Sia a la sua direzione.

Si ha

$$a \times u = 0, \quad a \times du = 0, \quad a^2 = 1,$$

da cui

$$a = -\frac{u \wedge du}{\mathrm{mod}\,(u \wedge du)} = -\frac{u \wedge \lambda dP}{\mathrm{mod}\,(du)}, \tag{7}$$

giacchè

$$\mathrm{sen}(u, du) = 1.$$

Di qui si trae manifestamente

$$\varepsilon = a \times dP = -\frac{u \wedge \lambda dP \times dP}{\mathrm{mod}\,(du)}. \tag{8}$$

Uguagliata a zero dà le due direzioni dP lungo le quali stanno le due rette che incontrano la retta (P, u). Epperò, se sono reali, *si conclude che le rette della congruenza si possono distribuire in una doppia famiglia di sviluppabili.* La loro equazione differenziale è

$$u \wedge \lambda dP \times dP = 0. \tag{9}$$

---

(1) « Rend. R. Acc. Lincei », 1900: *Complementi al teorema di Malus-Dupin.*

Se la si vuol scrivere sotto forma più sviluppata, basta osservare che è $u = m u_u' \wedge u_v'$ (riferendosi alla superficie base) in conseguenza delle relazioni $u \times u_u' = 0$ $u \times u_v' = 0$; epperò si ha

$$u \wedge du = m(u_u' \times du) u_v' - m(u_v' \times du) u_u';$$

cosicchè la (9) diventa

$$(9') \quad (u_u' \times du)(u_v' \times dP) - (u_v' \times du)(u_u' \times dP) = 0.$$

I punti F_1 e F_2, supposti reali, ove la (P, u) è incontrata da due rette infinitamente vicine, si dicono *fuochi*. I loro luoghi sono due superficie (S_1) e (S_2) (o una superficie a due falde) dette le *superficie focali* della congruenza; ciascuna contiene gli spigoli di regresso di una famiglia delle accennate sviluppabili. Si chiamano poi *piani focali* i due piani passanti per (P, u) e tangenti alle due sviluppabili. Manifestamente essi sono anche tangenti in F_1 e F_2 alle superficie focali.

Si vede inoltre che i piani tangenti a (S_1) lungo uno spigolo di regresso (L_1) sono i piani osculatori del corrispondente spigolo di regresso (L_2) su (S_2); epperò le *due famiglie di sviluppabili tagliano ciascuna superficie focale secondo un sistema di linee coniugate.*

4. Piedi delle minime distanze; punti limiti.

Sia Q il piede della minima distanza, considerata al numero precedente, sulla retta (P, u) contata da P positivamente nel senso di u; e siano $Q_1 = Q + \varepsilon a$ e $P_1 = P + dP$ i corrispondenti punti sulla retta $(P + dP, u + du)$. Dal quadrilatero chiuso PQQ_1P_1 si trae

$$ru + \varepsilon a - (r + dr)(u + du) - dP = 0, \quad (r = PQ)$$

ossia

$$\varepsilon a - r du - dr \cdot u - dP = 0,$$

tralasciando gl'infinitesimi del 2° ordine. Cosicchè, moltiplicando scalarmente per du, risulta

$$\varepsilon u \times du - r du \times du - du \times dP = 0.$$

Ma per la (7) il primo termine è nullo; perciò si ricava

$$r = -\frac{du \times dP}{du \times du} = -\frac{\lambda dP \times dP}{\lambda dP \times \lambda dP}. \tag{10}$$

Le due forme quadratiche $\lambda dP \times dP$ e $\lambda dP \times \lambda dP$, espresse mediante i due parametri u e v della superficie base, sono quelle che nella ordinaria esposizione di questa teoria sono chiamate le *forme fondamentali della congruenza* [1].

Per il calcolo di r relativa a una retta (P, u) si può scegliere il dP come si vuole, cioè indipendentemente dalla superficie base. Allora consideriamo le direzioni unite dP e δP della omografia λ (e non di λ_s). Una è u; le altre due, se sono reali, soddisfano alle condizioni

$$\lambda dP = -\frac{1}{\rho_1} dP, \quad \lambda \delta P = -\frac{1}{\rho_2} \delta P.$$

Per cose già dette, dP e δP risultano perpendicolari a u. Le grandezze $1/\rho_1$ e $1/\rho_2$ sono le radici dell'equazione

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + I_1 \lambda \cdot \frac{1}{\rho} + I_2 \lambda = 0. \tag{10'}$$

Calcolando r per queste direzioni, si ha subito

$$r_1 = \rho_1, \quad r_2 = \rho_2.$$

E siccome per esse risulta

$$\varepsilon \equiv u \wedge \lambda dP \times dP = -\frac{1}{\rho} u \wedge dP \times dP = 0,$$

---

[1] Vedi Bianchi, Vol. II. — Le prime ricerche fondamentali sulle congruenze sono del Kummer: *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.* « Crelles Journal », 57.

si conclude che ρ_1 e ρ_2 *sono le distanze da P dei due fuochi F_1 e F_2 relativi a una fissata retta (P, u). Se è $(I_1\lambda)^2 - 4I_2\lambda = 0$, i due fuochi coincidono.*

Le congruenze che godono di quest'ultima proprietà si dicono ***paraboliche.*** Son definite dalle due equazioni differenziali

$$\left(I_1 \frac{du}{dP}\right)^2 - 4I_2 \frac{du}{dP} = 0, \quad \frac{du}{dP} u = 0,$$

essendo u il vettore incognito.

Se poi accade che λ trasformi ogni vettore normale ad u in un vettore parallelo ad u (omologia vettoriale), allora tutte le rette circonvicine a (P, u) incontreranno questa retta in un unico fuoco, ond'essa può dirsi ***retta ombelicale.*** Quando tutte le rette sono ombelicali, la congruenza è una ***stella di raggi.***

Consideriamo ora le direzioni unite della dilatazione di λ (vedi (4)):

$$D\lambda = \lambda - fu\wedge;$$

delle quali una è u. Siano i e j le altre due (normali fra loro e ad $u = i \wedge j$). Si ha

$$D\lambda i = h_1 i, \quad D\lambda j = h_2 j,$$

ove h_1 e h_2 sono le radici della equazione

$$h^2 - I_1 D\lambda \cdot h + I_2 D\lambda = 0.$$

Si deduce

$$\lambda i = h_1 i + fu \wedge i, \quad \lambda j = h_2 j + fu \wedge j$$

ossia

(11) $$\lambda i = h_1 i + fj, \quad \lambda j = h_2 j - fi.$$

Posto generalmente

$$dP = xi + yj + zu,$$

si trae per le precedenti

$$\lambda dP = du = (h_1 x - fy)i + (h_2 y + fx)j;$$

cosicchè dette $q\cos\varphi$ e $q\,\mathrm{sen}\,\varphi$ le proiezioni di $d\boldsymbol{u}$ su $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ (q infinitesimo), si ha

$$q\cos\varphi = h_1 x - f y, \quad q\,\mathrm{sen}\,\varphi = f x + h_2 y.$$

Risolvendole rispetto a x e y, e sostituendo in dP, risulta

$$(12)\quad dP = \frac{q}{h_1 h_2 + f^2}[(h_2\cos\varphi + f\,\mathrm{sen}\,\varphi)\boldsymbol{i} + (h_1\,\mathrm{sen}\,\varphi - f\cos\varphi)\boldsymbol{j}] + z\boldsymbol{u}$$

insieme con

$$(12')\qquad d\boldsymbol{u} = q(\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\cdot\boldsymbol{j}) \qquad (q = (d\boldsymbol{u})^2).$$

Si noti che il denominatore è l'invariante secondo di λ, perchè

$$\mathrm{I}_2\mathrm{D}\lambda = h_1 h_2, \quad \mathrm{I}_2\lambda = \mathrm{I}_2\mathrm{D}\lambda + (\mathrm{V}\lambda)^2 = h_1 h_2 + f^2.$$

E allora calcolando r con queste espressioni di dP e $d\boldsymbol{u}$, si ottiene subito

$$(13)\qquad r = -\frac{1}{\mathrm{I}_2\lambda}(h_2\cos^2\varphi + h_1\,\mathrm{sen}^2\,\varphi).$$

Ne consegue che i valori estremi di r corrispondono a $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$, e sono

$$r_2 = -\frac{h_2}{\mathrm{I}_2\lambda}, \quad r_1 = -\frac{h_1}{\mathrm{I}_2\lambda}.$$

I punti

$$Q_1 = P - \frac{h_1}{\mathrm{I}_2\lambda}, \quad Q_2 = P - \frac{h_2}{\mathrm{I}_2\lambda}.$$

son detti i *punti limiti*. Si ha dunque il teorema:

Se $\mathrm{I}_2\lambda \neq 0$, *i piedi delle minime distanze della retta* $(P, \boldsymbol{u})$ *dalle altre infinitamente vicine a questa cadono tutti nell'intervallo compreso fra i punti limiti.*

La (13) è chiamata la *formula di* HAMILTON.

Si noti che in corrispondenza dei punti limiti si ha

$$\boldsymbol{a}_1 \equiv \boldsymbol{u}\wedge d\boldsymbol{u} = q\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{i} = q\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a}_2 \equiv -q\boldsymbol{i},$$

epperò *le due direzioni delle minime distanze corrispondenti ai punti limiti sono ortogonali fra loro.*

I piani per (P, u) paralleli a a_1 e a_2 son detti i *piani principali*, e le direzioni i e j le *direzioni principali* (1).

Dalle relazioni

$$\mathrm{I}_1\lambda = -\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right), \quad \mathrm{I}_2\lambda = \frac{1}{\rho_1\rho_2}, \quad \mathrm{I}_1\lambda = \mathrm{I}_1\mathrm{D}\lambda = h_1 + h_2,$$

si deduce

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = -\frac{\mathrm{I}_1\lambda}{2\mathrm{I}_2\lambda} = \frac{r_1 + r_2}{2};$$

epperò *i fuochi e i punti limiti hanno sempre lo stesso punto medio.* Il luogo dei punti medi è detto *superficie media.*

5. Congruenze isotrope di Ribaucour.

Si osservi ora che, supposto sempre $\mathrm{I}_2\lambda \neq 0$, i due punti limiti coincideranno quando sia $h_1 = h_2$ $(f \neq 0)$, nel qual caso la $\mathrm{D}\lambda$ è *omologia vettoriale* (e in tal caso soltanto), ossia tutte le direzioni normali ad u sono unite. Tutti i piedi delle minime distanze coincidono in un punto solo su (P, u). Se per tutte le rette accade questo, la congruenza è detta *isotropa* (RIBAUCOUR).

La condizione $h_1 = h_2$, mediante le formule precedenti, si può scrivere sotto la forma

$$\left(\mathrm{I}_1\frac{du}{dP}\right)^2 - 4\mathrm{I}_2\frac{du}{dP} + 4\left(\mathrm{V}\frac{du}{dP}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{du}{dP}u = 0\right),$$

che può chiamarsi perciò l'*equazione differenziale delle congruenze isotrope.*

Dalle (12) e (12′) si ricava subito

$$u \wedge du \times dP = \frac{q}{\mathrm{I}_2\lambda}\{(h_1 - h_2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + f\},$$

(1) È quasi intuitivo che le direzioni unite i e j di $\mathrm{D}\lambda$ sono le stesse lungo ogni retta della congruenza, nondimeno sarebbe facile dimostrare che $\dfrac{di}{dP}u$ e $\dfrac{dj}{dP}u$ sono nulli.

epperò, se $h_1 = h_2$, l'equazione delle sviluppabili diventa

$$fq = f(du)^2 = 0;$$

la quale esprime il teorema di RIBAUCOUR: *Le sviluppabili d'una congruenza isotropa sono immaginarie ed hanno per immagini sulla sfera di raggio uno* ($M - O = u$) *le linee di lunghezza nulla* ($du^2 = 0$).

Se poi si prende per superficie base la *superficie media*, si ha

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r = 0,$$

e quindi per la (10)

$$du \times dP = 0.$$

Posto $M - O = u$ (rappresentazione sferica della congruenza) si ha dunque

$$dM \times dP = 0,$$

la quale esprime quest'altro teorema di RIBAUCOUR: *La superficie media di una congruenza isotropa corrisponde per ortogonalità d'elementi alla sfera; e viceversa.*

Altre proprietà hanno queste congruenze che qui non dimostriamo.

Più generalmente, quando la superficie media (S_m) corrisponde per ortogonalità d'elementi ad un'altra superficie (S) e nei punti corrispondenti le rette della congruenza sono parallele alle normali di (S) (1), si ha una così detta *congruenza di* RIBAUCOUR (la congruenza isotropa è una particolare congruenza di RIBAUCOUR, della quale la (S) è una sfera). Allora detti Q i punti di (S) corrispondenti ai punti P di (S_m), si ha

$$dQ \times dP = 0, \quad dQ \times u = 0,$$

e quindi

$$dQ \equiv u \wedge dP.$$

(1) Queste due proprietà non sono però indipendenti.

Ne consegue che l'equazione $u \wedge dP \times du = 0$ delle sviluppabili diventa su (S) $du \times dQ = 0$, che è l'equazione delle asintotiche di (S). Si conclude pertanto: *Le sviluppabili d'una congruenza di* RIBAUCOUR *corrispondono alle asintotiche della superficie alle cui normali sono parallele le rette della congruenza.*

6. Altre congruenze particolari.

Quando sia $I_2\lambda = 0$ i punti limiti si trovano a distanza infinita; epperò tutti i punti di (P, u) sono piedi delle perpendicolari comuni ad essa e alle rette circonvicine. Allora l'omografia λ è tale che risulta $R\lambda u = 0$ (n. 1), e perciò è doppiamente degenere. Avendosi per definizione e nel caso presente

$$\lambda a \wedge \lambda b = R\lambda(a \wedge b) = R\lambda u = 0$$

per ogni $a \times u = 0$, $b \times u = 0$, il λa risulta parallelo a λb; per conseguenza tutti i vettori $v = la + mb + nu$ vengono trasformati in vettori paralleli a un certo vettore w normale a u (n. 1). Dunque λ sarà una diade, e precisamente

$$\lambda = m\mathrm{H}(w_1, w)$$

con $w_1 \times u = 0$ (perchè $\lambda u = 0$) e $w \times u = 0$; ed essendo

$$I_2\lambda = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = 0, \quad I_1\lambda = -\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = mw_1 \times w,$$

una sola delle grandezze ρ_1 e ρ_2 è infinita (supposto $I_1\lambda \neq 0$). In questo caso dunque *esiste un sol fuoco a distanza finita, ed una delle rette circonvicine a (P, u) è parallela a questa.* Quando ciò avviene per tutte le rette la congruenza si dice *cilindrica*, perchè una delle famiglie di sviluppabili risulta composta di superficie cilindriche.

Il caso che sia $I_1\lambda = 0$ ($\operatorname{div} u = 0$) rientra come caso particolare nel precedente. Infatti dalle note formule [1]

$$I_1(\lambda^2) = (I_1\lambda)^2 - 2I_2\lambda, \quad I_1\left(\lambda \frac{du}{dP}\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div} u \times u = \operatorname{div}(\lambda u) = 0$$

---

[1] A. V. G., Vol. I, pagg. 114, 183.

risulta nel caso presente $I_2\lambda = 0$. Ne segue che tutti e due i fuochi sono all'infinito. La congruenza è detta *solenoidale*, perchè caratterizzata appunto da div $\boldsymbol{u} = 0$ insieme con $\boldsymbol{u}^2 = 1$, $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{u} = 0$.

Il Cisotti *ha dimostrato che le* ∞^2 *rette di qualunque congruenza solenoidale stanno tutte sui piani tangenti ad una medesima superficie sviluppabile; ognuno di essi ne contiene* ∞^1, *e queste sono parallele alle generatrici di contatto* (1). Ma qui non ne diremo altro.

7. Teorema di Guichard.

Assumendo la superficie media della congruenza quale superficie base (luogo dei punti P), i fuochi son definiti da

$$F_1 = P + \rho\boldsymbol{u}, \quad F_2 = P - \rho\boldsymbol{u}.$$

Nella immagine sferica $M - O = \boldsymbol{u}$ le sviluppabili corrispondono al sistema di linee definite dall'equazione differenziale (n. 3)

$$\boldsymbol{u} \wedge dM \times dP = 0. \qquad (dM = d\boldsymbol{u})$$

Siano $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ coteste linee, e sia di conseguenza

$$dM = d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_u' du + \boldsymbol{u}_v' dv,$$

ove son noti $\boldsymbol{u}_u'$ e $\boldsymbol{u}_v'$. Allora si ha manifestamente

$$\frac{\partial}{\partial v}(P + \rho\boldsymbol{u}) = h\boldsymbol{u}, \quad \frac{\partial}{\partial u}(P - \rho\boldsymbol{u}) = m\boldsymbol{u}$$

essendo h e m fattori di proporzionalità. Sviluppando la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}(P_v') = \frac{\partial}{\partial v}(P_u')$$

---

(1) Vedi Pieri, l. c.

e notando che la derivata seconda mista di u si esprime linearmente per u_u', u_v', u [1], si trova

$$2\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}+\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial l}{\partial u}+2F\rho=0$$

$$l=2\frac{\partial\rho}{\partial v}+2h\rho,\qquad m=-2\frac{\partial\rho}{\partial u}-2k\rho$$

essendo F, h e k quantità note. Ne consegue

$$(14)\qquad \begin{aligned} P_u' &= -\left[\frac{\partial\rho}{\partial u}+2k\rho\right]u+\rho u_u' \\ P_v' &= \left[\frac{\partial\rho}{\partial v}+2h\rho\right]u-\rho u_v' \end{aligned}$$

ove ρ soddisfa a l'equazione

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}+h\frac{\partial\rho}{\partial u}+k\frac{\partial\rho}{\partial v}-\left[\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial k}{\partial v}+F\right]\rho=0.$$

Inversamente: *se ρ è **una** soluzione di questa equazione, le* (14) *definiscono per quadratura una congruenza che ha per immagine sferica delle sviluppabili quella assegnata.* È il *teorema di* Guichard, del quale non svilupperemo qui le varie conseguenze [2].

8. Formule fondamentali.

Partendo da un punto P di una fissata retta (P, u) passiamo lungo la direzione principale i in P_1 sulla retta vicinissima; poi da P_1 lungo la direzione principale corrispondente $i(P_1)$ fino a P_2 sulla retta vicinissima, e così via.

---

(1) Derivando $u_u'\times u=0$, $(u_u')^2=E$, $(u_v')^2=G$, $u_u'\times u_v'=2F$.

(2) Vedi l'importante Memoria « Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables » (Ann. École Norm. Sup., t. VI, S. 3ª) e le « Lezioni » del Bianchi.

Si ottiene una curva (C_1) che diremo ***principale relativa a P***. Un'altra (C_2) si otterrà seguendo invece la direzione $j(P)$; e questo si può fare per ogni P. Orbene, nel punto P considerato proiettiamo sul piano normale a (P, u) la curva (C_1). Diremo *curvatura tangenziale* la grandezza

$$\frac{1}{g_1} = \frac{n_1 \times j}{\rho},$$

essendo f il raggio di flessione e n_1 la normale principale di (C_1). Per le formule di FRENET si ha

$$\frac{n_1}{\rho} = \frac{di}{dP} i \quad \text{epperò} \quad \frac{1}{g_1} = \frac{di}{dP} i \times j = -\frac{dj}{dP} i \times i.$$

Analogamente per la (C_2)

$$\frac{1}{g_2} = -i \times \frac{dj}{dP} j = j \times \frac{di}{dP} j.$$

Inoltre essendo (anche in virtù delle (11))

$$\frac{di}{dP} i \times i = 0, \quad \frac{di}{dP} i \times u = \mathrm{K} \frac{di}{dP} u \times i =$$

$$= -\mathrm{K} \frac{du}{dP} i \times i = -i \times \lambda i = -h_1$$

$$\frac{di}{dP} j \times u = -\lambda j \times i = f, \quad \frac{dj}{dP} i \times u = -\lambda i \times j = -f,$$

$$\frac{dj}{dP} j \times j = 0, \quad \frac{dj}{dP} j \times u = -\lambda j \times j = -h_2$$

si può scrivere senz'altro

$$\frac{di}{dP} i = \frac{1}{g_1} j - h_1 u, \quad \frac{dj}{dP} i = -\frac{1}{g_1} i - f u$$

$$\frac{di}{dP} j = \frac{1}{g_2} j + f u, \quad \frac{dj}{dP} j = -\frac{1}{g_2} i - h_2 u$$

che con l'aggiunta delle (11)

$$\frac{du}{dP} i = h_1 i + fj, \quad \frac{du}{dP} j = h_2 j - fi$$

costituiscono le *formule fondamentali* analoghe a quelle ottenute per le superficie (Cap. II, n. 12). Scrivendo le condizioni d'integrabilità si trovano formule analoghe a quelle di CODAZZI (1). Ma su questo non diremo altro.

---

(1) Tali formule furono date la prima volta in una mia Nota « Sopra alcune formule fondam. relat. alle congruenze di rette » Rend. Acc. Lincei, 1899.

Capitolo VII.

Sistemi tripli ortogonali.

1. Una omografia fondamentale.

Pensiamo collegato ad ogni punto P dello spazio euclideo finito o infinito una terna di vettori unitari ortogonali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; così essi saranno funzioni di P. Applicando l'operatore grad alle uguaglianze $\boldsymbol{i}^2 = 1$, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = 0$ ecc., si trovano le solite relazioni, delle quali si fa continuo uso,

$$\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{i} = 0, \quad \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{j} = 0, \quad \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{k} = 0$$

$$(1) \qquad \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{k} + \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{j} = 0, \quad \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{i} + \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{k} = 0,$$

$$\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} + \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{i} = 0.$$

Chiamiamo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ rispettivamente i primi termini di queste tre ultime relazioni, e sia $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$; allora risulta

$$\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{a} = a_2\boldsymbol{w} - a_3\boldsymbol{v}, \text{ ecc..}$$

Se ora ad $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ facciamo corrispondere i vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, veniamo a definire una omografia che diremo $\mathrm{K}\sigma$; onde scriveremo

$$\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}, \quad \mathrm{K}\sigma\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}, \quad \mathrm{K}\sigma\boldsymbol{k} = \boldsymbol{w}.$$

Allora la precedente diventa

$$\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{a} = a_2\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{k} - a_3\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{j} = \mathrm{K}\sigma(a_2\boldsymbol{k} - a_3\boldsymbol{j}) = \mathrm{K}\sigma(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{a})$$

da cui, per l'arbitrarietà di a,

$$\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}=\mathrm{K}\sigma\cdot\boldsymbol{i}\wedge,\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}=-\boldsymbol{i}\wedge\sigma.$$

Si hanno dunque le seguenti *formule fondamentali, dovute a* PENSA [1]:

$$\text{(I)}\qquad \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}=-\boldsymbol{i}\wedge\sigma,\quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dP}=-\boldsymbol{j}\wedge\sigma,\quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}=-\boldsymbol{k}\wedge\sigma;$$

ove σ è una omografia della quale vedremo ora il significato.

Da queste si deduce quest'altro gruppo di formule:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{i}=2\mathrm{V}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}=-2\mathrm{V}(\boldsymbol{i}\wedge\sigma)=(\sigma-\mathrm{I}_1\sigma)\boldsymbol{i}\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{j}=(\sigma-\mathrm{I}_1\sigma)\boldsymbol{j},\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{k}=(\sigma-\mathrm{I}_1\sigma)\boldsymbol{k}\\ &2\mathrm{V}\sigma=\boldsymbol{i}\wedge\sigma\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\wedge\sigma\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\wedge\sigma\boldsymbol{k}\\ &\qquad=\boldsymbol{i}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

$$(2')\qquad \begin{aligned} &\operatorname{div}\boldsymbol{i}=\mathrm{I}_1\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}=\boldsymbol{k}\times\sigma\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}\times\sigma\boldsymbol{k}\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\times\sigma\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}\times\sigma\boldsymbol{i},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\times\sigma\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}\times\sigma\boldsymbol{j}\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\operatorname{rot}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+\operatorname{rot}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=-2\mathrm{I}_1\sigma.\end{aligned}$$

2. Significato cinematico di σ.

Tracciamo per P una curva (L) il cui arco, contato a partire da una data origine e in un dato senso, sarà indicato con s. Allora $\boldsymbol{r}=P'(s)$ è il vettore unitario che definisce la tangente positivo a (L) in P. Applicando le (I) a questo vettore, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\frac{dP}{ds}=\frac{d\boldsymbol{i}}{ds}=-\boldsymbol{i}\wedge\sigma\boldsymbol{r},\quad \frac{d\boldsymbol{j}}{ds}=-\boldsymbol{j}\wedge\sigma\boldsymbol{r},\quad \frac{d\boldsymbol{k}}{ds}=-\boldsymbol{k}\wedge\sigma\boldsymbol{r}.$$

---

[1] Atti R. Acc. Torino, Vol. 49, 1914. Contengono in particolare le formule di FRENET per le curve e le analoghe per le superficie e per le congruenze di rette. Sono, in sostanza, le formule fondamentali di tutta la Geometria differenziale.

Se M è un punto rigidamente collegato con la terna $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ avente l'origine in P, e se si fa muovere questa terna intorno a P per modo che diventi parallela alla corrispondente terna nel punto $P + ds \cdot \boldsymbol{r}$ della linea (L); allora posto

$$M - P = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

si deduce

$$\begin{aligned} dM &= x d\boldsymbol{i} + y d\boldsymbol{j} + z d\boldsymbol{u} = -(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{u}) \wedge \sigma \boldsymbol{r} \cdot ds = \\ &= (P - M) \wedge \sigma \boldsymbol{r} \cdot ds ; \end{aligned}$$

che rappresenta lo spostamento di M nel moto considerato.

Ricordando cose note di cinematica, questa fa vedere che ***il vettore $\sigma \boldsymbol{r} \cdot ds$ definisce la rotazione infinitesima occorrente per rendere la terna $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ relativa a P parallela a quella relativa al punto $P + \boldsymbol{r} ds$, essendo $\boldsymbol{r}$ una direzione qualunque.*** Perciò la σ può chiamarsi l'***omografia delle rotazioni.***

3. Condizione a cui soddisfa l'omografia σ.

Ora si pone la questione: ***a quale condizione deve soddisfare una data omografia σ perchè sia l'omografia di rotazione d'una terna ortogonale unitaria funzione di P?***

Occorre manifestamente che esista una terna $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ soddisfacente insieme con σ alle (I); epperò queste devono risultare integrabili.

Le condizioni d'integrabilità sono:

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP} = \mathrm{Rot}(\mathrm{K}\sigma \cdot \boldsymbol{i} \wedge) = 0, \ \mathrm{Rot}(\mathrm{K}\sigma \cdot \boldsymbol{j} \wedge) = 0, \ \mathrm{Rot}(\mathrm{K}\sigma \cdot \boldsymbol{k} \wedge) = 0.$$

Si deduce per $\boldsymbol{a}$ qualunque costante

$$\mathrm{rot}\,[\mathrm{K}\sigma(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{a})] = 0, \quad \text{ecc.}$$

e sviluppando

$$(3) \qquad (\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\sigma)(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{a}) - 2\mathrm{V}\left(\mathrm{K}\sigma \frac{d(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{a})}{dP}\right) = 0.$$

Ma

$$\frac{d(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{a})}{dP} = -\boldsymbol{a}\wedge\frac{d\boldsymbol{i}}{dP} = \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{i}\wedge\sigma),$$

e in generale

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{i}\wedge\sigma\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a})\sigma\boldsymbol{b} + (\sigma\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{i};$$

perciò

$$\frac{d(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{a})}{dP} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i} - \mathrm{H}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}))\sigma.$$

Ne consegue

$$\mathrm{K}\sigma\frac{d(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{a})}{dP} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i})\mathrm{K}\sigma\cdot\sigma + \mathrm{H}(\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{a}, \mathrm{K}\sigma\boldsymbol{i});$$

cosicchè, essendo, $\mathrm{K}\sigma\cdot\sigma$ dilatazione, il doppio vettore di questa omografia è $\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{a}\wedge\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{i}$, ossia $-\mathrm{RK}\sigma(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{a})$. Dopo ciò la (3) diventa

$$(\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\sigma + \mathrm{RK}\sigma)(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{a}) = 0.$$

Questa deve essere valida cambiando $\boldsymbol{i}$ in $\boldsymbol{j}$, in $\boldsymbol{k}$, e per $\boldsymbol{a}$ qualunque; il che richiede che sia

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\sigma + \mathrm{RK}\sigma = 0. \tag{4}$$

È la condizione richiesta.

4. Terne appartenenti a un sistema triplo ortogonale.
Se le tre famiglie di superficie $\psi_1(P) = u_1$, $\psi_2(P) = u_2$, $\psi_3(P) = u_3$ si tagliano ortogonalmente in ogni loro punto a comune P, si dice che formano un ***sistema triplo ortogonale***. I valori dei parametri $u_1\ u_2\ u_3$ nel punto d'intersezione P si chiamano le *coordinate curvilinee* di quel punto; cosicchè i punti dello spazio che si considera risultano funzioni dei tre parametri $u_1\ u_2\ u_3$. Le tangenti in P alle tre linee rappresentanti le mutue intersezioni di quelle superficie sono ortogonali fra loro. Le loro direzioni positive saranno prese nel senso delle u crescenti e saranno indicate coi vettori unitari $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Abbiamo così collegato

ad ogni punto P dello spazio una terna $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ortogonale unitaria, epperò saranno valide per essa le formule dei numeri precedenti. È detta la ***terna principale*** in P del sistema. Resta da vedere a quali particolari condizioni soddisfa l'omografia σ nel caso presente.

Siccome $\operatorname{grad} u_1$, $\operatorname{grad} u_2$, $\operatorname{grad} u_3$ sono vettori normali in P alle rispettive superficie $\psi_1 = u_1$, $\psi_2 = u_2$, $\psi_3 = u_3$, essi saranno paralleli a $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; onde si avrà

$$(5) \qquad \operatorname{grad} u_1 = \frac{\boldsymbol{i}}{H_1}, \quad \operatorname{grad} u_2 = \frac{\boldsymbol{j}}{H_2}, \quad \operatorname{grad} u_3 = \frac{\boldsymbol{k}}{H_3},$$

ove H_1, H_2, H_3, funzioni di $P\,(u_1\, u_2\, u_3)$, sono i valori reciproci dei moduli di cotesti gradienti. Ne consegue

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{i} = \operatorname{rot}(H_1 \operatorname{grad} u_1) = \operatorname{grad} H_1 \wedge \operatorname{grad} u_1 = \frac{1}{H_1} \operatorname{grad} H_1 \wedge \boldsymbol{i} \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{j} = \frac{1}{H_2} \operatorname{grad} H_2 \wedge \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{k} = \frac{1}{H_3} \operatorname{grad} H_3 \wedge \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

e quindi per le (2) e (2')

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I}_1 \sigma = 0, \qquad &\operatorname{rot} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0 \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0 \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \sigma \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0. \end{aligned}$$

Queste condizioni sono necessarie e sufficienti affinchè le terne $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ siano le terne principali d'un sistema triplo ortogonale.

Per vedere che veramente sono anche sufficienti, basta porre

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{i} = \operatorname{grad} l \wedge \operatorname{grad} m,$$

cosa sempre possibile, come è noto; poi osservare che, essendo per ipotesi $\operatorname{rot} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0$, sarà

$$\boldsymbol{i} = h \operatorname{grad} l + k \operatorname{grad} m$$

e quindi

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{i} = \operatorname{grad} l \wedge \operatorname{grad} m = \operatorname{grad} h \wedge \operatorname{grad} l + \operatorname{grad} k \wedge \operatorname{grad} m.$$

Ne consegue

$$\operatorname{grad} h \times \operatorname{grad} l \wedge \operatorname{grad} m = 0, \quad \operatorname{grad} k \times \operatorname{grad} l \wedge \operatorname{grad} m = 0,$$

le quali esprimono che h e k sono funzioni di l e m. E allora potendosi sempre determinare una $H\ (l, m)$ tale che sia

$$h = H\frac{\partial\psi}{\partial l}, \quad k = H\frac{\partial\psi}{\partial m},$$

ne risulterà

$$\boldsymbol{i} = H\left(\frac{\partial\psi}{\partial l}\operatorname{grad} l + \frac{\partial\psi}{\partial m}\operatorname{grad} m\right) = H \operatorname{grad}\psi.$$

Si vede dunque che $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ dovranno avere la forma (5) che caratterizza appunto le terne principali appartenenti a un sistema triplo ortogonale.

5. Teoremi di Dupin e di Darboux.

Dalle formule (I) e (6) si deduce [1]

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} &= \sigma\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{i} = \left(\frac{1}{H_2}\operatorname{grad} H_2 \times \boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{j} = \frac{1}{r_{12}}\boldsymbol{j} \\ \frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{k} &= \sigma\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{j} = \left(\frac{1}{H_3}\operatorname{grad} H_3 \times \boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{k} = \frac{1}{r_{13}}\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

le quali dimostrano che sulla superficie $\psi_1 = u_1$, le cui normali sono dirette come $\boldsymbol{i}$, le direzioni $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ sono in ogni punto le *direzioni principali di curvatura* (Cap. II, n. 5). Così dicasi per le altre superficie; epperò sussiste il seguente *teorema di* Dupin: *Le superficie di tre famiglie che si tagliano ad angolo retto s' intersecano mutuamente secondo le loro linee di curvatura.*

Questo teorema è contenuto in un altro più generale dovuto a Darboux: *Affinchè due famiglie di superficie che si tagliano ortogonalmente faccian parte d' un sistema triplo*

---

(1) Bisogna prima osservare che da $[\mathrm{I}_1 \sigma = 0$ e dalle (2) viene $\operatorname{rot} \boldsymbol{i} = \sigma\boldsymbol{i}$, ecc. (vedi le (12) che seguono).

ortogonale è necessario e basta che le loro intersezioni siano linee di curvatura per ambedue.

Invero detta $\boldsymbol{i}$ in ogni punto P la tangente unitaria alla comune intersezione delle date superficie, le cui normali saranno indicate con $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = 0$), si avrà

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k},$$

da cui
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{i} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}).$$

Ma siccome il 2° membro sviluppato è lineare in $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$, si ricava

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \tag{o}$$

e per le (2)
$$\sigma \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0.$$

Se a questa si aggiunge $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = 0$, oppure $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = 0$, si deduce

$$m\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}, \quad n\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k};$$

ossia per le (I)

$$m\boldsymbol{i} = \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{i}, \quad n\boldsymbol{i} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{i}.$$

Siccome $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ sono le normali alle superficie date, queste dimostrano che la (o) esprime (Cap. II, n. 5) che la $\boldsymbol{i}$ è in ogni punto P direzione principale sulle superficie date. D'altra parte la (o) stessa, o la equivalente

$$(\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) \times \operatorname{rot} (\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) = 0,$$

esprime, come è noto, la condizione d'integrabilità dell'equazione differenziale

$$\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k} \times dP = 0,$$

che definisce la famiglia di superficie ortogonali alle superficie date. Il teorema dunque è dimostrato ([1]).

([1]) Questi teoremi sono in relazione col teorema di JOACHIMSTAL (Cap. II).

Si può anche cercare la condizione a cui deve soddisfare una famiglia $\psi_1 = u_1$ di superficie affinchè possa far parte di un sistema triplo ortogonale. Se esiste una seconda famiglia normale alla prima, dovrà intersecarla secondo una famiglia di linee di curvatura. Allora sia $\boldsymbol{j}$ la tangente unitaria in un punto generico di quelle linee. Dovrà esistere una famiglia di superficie ortogonali ad esse; ossia dovrà essere integrabile l'equazione $\boldsymbol{j} \times dP = 0$. Per questo è necessario e basta, come sappiamo, che risulti

$$\boldsymbol{j} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{j} = 0.$$

Ma trattandosi di una direzione principale sarà per cose già dette $\dfrac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} = m\boldsymbol{j}$. Inoltre si ha

$$\boldsymbol{i} = \frac{\operatorname{grad} u_1}{\operatorname{mod} (\operatorname{grad} u_1)};$$

epperò eliminando $\boldsymbol{j}$ fra coteste due relazioni si ottiene una equazione del terzo ordine in u_1 (ossia in ψ_1) che definisce le famiglie cercate, dette *famiglie di* LAMÉ.

Appartengono manifestamente alle famiglie di LAMÉ le famiglie di piani, di sfere e di superficie parallele.

6. Elemento lineare; espressioni di grad φ, div v, $\Delta\varphi$. Se dP è uno spostamento qualunque di P, si ha per le (5)

$$\boldsymbol{i} \times dP = H_1 \operatorname{grad} u_1 \times dP = H_1 du_1, \quad \text{ecc.},$$

e quindi

$$dP = H_1 \boldsymbol{i} du_1 + H_2 \boldsymbol{j} du_2 + H_3 \boldsymbol{k} du_3, \tag{9}$$

che è l'*espressione dello spostamento*. Il quadrato di questo dà *il quadrato dell' elemento lineare* in coordinate curvilinee:

$$dP^2 = ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2. \tag{10}$$

Poichè $H_1 du_1$, $H_2 du_2$, $H_3 du_3$ sono le proiezioni di dP sulle direzioni $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, si deduce, per una funzione qualunque $\varphi(P)$,

$$\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{i}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\quad \text{ecc.};$$

epperò *l'espressione di* grad φ *in coordinate curvilinee ortogonali* è

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\boldsymbol{i}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\boldsymbol{k}. \tag{11}$$

Si ha poi per le (2) e (6)

$$\begin{gathered}\sigma\boldsymbol{i}=\frac{1}{H_1}\operatorname{grad}H_1\wedge\boldsymbol{i},\quad \sigma\boldsymbol{j}=\frac{1}{H_2}\operatorname{grad}H_2\wedge\boldsymbol{j},\\ \sigma\boldsymbol{k}=\frac{1}{H_3}\operatorname{grad}H_3\wedge\boldsymbol{k}\end{gathered} \tag{12}$$

che *definiscono l'omografia* σ *appartenente a un sistema triplo ortogonale.*

Inoltre dalle (2′) e dalle precedenti si deduce

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{i}&=\boldsymbol{k}\times\frac{1}{H_2}\operatorname{grad}H_2\wedge\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}\times\frac{1}{H_3}\operatorname{grad}H_3\wedge\boldsymbol{k}\\ &=\frac{1}{H_2}\operatorname{grad}H_2\times\boldsymbol{i}+\frac{1}{H_3}\operatorname{grad}H_3\times\boldsymbol{i},\end{aligned}$$

cosicchè risulta

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\boldsymbol{i}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial u_1},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{j}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial u_2},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{k}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial u_3}.\end{gathered} \tag{12′}$$

Per un vettore qualunque

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$$

si ottiene subito

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3v_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(H_1H_3v_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(H_1H_2v_3)}{\partial u_3}\right], \tag{13}$$

che è *l'espressione della divergenza in coordinate curvilinee ortogonali.*

Infine, posto $v = \text{grad}\,\varphi$, si trova per la (11)

$$(14)\quad \begin{aligned} &\text{div grad}\,\varphi = \Delta\varphi = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)\right], \end{aligned}$$

che è *l'espressione di* $\Delta\varphi$ (*ove* Δ *è l'operatore di* LAPLACE) *in coordinate curvilinee ortogonali.*

7. Formule fondamentali di Lamé.

Le formule fondamentali che danno le derivate di i, j, k sono le (I), tenendo presente che in questo caso l'omografia σ è definita dalle (12); e la (4) esprime la condizione a cui deve soddisfare questa σ affinchè sia l'omografia fondamentale d'un sistema triplo ortogonale.

Ma sarà anche utile di averle sotto forma più esplicita, come furono date da LAMÉ.

A tal fine, tornando alle (8), notiamo che

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{H_2}\,\text{grad}\,H_2 \times i = \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}, \quad \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}$$

sono le curvature principali in P delle superficie $\psi_1 = u_1$, come risulta da quanto si è detto al n. 5. Analogamente

$$\frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2} \qquad \frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}$$
$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial u_3} \qquad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}$$

sono rispettivamente le curvature principali delle superficie $\psi_2 = u_2$ e $\psi_3 = u_3$. Si osservi inoltre che

$$\sigma i \wedge i = -\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial u_2} j + \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial u_3} k\right) = -\left(\frac{1}{r_{21}} j + \frac{1}{r_{31}} k\right)$$

con le analoghe; epperò le (I) si possono scrivere nella forma più esplicita seguente:

$$
(\mathrm{I}')\quad
\begin{aligned}
&\frac{di}{dP}i=-\left(\frac{1}{r_{21}}j+\frac{1}{r_{31}}k\right) &\qquad& \frac{dj}{dP}i=\frac{1}{r_{21}}i\\
&\frac{di}{dP}j=\frac{1}{r_{12}}j && \frac{dj}{dP}j=-\left(\frac{1}{r_{32}}k+\frac{1}{r_{12}}i\right)\\
&\frac{di}{dP}k=\frac{1}{r_{13}}k && \frac{dj}{dP}k=\frac{1}{r_{23}}k\\
&\frac{dk}{dP}i=\frac{1}{r_{31}}i\\
&\frac{dk}{dP}j=\frac{1}{r_{32}}j\\
&\frac{dk}{dP}k=-\left(\frac{1}{r_{13}}i+\frac{1}{r_{23}}j\right).
\end{aligned}
$$

Si vede di qui facilmente che l'omografia σ è rappresentata dalla matrice

$$
\left(\begin{array}{ccc}
0, & \frac{1}{r_{31}}, & -\frac{1}{r_{21}}\\
-\frac{1}{r_{32}}, & 0, & \frac{1}{r_{12}}\\
\frac{1}{r_{23}}, & -\frac{1}{r_{13}}, & 0
\end{array}\right).
$$

I suoi invarianti sono

$$
\mathrm{I}_1\sigma=0,\quad \mathrm{I}_2\sigma=\frac{1}{r_{12}r_{13}}+\frac{1}{r_{21}r_{23}}+\frac{1}{r_{32}r_{31}}\ \text{(somme curvature totali)}
$$

$$
\mathrm{I}_3\sigma=\frac{1}{r_{12}r_{23}r_{31}}-\frac{1}{r_{21}r_{32}r_{13}}.
$$

Dopo ciò sarebbe facile sviluppare la condizione (4). Ma è meglio scrivere direttamente le condizioni d'integrabilità delle (I'); si trova

$$\frac{d\dfrac{1}{r_{12}}}{dP}\, i + \frac{d\dfrac{1}{r_{21}}}{dP}\, j + \frac{1}{r_{31}r_{32}} + \left(\frac{1}{r_{21}}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_{12}}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d\dfrac{1}{r_{31}}}{dP}\, j + \frac{1}{r_{21}r_{32}} - \frac{1}{r_{31}r_{21}} = 0$$

ed analoghe, che sono appunto l'*equazioni di* LAMÉ [1].

Dopo LAMÉ gli studi più profondi fatti sui sistemi tripli ortogonali son dovuti a DARBOUX e a BIANCHI, e sono esposti in gran parte nei loro trattati ben noti.

---

[1] « Leçons sur les coord. curvilignes », 1859.

PARTE II

SPAZI CURVI A PIÙ DIMENSIONI

A CURA DEL PROF. T. BOGGIO

CAPITOLO I.

Vettori e omografie in spazi euclidei.

1. Spazi euclidei a più dimensioni.

Gli spazi euclidei a più dimensioni si possono definire, geometricamente, per via ricorrente, colle seguenti considerazioni (1).

Ammessa l'esistenza di un punto A, si supponga che esista un punto B diverso da A, allora la *retta* AB costituisce uno spazio euclideo ad una dimensione, e si può indicare con S_1. Ogni punto di tale spazio è individuato da un solo numero (reale); e viceversa.

Supposto poi che esista un punto C non appartenente alla retta AB, le congiungenti di C con tutti i punti della retta AB (compreso il punto all'infinito) formano un *piano*, che è uno spazio euclideo a due dimensioni, e si può indicare con S_2. Ogni punto di questo spazio si può individuare mediante una coppia di numeri; e viceversa.

Ammettendo che esista un punto D non appartenente al piano ABC, le congiungenti di D con tutti i punti del piano ABC (compresi i punti all'infinito) formano lo *spazio ordinario*, o spazio euclideo a tre dimensioni, e si può indicare con S_3. Ogni punto di esso si può individuare mediante una terna di numeri; e viceversa.

---

(1) Ci limitiamo a richiamare le nozioni principali e più ovvie; chi desiderasse approfondire tali questioni può utilmente consultare le ricerche fondamentali compiute dal compianto MARIO PIERI, come ad es. la memoria: *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino; serie II; t. XLIX, a. 1899); ed anche: *I principii della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo* (id. id.; t. XLVIII; a. 1898).

Lo spazio ordinario è lo spazio in cui si svolgono tutti i fenomeni del mondo fisico.

Ammettendo che esista un punto E fuori dello spazio ordinario, le congiungenti di E con tutti i punti di S_3 (compresi i punti all'infinito) formano uno spazio euclideo a quattro dimensioni, che indicheremo con S_4. Ogni punto di esso si può individuare mediante una quaterna di numeri; e viceversa.

Similmente, ammessa l'esistenza di un punto F non appartenente ad S_4, le congiungenti di F con tutti i punti di S_4 (compresi quelli all'infinito) formano uno spazio euclideo a cinque dimensioni, che indicheremo con S_5; ogni punto di esso si può individuare mediante una successione di cinque numeri; e viceversa.

Così proseguendo, si possono definire gli spazi euclidei a 6, 7, ..., n dimensioni. Uno spazio euclideo ad n dimensioni si indicherà con S_n; ogni suo punto è individuato (s'intende rispetto ad elementi di riferimento prefissati) da una successione di n numeri, e viceversa.

Se in un S_n si prendono $k < n$ punti in modo del tutto arbitrario, essi individuano un S_k, ogni punto del quale appartiene ad S_n; e si suol dire che lo spazio S_k è *immerso* in S_n.

Avendo scelto i k punti in posizione generica, essi non giaciono in uno spazio in cui il numero di dimensioni è minore di k; si dice allora che quei punti sono *linearmente indipendenti*.

In particolare, gli S_{n-1} immersi in S_n si chiamano *iperpiani* di S_n.

2. Vettori di S_n; loro somme e prodotti.

La teoria dei vettori e delle omografie di S_n si può svolgere in modo del tutto analogo a quella dei vettori dello spazio ordinario (cfr. *Espaces* [1], I, II); perciò ci

---

[1] Colla indicazione *Espaces* intendiamo riferirci all'opera: C. BURALI FORTI et T. BOGGIO. - *Espaces courbes, critique de la Relativité* (*S. T. E. N.*; Torino, a. 1924).

limiteremo qui a dei richiami sommarii, più che sufficienti per l'intelligenza delle applicazioni che svilupperemo.

Se A, B sono punti distinti (di S_n), il vettore $B - A$ rappresenta la ***traslazione*** che porta il punto A nel punto B; la direzione e il verso di tale traslazione si chiamano ***direzione*** e ***verso*** del vettore $B - A$.

Se C, D sono altri due punti, i vettori $B - A$ e $D - C$ sono *eguali*, e si scrive $B - A = D - C$, solamente se il punto medio di AD coincide col punto medio di BC.

Si chiama *modulo* del vettore $B - A$, e si scrive $\operatorname{mod}(B - A)$, la distanza, misurata con una certa unità di misura, dei punti A e B.

Se due vettori sono eguali, devono avere eguali la direzione, il verso e il modulo.

Se si pone $u = B - A$, ed O è un punto qualunque, la somma del punto O col vettore u, che si indica con $O + u$, è quel punto M tale che

$$M - O = u.$$

La somma di due vettori u e v, che si indica con $u + v$, è quel vettore tale che, preso un punto qualunque O si ha:

$$u + v = \{(O + u) + v\} - O;$$

e si passa poi subito alla somma di un numero qualunque di vettori.

Se m è un numero (reale), allora mu è un vettore parallelo ad u, il cui modulo vale $\operatorname{mod} m \cdot \operatorname{mod} u$, e che ha lo stesso verso o il verso contrario di u, secondochè m è positivo o negativo.

Se $u_1, u_2, \ldots, u_r$, con $r \leq n$, sono vettori, si dice che essi sono ***linearmente dipendenti*** se esistono dei numeri (reali) $m_1, m_2, \ldots, m_r$, non tutti nulli, tali che

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + \ldots + m_r u_r = 0;$$

nel caso contrario, i vettori considerati si dicono ***linearmente indipendenti***.

Ogni vettore parallelo ad u si può rappresentare con xu, ove x è un numero ben determinato.

Ogni vettore complanare con due vettori non paralleli u_1, u_2 può rappresentarsi con $x_1 u_1 + x_2 u_2$, ove x_1, x_2 sono numeri ben determinati.

E in generale, se u_1, u_2, ..., u_n sono n vettori linearmente indipendenti, e quindi non appartenenti ad un S_{n-1}, ogni altro vettore u di S_n si può rappresentare con:

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, \tag{1}$$

ove x_1, x_2, ..., x_n sono numeri determinati.

Ne segue che se O e P sono punti qualunque, si può sempre porre:

$$P = O + x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

Il ***prodotto interno, o scalare,*** dei vettori u, v, che si rappresenta con $u \times v$, è definito da

$$u \times v = \text{mod}\, u \cdot \text{mod}\, v \cdot \cos(u, v),$$

e valgono le stesse proprietà che si hanno nello spazio ordinario; quindi ad es.

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w.$$

Se i vettori u, v non sono nulli, la relazione $u \times v = 0$ esprime che i vettori u, v sono fra loro *ortogonali*.

Si pone poi

$$u^2 = u \times u, \text{ quindi } u^2 = (\text{mod}\, u)^2, \text{ mod}\, u = \sqrt{u^2}.$$

Se i_1, i_2, i_3, ..., i_n sono vettori unitari a due a due ortogonali, cioè formano un ***sistema unitario-ortogonale,*** ogni vettore u si può esprimere ovviamente colla formula

$$u = u \times i_1 \cdot i_1 + u \times i_2 \cdot i_2 + \dots + u \times i_n \cdot i_n. \tag{2}$$

Se si pone

$$u = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n, \quad v = y_1 i_1 + y_2 i_2 + \dots + y_n i_n. \tag{3}$$

si ha subito:

$$u \times v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

I numeri x_1, x_2, ..., x_n sono le *coordinate cartesiane ortogonali* del vettore u.

3. Omografie di S_n.

Una *omografia vettoriale* di S_n è un *operatore lineare, che trasforma vettori in vettori*; perciò se α è una omografia, u, v, sono vettori qualunque, ed m è un numero arbitrario, allora αu, αv sono vettori, ed inoltre:

$$(4) \qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad \alpha(mu) = m\alpha u.$$

L'operazione di moltiplicazione dei vettori per un numero h è una particolare omografia, perchè per $\alpha = h$ sono verificate le relazioni precedenti; tale omografia si chiama *omotetia vettoriale.*

Una omografia è determinata se di n vettori u_1, u_2, ..., u_n linearmente indipendenti si conoscono i corrispondenti, cioè αu_1, αu_2, ..., αu_n, perchè se u è un altro vettore qualunque, si può porre, per la (1):

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n ,$$

e allora dalle (4) segue:

$$\alpha u = x_1 \alpha u_1 + x_2 \alpha u_2 + \dots + x_n \alpha u_n ,$$

la quale determina completamente αu.

In particolare, se si esprime u mediante la (3), si ha:

$$(5) \qquad \alpha u = x_1 \alpha i_1 + x_2 \alpha i_2 + \dots + x_n \alpha i_n ;$$

poichè i vettori αi_1, αi_2, ..., αi_n sono vettori di S_n, possiamo rappresentarli con formule analoghe alle (3), cioè:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha i_1 = a_{11} i_1 + a_{12} i_2 + \dots + a_{1n} i_n , \\ \alpha i_2 = a_{21} i_1 + a_{22} i_2 + \dots + a_{2n} i_n , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha i_n = a_{n1} i_1 + a_{n2} i_2 + \dots + a_{nn} i_n , \end{array} \right.$$

ove a_{rs} sono numeri ben determinati, dati da $a_{rs} = i_s \times \alpha i_r$. Mediante i coefficienti a_{rs} si può formare la matrice

$$(7) \qquad \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| ,$$

che può chiamarsi *matrice dell'omografia* α, rispetto al sistema unitario-ortogonale considerato.

Tale matrice non è perciò un elemento *intrinseco* dell'omografia, perchè dipende anche dal sistema unitario-ortogonale di riferimento, e noi non ne faremo mai uso.

Data la matrice (7) e dato il sistema unitario-ortogonale, risulta pure determinata l'omografia α mediante le (6); e ogni proprietà dell'omografia α dà luogo ad una proprietà della matrice (7), e viceversa.

Se la α è ad es. un'omotetia vettoriale h, si ha nella (7): $a_{rr} = h$, ed $a_{rs} = 0$ per $r \neq s$.

Nella modernissima Fisica dei *quanta* (1) risulta molto importante la teoria delle omografie (anche in spazi ad infinite dimensioni), che per ciò è ora studiata da molti Autori attraverso il simbolismo ingombrante, inadatto, e per nulla geometrico, nè intrinseco, delle matrici; mediante le omografie vettoriali, le formule risultano enormemente più semplici, espressive, di per loro natura invariantive, e si ha inoltre il grande vantaggio di operare *direttamente* sugli enti geometrici o meccanici che compariscono nel problema, senza ricorrere ad intermediarii di sorta.

4. Invarianti delle omografie.

Siano $u_1, u_2, \dots, u_n$ vettori linearmente indipendenti, e consideriamo il volume (con segno) del parallelepipedo

---

(1) Cfr. ad es.: H. WEYL. - *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Leipzig, a. 1928). In questa opera le omografie sono chiamate (pag. 7) « lineare Abbildungen ».

ad n dimensioni i cui spigoli successivi, uscenti da un punto arbitrario O, hanno direzione verso e grandezza eguali a quelle dei vettori u_i; tale volume non dipende da O, e si può chiamare *amplitudine della successione* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, e può indicarsi con $\mathrm{am}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Se ora consideriamo il volume del parallelepipedo corrispondente, che è dato da

$$\mathrm{am}(\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n),$$

si può dimostrare che il rapporto di questi due volumi non dipende dalla successione dei vettori u_i; ma dipende solo da α. Tale rapporto si chiama *invariante d'ordine n di* α, e si indica con $\mathrm{I_n}\alpha$, in guisa che si ha:

$$\mathrm{I_n}\alpha = \mathrm{am}(\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)/\mathrm{am}(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{8}$$

Indichiamo con x un numero (reale) e calcoliamo, per mezzo della (8), l'espressione $\mathrm{I_n}(\alpha + x)$; è chiaro che si otterrà, come sviluppo, una funzione intera, di grado n nella x. Se questo sviluppo si ordina secondo le potenze decrescenti di x, è chiaro che il primo coefficiente (cioè quello di x^n) vale 1, e i coefficienti successivi, che dipendono solo da α, si chiamano rispettivamente *invarianti di ordine* 1, 2, 3, ... *di* α. Indicandoli con $\mathrm{I_1}\alpha, \mathrm{I_2}\alpha, \mathrm{I_3}\alpha, \ldots$ avremo:

$$\mathrm{I_n}(\alpha + x) = x^n + \mathrm{I_1}\alpha \cdot x^{n-1} + \mathrm{I_2}\alpha \cdot x^{n-2} + \mathrm{I_3}\alpha \cdot x^{n-3} + \ldots + \mathrm{I_n}\alpha. \tag{9}$$

Se, in particolare, si considera la successione dei vettori i del sistema unitario-ortogonale, la (8) porge:

$$\mathrm{I_n}\alpha = \mathrm{am}(\alpha i_1, \alpha i_2, \ldots, \alpha i_n), \tag{8'}$$

e per l'invariante primo si ha:

$$\mathrm{I_1}\alpha = i_1 \times \alpha i_1 + i_2 \times \alpha i_2 + \ldots + i_n \times \alpha i_n. \tag{10}$$

Per l'invariante $\mathrm{I}_{n-1}\alpha$, che è il coefficiente di x nello sviluppo (9), si deduce facilmente dalle (9), (8):

$$\begin{aligned}(8'')\quad \mathrm{am}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\cdot \mathrm{I}_{n-1}\alpha &= \mathrm{am}(u_1\ \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n) + \\ &+ \mathrm{am}(\alpha u_1, u_2, \alpha u_3, \ldots, \alpha u_n) + \ldots + \mathrm{am}(\alpha u_1, \ldots, \alpha u_{n-1}, u_n).\end{aligned}$$

Riferendoci alla matrice (7), le (8′) e (10) dànno:

$$(11)\qquad \mathrm{I_n}\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$(12)\qquad \mathrm{I_1}\alpha = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

L'invariante d'ordine n di α non è dunque altro che il *determinante* della matrice di α [1].

Avendosi poi $(\alpha + x)\boldsymbol{i}_r = \alpha\boldsymbol{i}_r + x\boldsymbol{i}_r$, è chiaro che la matrice della omografia $\alpha + x$ si ottiene dalla (7) aggiungendo x a tutti gli elementi a_{rr} della diagonale principale, quindi ad es.:

$$\mathrm{I_n}(\alpha + x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

e sviluppando secondo le potenze decrescenti di x si scorge che l'invariante d'ordine r di α è la somma dei determinanti *principali* d'ordine r estratti dalla matrice (7).

In particolare, indicando con A_{rs} il complemento algebrico dell'elemento a_{rs} nella matrice (7) si ha:

$$(13)\qquad \mathrm{I_{n-1}}\alpha = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}.$$

Nel caso di una omotetia h si trova subito:

$$\mathrm{I_r}h = \binom{n}{r} h^r.$$

È poi chiaro che:

$$(13')\qquad \mathrm{I}_r(m\alpha) = m^r \mathrm{I}_r\alpha,$$

ove m è un numero reale qualunque.

---

[1] Nell'opera citata di Weyl, l'invariante primo di α è chiamato (pag. 12) « Spur » di α, e l'invariante $\mathrm{I}_n\alpha$ è chiamato « determinante » di α.

5. Somme, prodotti, potenze di omografie.

Se α, β sono omografie, allora esse sono *eguali*, cioè $\alpha = \beta$, se, qualunque sia il vettore u si ha:

$$\alpha u = \beta u.$$

La *somma* di α e β, che si indica con $\alpha + \beta$, è quella omografia tale che, qualunque sia il vettore u, si ha:

$$(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u; \tag{14}$$

analogamente, per il *prodotto* di α per β, che si indica con $\beta\alpha$, si ha:

$$(\beta\alpha) u = \beta(\alpha u); \tag{15}$$

è importante notare che il prodotto $\beta\alpha$ *non gode della proprietà commutativa*, cioè in generale $\beta\alpha \neq \alpha\beta$.

Se la α ha per matrice la (7), e indichiamo con b_{rs} gli elementi della matrice dell'omografia β, si riconosce subito, dalle (14), (15) che gli elementi della matrice di $\alpha + \beta$ sono $a_{rs} + b_{rs}$, e quelli della matrice di $\beta\alpha$ sono

$$a_{r_1} b_{1s} + a_{r_2} b_{2s} + \dots + a_{rn} b_{ns},$$

cioè sono la somma dei prodotti degli elementi della r^{ma} orizzontale della matrice di α per quelli corrispondenti della s^{ma} verticale della matrice di β.

Dalla (10) risulta che l'operatore I_1 è *lineare*, perchè si ha:

$$I_1(\alpha + \beta) = I_1\alpha + I_1\beta, \quad I_1(m\alpha) = m \cdot I_1\alpha,$$

qualunque sia il numero m.

Gli invarianti degli altri ordini non sono operatori lineari.

Dalla (8) si deduce subito la notevole relazione

$$I_n(\alpha\beta) = I_n\alpha \cdot I_n\beta, \tag{16}$$

che equivale all'enunciato comune: il determinante della sostituzione prodotto di due sostituzioni lineari, è eguale al prodotto dei determinanti delle due sostituzioni.

Della omografia α possiamo considerare le successive *potenze* α^2, α^3, ... le quali sono legate agli invarianti dalla identità fondamentale (*Espaces*, pag. 15);

$$(17) \quad \alpha^n - (\mathrm{I}_1\alpha)\,\alpha^{n-1} + (\mathrm{I}_2\alpha)\,\alpha^{n-2} - \dots + (-1)^n\,\mathrm{I}_n\alpha = 0.$$

Mediante questa identità si può esprimere una qualsiasi funzione intera di α mediante le potenze dei primi $n-1$ gradi di α e gli invarianti.

Dalla (17) si può dedurre facilmente la proprietà:

$$(17') \qquad \mathrm{I}_r(\alpha\beta) = \mathrm{I}_r(\beta\alpha), \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Un' omografia si dice *propria* se trasforma n vettori linearmente indipendenti di S_n, in n vettori pure linearmente indipendenti; si dice *degenere* nel caso contrario.

Affinchè un' omografia sia propria è necessario e sufficiente che *il suo invariante d' ordine n sia diverso da zero.*

Se un' omografia è degenere esiste almeno un vettore non nullo tale che il suo corrispondente è nullo; e viceversa.

Una direzione si dice *unita* per una omografia α se, preso un vettore u non nullo (ad es. unitario) parallelo a tale direzione, il suo corrispondente αu ha ancora quella direzione; esisterà quindi un numero non nullo m tale che $\alpha u = mu$.

Ne segue $(\alpha - m)u = 0$, perciò l' omografia $\alpha - m$ è degenere, e quindi il numero m deve essere radice dell' equazione $\mathrm{I}_n(\alpha - m) = 0$, di grado n, che si sviluppa colla (9).

Se n è dispari tale equazione ammette sempre almeno una radice (reale), quindi in tal caso esiste almeno una direzione unita per α.

Per una omotetia, ogni direzione è unita; e viceversa.

L' omografia α si dice *invertibile* quando, essendo u, v vettori arbitrari, dalla relazione

$$\alpha u = \alpha v \quad \text{si trae} \quad u = v;$$

in tale caso si può considerare l' omografia *inversa* di α, che si indica con α^{-1}, e allora dalla relazione:

$$(18) \qquad \alpha u = v, \quad \text{si trae} \quad u = \alpha^{-1} v.$$

È chiaro che i prodotti $\alpha\alpha^{-1}$, $\alpha^{-1}\alpha$ valgono l'identità.

È facile vedere che *le sole omografie proprie sono invertibili.*

Infatti, dalla (18) si deduce, ricordando la (17):

$$-(-1)^n(\mathrm{I}_n\alpha)u = [\alpha^{n-1} - (\mathrm{I}_1\alpha)\alpha^{n-2} + (\mathrm{I}_2\alpha)\alpha^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{I}_{n-1}\alpha]v,$$

quindi, se $\mathrm{I}_n\alpha \neq 0$, si ha, confrontando colla seconda delle (18):

$$(19)\quad \alpha^{-1} = (-1)^{n-1}[\alpha^{n-1} - (\mathrm{I}_1\alpha)\alpha^{n-2} + (\mathrm{I}_2\alpha)\alpha^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{I}_{n-1}\alpha]/\mathrm{I}_n\alpha.$$

Di qui e dalla (17) si deduce che qualsiasi funzione intiera di α^{-1} può esprimersi mediante le potenze dei primi $n-1$ gradi di α e gli invarianti.

Dalle (6) risulta subito che se si considera la matrice dell'omografia α^{-1}, il suo elemento generico a'_{rs} è dato da

$$(19')\qquad a'_{rs} = A_{sr}/\mathrm{I}_n\alpha.$$

È poi facile vedere che se α, β sono invertibili si ha:

$$(\beta\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

6. Dilatazioni, assiali, coniugate.

Un'omografia α si chiama *dilatazione*, oppure *assiale*, secondochè presi due vettori arbitrari u, v si ha, rispettivamente:

$$(20)\quad u \times \alpha v = v \times \alpha u, \quad \text{oppure} \quad u \times \alpha v = -v \times \alpha u.$$

È chiaro che le omotetie sono anche dilatazioni, ma non assiali.

Se α e β sono dilatazioni, oppure assiali, tali sono anche le omografie della forma $\alpha + m\beta$, con m numero arbitrario.

È facile vedere che se, qualunque sia il vettore u, si ha $u \times \alpha u = 0$, l'omografia α deve essere assiale.

Se la α è una dilatazione, si ha dalle (6), qualunque siano r, s, $a_{rs} = a_{sr}$, quindi la matrice (7) è *simmetrica*; se invece α è assiale si ha $a_{rs} = -a_{sr}$, perciò la matrice (7) è *emisimmetrica*.

Ogni dilatazione ha sempre, almeno, n *direzioni unite*, a due a due ortogonali (*Espaces*, pag. 17).

Il prodotto di due dilatazioni non è, in generale, una dilatazione; analogamente per le assiali.

Una potenza qualunque di una dilatazione α è ancora una dilatazione, la quale ha le stesse direzioni unite di α.

Se α è un'omografia qualunque, si chiama *coniugata* di α, e si indica con $K\alpha$, l'omografia tale che, qualunque siano i vettori u, v, si ha:

$$(21) \qquad u \times K\alpha v = v \times \alpha u, \quad (\textit{teorema di commutazione}).$$

È chiaro che, con riferimento alle (6), (7), la matrice di $K\alpha$ si ottiene da quella di α scambiando le orizzontali colle verticali.

Dalla (21) risulta ovviamente che, se α, β sono omografie ed m è numero, si ha:

$$(22) \qquad KK\alpha = \alpha, \quad K(\alpha + m\beta) = K\alpha + mK\beta.$$

Se α è dilatazione si ha $K\alpha = \alpha$; se α è assiale si ha invece $K\alpha = -\alpha$; e viceversa.

Dalla (21) si deduce ancora, senza difficoltà:

$$(23) \qquad K(\beta\alpha) = K\alpha \cdot K\beta, \quad K(\alpha^s) = (K\alpha)^s,$$

ove s è un intero, che può esser anche negativo se α è invertibile.

Si stabilisce poi facilmente, mediante la (17), o considerando le matrici di α e $K\alpha$, che

$$(23') \qquad I_r(K\alpha) = I_r\alpha, \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

È chiaro che le omografie $(\alpha + K\alpha)/2$, $(\alpha - K\alpha)/2$, sono rispettivamente una dilatazione ed una assiale; esse si indicano con $D\alpha$, e con $A\alpha$, cioè si pone

$$D\alpha = (\alpha + K\alpha)/2; \quad A\alpha = (\alpha - K\alpha)/2.$$

Ne segue subito, se α, β sono omografie ed m è un numero:

$$D(\alpha + m\beta) = D\alpha + mD\beta, \quad A(\alpha + m\beta) = A\alpha + mA\beta,$$

perciò D, A sono operatori lineari.

Sussiste poi la notevole proprietà:

Gli invarianti d'ordine dispari del prodotto di una dilatazione per una assiale sono tutti nulli.

Infatti, applicando le (23'), (23), (17') si ha, indicando con α un'assiale e con β una dilatazione:

$$I_r(\alpha\beta) = I_r K(\alpha\beta) = I_r(K\beta \cdot K\alpha) = I_r(-\beta\alpha) = I_r(-\alpha\beta);$$

ora, se r è dispari, l'ultimo membro, in virtù della (13') vale $-I_r(\alpha\beta)$, perciò ne segue il teorema.

In particolare risulta che negli spazi con un numero dispari di dimensioni le omografie assiali sono degeneri.

7. Diadi; isomerie.

Se u, v sono vettori di S_n, col simbolo $H(u, v)$, che si legge *diade determinata dalla coppia u, v di vettori*, si intende quella omografia tale che, preso un vettore arbitrario x si ha:

$$H(u, v)x = u \times x \cdot v; \tag{24}$$

la diade $H(u, v)$ trasforma dunque un vettore qualunque x di S_n in un vettore parallelo a v, perciò le diadi sono tutte omografie degeneri.

Dalla (24) risulta senz'altro che

$$H(u, v) = 0 \quad \text{soltanto se} \quad u = 0, \quad \text{oppure} \quad v = 0.$$

Inoltre si riconosce subito che, se w è un altro vettore ed m un numero, si ha:

$$\tag{25} \begin{cases} H(u + v, w) = H(u, w) + H(v, w), \\ H(u, v + w) = H(u, v) + H(u, w), \\ \quad H(mu, v) = H(u, mv) = mH(u, v). \end{cases}$$

La somma di due diadi *qualunque* non è una diade.

Invece il prodotto di due diadi è sempre una diade; e precisamente si ha, se a, b sono vettori:

$$H(a, b)H(u, v) = a \times v \cdot H(u, b) \text{ (}^1\text{)}, \tag{25'}$$

---

(1) Se $a \times v = 0$ il prodotto delle due diadi considerate risulta nullo, benchè nessuna delle due diadi sia nulla.

come tosto si riconosce applicando i due membri ad un vettore qualunque x.

In modo analogo si vede facilmente che

$$(26)\qquad \alpha \mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(u, \alpha v), \quad \mathrm{H}(u, v)\alpha = \mathrm{H}(\mathrm{K}\alpha u, v).$$

Si stabiliscono pure facilmente le proprietà seguenti:

$$(27)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}_1\mathrm{H}(u, v) = u \times v, \quad \mathrm{I}_r\mathrm{H}(u, v) = 0, \quad (r = 2, 3, \ldots, n) \\ \qquad\qquad \mathrm{KH}(u, v) = \mathrm{H}(v, u); \end{array}\right.$$

perciò una diade è pure dilatazione soltanto se i vettori u, v sono fra loro paralleli.

Si chiama *isomeria* (vettoriale) ogni omografia che applicata ad un vettore qualunque lo trasforma in un altro avente lo stesso modulo; perciò se α è un'isomeria ed u è un vettore arbitrario, si ha:

$$(28)\qquad (\alpha u)^2 = u^2,$$

e viceversa. Se poi v è un altro vettore qualunque e si pone $u + v$ al posto di v nella (28), si trae subito:

$$(29)\qquad \alpha u \times \alpha v = u \times v$$

dalla quale si deduce che le isomerie non solo conservano le lunghezze dei vettori a cui sono applicate, ma conservano altresì gli angoli formati dai vettori stessi.

Dalla (29), applicando il teorema di commutazione (21), si deduce facilmente, che affinchè α sia un'isomeria è necessario e sufficiente che

$$(30)\qquad \alpha \mathrm{K}\alpha = (\mathrm{K}\alpha)\alpha = 1.$$

Dalla (30) e dalle (16), (23′) risulta $(\mathrm{I}_n\alpha)^2 = 1$, perciò le isomerie sono omografie invertibili, e si ha dalla (30):

$$\alpha^{-1} = \mathrm{K}\alpha.$$

Dalla (30) risulta subito che anche $\mathrm{K}\alpha$ è isomeria, e così pure α^{-1}.

La somma di due isomerie non è, in generale, un'isomeria.

Invece il prodotto di due isomerie è sempre un'isomeria.

Dalle (30) risulta che se α è un'isomeria, la matrice (7) è una matrice *ortogonale*.

Supponiamo che l'isomeria α sia funzione di una variabile numerica t, allora sussiste l'importante proprietà che *la sua derivata α' si può scrivere sotto la forma*:

$$\alpha' = \Lambda\alpha, \tag{31}$$

ove Λ è un'assiale.

Infatti, derivando la $\alpha K\alpha = 1$ si ha:

$$\alpha' K\alpha + \alpha K\alpha' = 0, \quad \text{cioè} \quad \alpha' K\alpha + K(\alpha' K\alpha) = 0,$$

la quale mostra che l'omografia $\alpha' K\alpha = \Lambda$, è un'assiale; moltiplicando qui a destra per α e ricordando che $(K\alpha)\alpha = 1$ si ha la (31).

Dalla (31) si deduce un'altra proprietà molto importante. Sia C un corpo *rigido* dotato di un moto qualunque nello spazio S_n, e indichiamo con u il vettore determinato da due punti qualunque di C e con u' la sua derivata rispetto al tempo. Allora sussiste il seguente

TEOREMA. - *Esiste una omografia assiale ben determinata Λ, funzione solo del tempo t, tale che*

$$u' = \Lambda u. \tag{31'}$$

Infatti, sia C_0 la posizione al tempo t_0 (posizione iniziale) del solido C, e sia u_0 il valore di u al tempo t_0; esiste una isomeria ben determinata α, che non dipende che da t, tale che:

$$u = \alpha u_0. \tag{a}$$

Derivando rispetto a t e applicando la (31) risulta $u' = \Lambda\alpha u_0$, e, per la (a) stessa, ne segue la (31').

La (31') costituisce la *formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi di* S_n (*Espaces*, pag. 244).

8. Iperomografie di S_n; somme e prodotti.

Abbiamo detto (n. 4) che un'omografia di S_n è un operatore lineare che trasforma vettori in vettori; ma nelle applicazioni si presentano spesso operatori lineari più generali, cioè tali che applicati a successioni di parecchi vettori danno per risultato un vettore. Siffatti operatori si chiamano genericamente *iperomografie*; la loro teoria generale è sviluppata negli *Espaces courbes*, III, e qui ci limiteremo a richiamare le nozioni che ci saranno necessarie per le applicazioni geometriche che intendiamo sviluppare.

Le omografie che abbiamo studiato sinora le chiameremo anche *omografie di 1° ordine*, od *omografie ordinarie*.

Chiameremo invece *omografia di 2° ordine* (di S_n) un operatore lineare che trasforma una coppia di vettori in un vettore, *omografia di 3° ordine* un operatore lineare che trasforma una terna di vettori in un vettore, e così via [1].

Ne segue che se a, b, c, d, ... sono vettori e μ_r indica una omografia di ordine r, le espressioni

$$\mu_1 a, \quad \mu_2(a, b), \quad \mu_3(a, b, c), \quad \mu_4(a, b, c, d), \dots$$

che possiamo scrivere più semplicemente così:

$$\mu_1 a, \quad \mu_2 ab, \quad \mu_3 abc, \quad \mu_4 abcd, \dots$$

rappresentano vettori ben determinati (di S_n).

Inoltre è chiaro che, ad es., $\mu_2 a$ è un'omografia ordinaria, $\mu_3 a$ è un'omografia di 2° ordine, $\mu_4 ab$ è pure un'omografia di 2° ordine, ecc.

Converremo inoltre che un'omografia μ_0, di ordine 0, indichi un *vettore*.

L'eguaglianza e la somma di due omografie d'ordine r si stabiliscono in modo analogo a quanto abbiamo fatto per le omografie ordinarie.

---

[1] Molti autori tedeschi chiamano « tensori di ordine r » ciò che noi chiamiamo, da molti anni, « omografie di ordine $r-1$ »; la denominazione tedesca è anche seguita (chissà perchè) da vari autori italiani.

Quindi, ad es., se μ_4, μ'_4 sono omografie di 4° ordine, si ha $\mu_4 = \mu'_4$ solamente quando

$$(32) \qquad \mu_4 \boldsymbol{abcd} = \mu'_4 \boldsymbol{abcd},$$

ove, come anche in ciò che segue, i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ sono del tutto arbitrari.

Dalla (32) risulta ovviamente:

$$\mu_4 \boldsymbol{abc} = \mu'_4 \boldsymbol{abc}, \quad \mu_4 \boldsymbol{ab} = \mu'_4 \boldsymbol{ab}, \quad \mu_4 \boldsymbol{a} = \mu'_4 \boldsymbol{a}.$$

Similmente, la somma $\mu_4 + \mu'_4$ delle omografie μ_4 e μ'_4 è quella omografia di 4° ordine tale che

$$(\mu_4 + \mu'_4)\boldsymbol{abcd} = \mu_4 \boldsymbol{abcd} + \mu'_4 \boldsymbol{abcd}.$$

Ne segue, ad es. $(\mu_4 + \mu'_4)\boldsymbol{ab} = \mu_4 \boldsymbol{ab} + \mu'_4 \boldsymbol{ab}$.

Invece il prodotto di una μ_r per una μ_s è una omografia d'ordine $r + s - 1$. Così ad es. il prodotto di una μ_2 per una μ_3, che indicheremo brevemente con $\mu_3\mu_2$, è quella μ_4 tale che

$$(\mu_3\mu_2)\boldsymbol{abcd} = \mu_3(\mu_2 \boldsymbol{ab})\boldsymbol{cd}.$$

È poi assai facile vedere che

$$(\mu_r + \mu'_r)\mu_s = \mu_r\mu_s + \mu'_r\mu_s,$$
$$\mu_s(\mu_r + \mu'_r) = \mu_s\mu_r + \mu_s\mu'_r;$$

invece, in generale, $\mu_r\mu_s \neq \mu_s\mu_r$.

9. Operatori lineari per le iperomografie.

Indichiamo con μ_r un'omografia di ordine r, allora colla notazione $K\mu_r$, che si legge *coniugata di* μ_r, si indica quell'omografia d'ordine r tale che

$$(33) \qquad (K\mu_r)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{r-1} = K(\mu_r \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{r-1}) \qquad (r \geq 2),$$

qualunque siano i vettori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{r-1}$ di S_n.

Similmente, colla notazione $I_1\mu_r$, che si legge ***invariante primo di*** μ_r, si indica quell'omografia di ordine r tale che

$$(34) \qquad (I_1\mu_r)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{r-1} = I_1(\mu_r \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{r-1}); \qquad (r \geq 2)$$

è chiaro che $\mu_r a_1 a_2 \ldots a_{r-1}$ rappresenta un'omografia ordinaria ben determinata.

Colla notazione $\mathrm{k}\mu_r$ si indica quell'omografia di ordine r tale che:

$$(35)\qquad (\mathrm{k}\mu_r)a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r = \mu_r a_1 a_2 \ldots a_r a_{r-1}, \qquad (r \geq 2)$$

perciò l'operatore k applicato a μ_r produce lo scambio dei *due ultimi vettori* che si considerano.

Analogamente, colla notazione $\mathrm{k}^*\mu_r$ si indica quell'omografia d'ordine r tale che:

$$(36)\qquad (\mathrm{k}^*\mu_r)a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r = \mu_r a_2 a_1 \ldots a_{r-1} a_r, \qquad (r \geq 2);$$

l'operatore k* applicato a μ_r produce dunque solo lo scambio dei *due primi vettori* a cui la μ_r è applicata. La (36) può scriversi più semplicemente:

$$(36')\qquad (\mathrm{k}^*\mu_r)a_1 a_2 = \mu_r a_2 a_1 .$$

Dalle formule precedenti segue senz'altro:

$$(37)\qquad \mathrm{KK}\mu_r = \mu_r, \quad \mathrm{kk}\mu_r = \mu_r, \quad \mathrm{k}^*\mathrm{k}^*\mu_r = \mu_r;$$

inoltre è chiaro che per una μ_2 l'operatore k* è identico all'operatore k.

Inoltre si deduce subito che, ad es.

$$(38)\qquad (\mathrm{K}\mu_4)a_1 a_2 = \mathrm{K}(\mu_4 a_1 a_2), \qquad (\mathrm{I}_1\mu_4)a_1 = \mathrm{I}_1(\mu_4 a_1),$$

$$(39)\qquad (\mathrm{k}\mu_4)a_1 a_2 = \mathrm{k}(\mu_4 a_1 a_2), \quad (\mathrm{k}^*\mu_4)a_1 a_2 = \mu_4 a_2 a_1 .$$

Nei primi membri le parentesi possono essere sottintese.

Una relazione notevole fra gli operatori K, k è la seguente:

$$(40)\qquad \mathrm{KkK}\mu_r = \mathrm{kKk}\mu_r \qquad (r \geq 2).$$

Infatti, posto $\mu_r a_1 a_2 \ldots a_{r-2} = \mu_2$, la μ_2 è un'omografia di 2° ordine ben determinata e si ha successivamente, per il teorema di commutazione (21) e per la (35), indicando con x un vettore arbitrario:

$$
\begin{aligned}
x \times \mathrm{KkK}\mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} a_{r-1} a_r &= x \times \mathrm{KkK}\mu_2 a_{r-1} a_r = \\
= a_r \times \mathrm{kK}\mu_2 a_{r-1} x &= a_r \times \mathrm{K}\mu_2 x a_{r-1} = a_{r-1} \times \mu_2 x a_r = \\
= a_{r-1} \times \mathrm{k}\mu_2 a_r x &= x \times \mathrm{Kk}\mu_2 a_r a_{r-1} = \\
= x \times \mathrm{kKk}\mu_2 a_{r-1} a_r &= x \times \mathrm{kKk}\mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} a_{r-1} a_r;
\end{aligned}
$$

e per l'arbitrarietà dei vettori $x, a_1, a_2, \dots, a_r$ si conclude la (40).

In modo simile si stabiliscono le formule:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Kk}^*\mu_r = \mathrm{k}^*\mathrm{K}\mu_r, \ (r \geq 3), \ \mathrm{k}^*\mathrm{kk}^*\mu_3 = \mathrm{kk}^*\mathrm{k}\mu_3, \\
\mathrm{k}(\mu_1\mu_r) = \mu_1 \mathrm{k}\mu_r, \ \mathrm{k}^*(\mu_s\mu_r) = \mu_s \mathrm{k}^*\mu_r, \quad (r \geq 2, s \geq 1), \\
\mathrm{K}(\mu_r\mu_s) = \mathrm{K}\mu_r \cdot \mu_s, \ \mathrm{I}_1(\mu_r\mu_s) = \mathrm{I}_1\mu_r \cdot \mu_s, \quad (r \geq 2, s \geq 1),
\end{gathered}
$$

e numerose altre analoghe (*Espaces courbes*, pag. 35).

Ricorrendo agli operatori k, k* è possibile trasformare ad es. l'espressione $\mu_3 abc$, in un'altra nella quale i vettori a, b, c si susseguano in ordine qualunque. Così si ha:

$$
(41) \quad
\begin{aligned}
&\mu_3 acb = \mathrm{k}\mu_3 abc, \quad \mu_3 cab = \mathrm{k}^*\mu_3 acb = \mathrm{kk}^*\mu_3 abc, \\
&\mu_3 bac = \mathrm{k}^*\mu_3 abc, \ \mu_3 bca = \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mu_3 abc, \ \mu_3 cba = \mathrm{kk}^*\mathrm{k}\mu_3 abc.
\end{aligned}
$$

Essendo sempre μ_r un'omografia di ordine $r > 1$, colla notazione $\mathrm{v}\mu_r$, che si legge *vettore di* μ_r, si intende quella omografia di ordine $r - 2$ tale che:

$$
(42) \quad [(\mathrm{v}\mu_r) a_1 a_2 \dots a_{r-2}] \times a_{r-1} = \mathrm{I}_1(\mathrm{kK}\mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} a_{r-1}),
$$

qualunque siano i vettori a_i.

È chiaro che per $r = 2$ il $\mathrm{v}\mu_r$ è effettivamente un vettore.

Nel secondo membro, l'espressione racchiusa entro le parentesi è un'omografia ordinaria.

L' operatore v trasforma quindi un'omografia di ordine r in un' altra il cui ordine è $r - 2$, e può essere applicato più volte, abbassandosi così l'ordine r di 2 unità per volta. Esso corrisponde all'operazione che comunemente si chiama « saturazione degli indici » o « contrazione dei tensori ».

Per tale operatore si possono stabilire facilmente le formule seguenti:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{v}(\mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2}) = (\mathrm{v}\mu_r) a_1 a_2 \dots a_{r-2}, && (r \geq 2), \\
(43) \qquad &\mathrm{vk}\mu_r = \mathrm{v}\mu_r, \quad \mathrm{v}(\mu_1 \mu_r) = \mu_1 \mathrm{v}\mu_r, && (r \geq 2).
\end{aligned}
$$

Inoltre, riferendoci ad un sistema unitario-ortogonale di vettori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \dots, \boldsymbol{i}_n$, si ha:

$$
(44) \qquad (\mathrm{v}\mu_r) a_1 a_2 \dots a_{r-2} = \Sigma_s \mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s .
$$

Infatti, applicando la (10), si ha dalla (42):

$$
\begin{aligned}
[(\mathrm{v}\mu_r) a_1 a_2 \dots a_{r-2}] \times a_{r-1} &= \Sigma_s \boldsymbol{i}_s \times \mathrm{kK}\mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} a_{r-1} \boldsymbol{i}_s = \\
&= \Sigma_s \boldsymbol{i}_s \times \mathrm{K}\mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} \boldsymbol{i}_s a_{r-1} = a_{r-1} \times \Sigma_s \mu_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s ,
\end{aligned}
$$

e per l'arbitrarietà del vettore a_{r-1} si conclude la (44).

Dalla (44) segue, ad es.

$$
\begin{aligned}
(44') \qquad & (\mathrm{v}\mu_3) a = \Sigma_s \mu_3 a \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s , \quad \mathrm{v}\mu_2 = \Sigma_s \mu_2 \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s . \\
(44'') \qquad & \mathrm{v}(\mathrm{v}\mu_4) = \Sigma_r \Sigma_s \mu_4 \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s .
\end{aligned}
$$

Inoltre è facile stabilire l'importante relazione:

$$
(44''') \qquad \mathrm{I}_1 \mathrm{vk}^* \mu_3 = \mathrm{I}_1 \mathrm{vK}\mu_3 .
$$

È importante osservare che gli operatori K, I_1, k, k*, v che ora abbiamo introdotti sono *lineari*, perciò se indichiamo con f uno qualunque di essi, si ha:

$$
\mathrm{f}(\mu_r + \mu'_r) = \mathrm{f}\mu_r + \mathrm{f}\mu'_r \quad \mathrm{f}(m\mu_r) = m\mathrm{f}\mu_r ,
$$

qualunque siano le omografie (d'ordine r) μ_r, μ'_r e il numero (reale) m.

Esempio. - Se u è un vettore, l'operatore $u\times$, che è evidentemente lineare, è una omografia di 2° ordine, perchè $(u\times)ab$, che vale $u \times a \cdot b$, è un vettore. Per tale omografia sussistono le formule seguenti:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}(u\times) = u\times, \qquad \mathrm{I}_1(u\times) = n \cdot u\times, \\
&\mathrm{k}(u\times)a = \mathrm{H}(u, a), \quad \mathrm{v}(u\times) = u,
\end{aligned}
$$

la cui dimostrazione, semplicissima, è lasciata al lettore.

10. Differenziali e derivate di vettori e di omografie.

Per i vettori e le omografie, di ordine qualunque, di un S_n, funzioni di un punto P variabile in S_n, si possono definire i differenziali e le derivate rispetto a P allo stesso modo che nello spazio ordinario (cfr. vol. I di questa Collezione; Introd.), perciò qui ci limiteremo a ricordare le formule principali relative a questi nuovi enti.

Se μ_r, μ'_r, μ_s sono omografie di ordine r, s funzioni di P, ed u, v sono vettori, pure funzioni di P, si ha, come in Analisi:

$$d(\mu_r + \mu'_r) = d\mu_r + d\mu'_r, \quad d(\mu_r\mu_s) = d\mu_r \cdot \mu_s + \mu_r d\mu_s,$$
$$d(\mu_r u) = d\mu_r \cdot u + \mu_r du,$$
$$d\mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(du, v) + \mathrm{H}(u, dv).$$

Se f indica uno qualunque degli operatori lineari K, I_1, k, k*, v, si ha:

(45) $$d\mathrm{f}\mu_r = \mathrm{f}d\mu_r;$$

ed inoltre, se $a_1, a_2, \ldots, a_s$, $(s \leq r)$ sono vettori costanti, risulta:

(46) $$d(\mu_r a_1 a_2 \ldots a_s) = (d\mu_r) a_1 a_2 \ldots a_s.$$

Se dP, δP, $d_1 P$, ... sono differenziali del punto P, si ha:

(47) $$\frac{d\mu_r}{dP} dP = d\mu_r, \quad \frac{d\mu_r}{dP} \delta P = \delta\mu_r, \quad \frac{d\mu_r}{dP} d_1 P = d_1\mu_r, \ldots$$

La derivata di μ_r rispetto a P è un'omografia di ordine $r + 1$.

Da queste e dalle (45), (46) si deduce poi subito:

(48) $$\mathrm{K}\frac{d\mu_r}{dP} = \frac{d\mathrm{K}\mu_r}{dP}, \quad \mathrm{I}_1\frac{d\mu_r}{dP} = \frac{d\mathrm{I}_1\mu_r}{dP}, \quad \mathrm{k}\frac{d\mu_r}{dP} = \frac{d\mathrm{k}\mu_r}{dP}, \quad \mathrm{v}\frac{d\mu_r}{dP} = \frac{d\mathrm{v}\mu_r}{dP};$$

ove, nelle prime due formule si suppone $r \geq 1$, e nelle altre due $r \geq 2$; invece

(48′) $$\mathrm{k}^*\frac{d\mu_r}{dP} \neq \frac{d\mathrm{k}^*\mu_r}{dP}, \quad \text{per} \quad r \geq 3.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mu_r dP$ sia un *differenziale esatto*, cioè μ_r sia una *derivata* rispetto a P, è che

$$\mathrm{k}^* \frac{d\mu_r}{dP} = \frac{d\mu_r}{dP}, \tag{49}$$

ammesso che per una qualunque funzione F di P sia

$$d\delta F = \delta dF.$$

Ci limiteremo qui a far vedere che la (49) è necessaria; supposto che si abbia $\mu_r dP = d\mu_{r-1}$, sarà pure $\mu_r \delta P = \delta\mu_{r-1}$; operando sulla prima con δ e sulla seconda con d e poi sottraendo, risulta:

$$\delta\mu_r \cdot dP - d\mu_r \cdot \delta P = 0,$$

cioè, per le (47):

$$\frac{d\mu_r}{dP}\delta P dP - \frac{d\mu_r}{dP} dP\delta P = 0,$$

od ancora, per la (36'):

$$\left(\mathrm{k}^* \frac{d\mu_r}{dP}\right) dP\delta P - \frac{d\mu_r}{dP} dP\delta P = 0,$$

e poichè dP, δP sono vettori arbitrari, ne risulta la (49).

Sussistono poi le formule seguenti, ove u è un vettore funzione di P:

$$\frac{d(\mu_r\mu_1)}{dP} = \mu_r \frac{d\mu_1}{dP} + \mathrm{k}^* \left[\left(\mathrm{k}^* \frac{d\mu_r}{dP}\right)\mu_1\right], \qquad (r \geq 1), \tag{50}$$

$$\frac{d(\mu_r u)}{dP} = \mu_r \frac{du}{dP} + \left(\mathrm{k}^* \frac{d\mu_r}{dP}\right) u, \qquad (r \geq 1), \tag{51}$$

le quali risultano subito dallo sviluppo di $d(\mu_r\mu_1)$ e $d(\mu_r u)$.

Nel caso particolare che μ_r sia un'omografia ordinaria, le formule precedenti possono scriversi così:

$$\mathrm{k}\frac{d(\alpha\beta)}{dP} = \alpha\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP} + \left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right)\beta, \tag{50'}$$

$$\frac{d(\alpha u)}{dP} = \alpha\frac{du}{dP} + \left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right)u, \tag{51'}$$

perchè per le omografie di ordine 2 l'operatore k* coincide con k.

11. Gradiente e divergenza di un'omografia.

Sia μ_r, al solito, un'omografia di ordine r, funzione di P; colla notazione grad μ_r, che si legge *gradiente di* μ_r, si indica l'omografia di ordine $r-1$ tale che:

$$\text{grad}\,\mu_r = \text{v}\frac{d\mu_r}{dP}, \text{ [1]} \qquad (r \geq 1); \tag{52}$$

analogamente, la notazione div μ_r, che si legge *divergenza* di μ_r, indica l'omografia di ordine $r-1$ tale che

$$\text{div}\,\mu_r = \text{I}_1\frac{d\mu_r}{dP}, \qquad (r \geq 0); \tag{53}$$

se $r=0$, sappiamo che μ_0 indica un vettore determinato, e la (53) coincide colla nota formula che, nello spazio ordinario, definisce la divergenza di un vettore.

Il secondo membro della (53) può anche scriversi, per la seconda delle (48): $d(\text{I}_1\mu_r)/dP$.

È facile stabilire le formule seguenti:

$$dm/dP = (\text{grad}\,m)\times, \quad \text{K}\frac{d\,\text{grad}\,m}{dP} = \frac{d\,\text{grad}\,m}{dP} \tag{54}$$

$$\text{grad}\,(u \times v) = \text{K}\frac{du}{dP}v + \text{K}\frac{dv}{dP}u, \tag{55}$$

$$\frac{d(mu)}{dP} = m\frac{du}{dP} + \text{H}(\text{grad}\,m,\, u), \tag{56}$$

ove m, u, v sono numero e vettori funzioni di P.

Dalla (44) risulta poi:

$$(\text{grad}\,\mu_r)a_1a_2 \ldots a_{r-1} = \Sigma_s \frac{d\mu_r}{dP}a_1a_2 \ldots a_{r-1}i_s i_s. \tag{57}$$

---

[1] Alcuni autori tedeschi chiamano, per $r=1$, « divergenza di μ_1 » il vettore definito dalla (52); ora, tale denominazione è evidentemente inammissibile, perchè intanto è in contraddizione colla (53), e poi anche perchè se la μ_1 si riduce ad un numero u, la divergenza di u viene ad essere l'ordinario gradiente di u!

Dalla prima delle (54) segue senz'altro:

$$\text{grad}\, m \times dP = dm, \tag{54'}$$

dalla quale, come nello spazio ordinario, si deduce che se m è funzione delle variabili numeriche x, y, ..., le quali a loro volta sono funzioni del punto P, si ha:

$$\text{grad}\, m = \frac{\partial m}{\partial x}\, \text{grad}\, x + \frac{\partial m}{\partial y}\, \text{grad}\, y + ... \tag{54''}$$

Sussiste poi la notevole proprietà:

Se l'omografia α, funzione di P, è assiale, si ha:

$$\text{div grad}\, \alpha = 0. \tag{57'}$$

Infatti, applicando successivamente le (53), (52), (48), (49), (44'''), (48), risulta:

$$\text{div grad}\, \alpha = \text{div v}\, \frac{d\alpha}{dP} = I_1 \frac{d}{dP} \text{v} \frac{d\alpha}{dP} = I_1 \text{v} \frac{d^2\alpha}{dP^2} =$$

$$= I_1 \text{v} \text{k}^* \frac{d^2\alpha}{dP^2} = I_1 \text{v} \text{K} \frac{d^2\alpha}{dP^2} = I_1 \text{v} \frac{d^2 \text{K}\alpha}{dP^2};$$

ma siccome α è assiale, si ha $\text{K}\alpha = -\alpha$, perciò l'ultimo membro differisce solo per il segno dal 4° membro, e di qui si conclude il teorema.

12. L'operatore R per le omografie ordinarie.

Sia $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ una successione di $n-1$ vettori qualunque di S_n; colla notazione $E(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ che si può leggere *prodotto esterno* della successione u_1, u_2, ..., u_{n-1} di vettori, indicheremo quel vettore (1) tale che, qualunque sia il vettore a, risulti:

$$a \times E(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) = \text{am}\,(a, u_1, u_2, ..., u_{n-1}). \tag{58}$$

Nel caso dello spazio ordinario si ha: $E(u_1, u_2) = u_1 \wedge u_2$.

Dalla (58) risulta ovviamente che il prodotto esterno è un vettore normale a ciascuno dei vettori $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ (1).

---

(1) Il vettore $E(u_1, u_2, ..., u_n)$ può essere introdotto anche con altre considerazioni; cfr. BURGATTI, *Proprietà delle omografie assiali in un* S_n

Ciò posto, se α è un'omografia ordinaria di S_n, colla notazione $R\alpha$, che si può leggere *reciproca di* α, si intende quell'omografia tale che, qualunque siano i vettori u_1, u_2, ..., u_{n-1} si abbia:

$$\text{(59)} \qquad R\alpha E(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = E(\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_{n-1}).$$

Nel caso dello spazio ordinario si ha

$$\text{(59')} \qquad R\alpha(u_1 \wedge u_2) = (\alpha u_1) \wedge \alpha u_2 .$$

Dalla (59) si deduce subito, m essendo un numero: $R(m\alpha) = m^{n-1} R\alpha$, la quale mostra che l'operatore R non è lineare.

Inoltre è chiaro che $RH(u, v) = 0$, qualunque siano i vettori u, v.

Dalla (59) si ricavano pure facilmente le importanti formule:

$$\text{(60)} \qquad R\alpha \cdot K\alpha = K\alpha \cdot R\alpha = I_n\alpha,$$

$$\text{(61)} \qquad R(\alpha\beta) = (R\alpha)R\beta,$$

ove β è un'altra omografia. Se l'omografia α è invertibile, risulta, dalla (60):

$$\text{(62)} \qquad R\alpha = (I_n\alpha)K\alpha^{-1},$$

che stabilisce una relazione semplicissima fra l'omografia $R\alpha$, reciproca di α, e l'omografia α^{-1}, inversa di α.

Dalla (60) si deduce subito

$$\text{(63)} \qquad KR\alpha = RK\alpha.$$

Inoltre dal confronto delle (62) e (19) si desume senz'altro l'espressione di $R\alpha$ in funzione di α.

È anche facile calcolare gli invarianti dell'omografia $R\alpha$ (*Espaces courbes*, pag. 21); qui ricorderemo soltanto che

$$\text{(64)} \qquad I_n R\alpha = (I_n\alpha)^{n-1}.$$

---

euclideo con applicazione alle formule di Frenet. (Rendiconti R. Accademia dei Lincei; serie 6ª, vol. VII; 1° sem. 1928).

Dalle (62) e (19') si deduce immediatamente che la matrice di Rα è la matrice reciproca di quella di α cioè:

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

ove A_{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} nella matrice (7). Le (60) equivalgono allora alle note proprietà relative alle somme dei prodotti degli elementi di una linea di un determinante per i complementi algebrici degli elementi della linea stessa o di una linea ad essa parallela. E la (64) esprime un noto teorema di CAUCHY sul valore del determinante reciproco di un dato determinante.

Capitolo II.

Spazi curvi e loro geodetiche.

1. Varietà immerse in spazi euclidei.

Sia S_N uno spazio euclideo ad N dimensioni; possiamo definire, per via ricorrente, puramente geometrica, le varietà immerse in tale spazio, con un procedimento analogo a quello col quale si definiscono le curve e le superficie dello spazio ordinario [1].

Chiameremo perciò *varietà ad una dimensione*, o *linea*, di S_N, e l'indicheremo con V_1, ogni figura di S_N tale che, preso un punto qualunque Q di essa, si può sempre condurre per Q un iperpiano (di S_N) che ha in comune colla V_1 un numero (finito o no) di punti *isolati*.

Analogamente, chiameremo *varietà a due dimensioni*, o *superficie*, di S_N, e l'indicheremo con V_2, ogni figura tale che, preso ad arbitrio un punto qualunque Q di essa, si può sempre condurre per Q un iperpiano avente in comune colla V_2 una V_1.

Così procedendo, per induzione, chiameremo *varietà ad n dimensioni* (o *spazio curvo ad n dimensioni*) di S_N, e l'indicheremo con V_n, ogni figura tale che, preso un punto qualunque Q di essa, si può sempre condurre per Q un iperpiano avente in comune colla V_n una V_{n-1}.

Da queste definizioni risulta che se si considera un punto Q funzione (derivabile ecc.) di una sola variabile q_1, che varia in un certo intervallo, il luogo di Q è una curva di S_N; se Q è funzione di 2 variabili indipendenti q_1, q_2,

---

[1] Cfr. Burali-Forti. - *Logica matematica*, 2ª ediz., pag. 477, (Manuali Hoepli; Milano, a. 1919).

e i vettori $\partial Q/\partial q_1$, $\partial Q/\partial q_2$ non sono paralleli, il luogo di Q è una superficie di S_N, e, in generale, se Q è funzione di n variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_n$, e i vettori $\partial Q/\partial q_1$, $\partial Q/\partial q_2$, ..., $\partial Q/\partial q_n$ sono linearmente indipendenti, il luogo di Q è una V_n di S_N, la quale si dice anche *immersa* in S_N.

Si chiama poi *elemento lineare*, o *elemento d'arco*, della V_n in un punto Q, la lunghezza ds, calcolata in S_N, dello spostamento infinitesimo dQ del punto Q sulla V_n, cioè la *distanza* dei due punti infinitamente vicini Q e $Q + dQ$ di V_n; perciò avremo:

$$ds = \mathrm{mod}\, dQ, \tag{1}$$

o, ciò che equivale:

$$ds^2 = dQ \times dQ = dQ^2, \tag{2}$$

il prodotto interno, o scalare, essendo calcolato in S_N.

Introdotto così il concetto di elemento d'arco della V_n, si deduce subito, per integrazione, quello di *lunghezza* di un arco di curva, e, come vedremo presto, quello di angolo, area, volume, ecc..

2. Varietà immerse in altre varietà.

Si abbia in S_N una V_n; si possono definire le *varietà ad* 1, 2, ..., *m dimensioni*, con $m \leq n$, contenute, o *immerse* nella V_n, collo stesso procedimento adoperato nel n. 1 per definire le varietà immerse in S_N.

Se la V_n è il luogo del punto $Q\,(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ funzione regolare (cioè derivabile, ecc.) di n variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_n$, e se queste variabili si suppongono espresse con funzioni regolari di $m \leq n$ altre variabili indipendenti $p_1, p_2, \ldots, p_m$, allora Q risulterà funzione regolare di p_1, $p_2, \ldots, p_m$ e descriverà una varietà ad m dimensioni W_m, immersa nella V_n. In tale caso i vettori $\partial Q/\partial p_1$, $\partial Q/\partial p_2$, ..., $\partial Q/\partial p_m$ saranno linearmente indipendenti.

In particolare, se il punto Q risulta funzione *lineare* di $p_1, p_2, \ldots, p_m$, allora si dice che la varietà W_m è *euclidea*, od anche che è uno *spazio lineare*, o *euclideo*.

Se Q e $Q + dQ$ sono due punti infinitamente vicini della W_m, è naturale di attribuire alla loro distanza lo stesso valore (1) ottenuto considerando i due punti come appartenenti alla V_n, o addirittura ad S_N.

Se $m = 1$, cioè se Q risulta funzione di una sola variabile p_1, la W_1 è una *curva* di V_n; se $m = n - 1$, la W_{n-1} si chiama *ipersuperficie* di V_n.

Sulla V_n, una ipersuperficie si può rappresentare con un'equazione della forma $f(Q) = 0$.

Se si indicano con c_1, c_2, ..., c_m dei vettori unitari costanti, e si considera lo spazio lineare definito da

$$(3) \qquad Q = O_0 + p_1 c_1 + p_2 c_2 + ... + p_m c_m ,$$

ove O_0 è un punto fisso, e p_1, p_2, ..., p_m sono variabili reali indipendenti, allora tale spazio avrà m dimensioni (cioè sarà un S_m) se i vettori c_1, c_2, ..., c_m sono linearmente indipendenti; nel caso contrario lo spazio avrà dimensione r minore di m, ed i vettori c appartengono allora ad un S_r, e perciò non sono più indipendenti.

Nel primo caso, se u è un vettore qualunque dell' S_m definito dalla (3), si può porre

$$(4) \qquad u = h_1 c_1 + h_2 c_2 + ... h_m c_m ,$$

ove h_1, h_2, ... h_m sono numeri ben determinati.

Stabiliamo ora la seguente proprietà, dovuta a Schläfli:

Teorema. - *Una qualunque* V_n *descritta dal punto* $Q(q_1, q_2, ..., q_n)$ *può sempre considerarsi come immersa in uno spazio euclideo* S_N *il cui numero N di dimensioni sia abbastanza grande.*

Infatti, consideriamo lo spazio euclideo descritto dal punto

$$M = O + x_1 i_1 + x_2 i_2 + ... + x_N i_N ,$$

al variare delle x, ove i_1, i_2, ..., i_N sono vettori formanti un sistema unitario-ortogonale di S_N, e facciamo vedere che è sempre possibile determinare le x in funzione delle q, in modo che si abbia:

$$dM^2 = dQ^2. \tag{5}$$

Poichè si può riguardare M come funzione di Q, si ha:

$$dM = \frac{dM}{dQ} dQ,$$

quindi

$$dM^2 = \frac{dM}{dQ} dQ \times \frac{dM}{dQ} dQ = dQ \times \mathrm{K} \frac{dM}{dQ} \cdot \frac{dM}{dQ} dQ,$$

e se si determina M in guisa che

$$\mathrm{K} \frac{dM}{dQ} \cdot \frac{dM}{dQ} = 1, \tag{6}$$

la (5) risulterà ovviamente soddisfatta.

Il 1° membro della (6) è evidentemente una dilatazione, quindi la sua matrice è simmetrica (Cap. I, § 6), e poichè gli elementi distinti di questa sono, in generale, $n(n+1)/2$, la (6) dà luogo ad $n(n+1)/2$ equazioni differenziali di 1° ordine (a derivate parziali) fra le funzioni incognite x; siccome queste sono in numero di N, così si deduce che se $N \geq n(n+1)/2$ la determinazione delle funzioni x è in generale possibile, conforme all'enunciato.

Per particolari V_n si capisce che N può assumere anche valori minori di $n(n+1)/2$ (ma non di n); ad es. se la V_n è essa stessa euclidea, si può supporre addirittura $M = Q$ nella (6) e quindi $N = n$.

3. Tangenti e normali ad una varietà.

Sia W_m una varietà immersa in V_n, e supponiamo che $Q(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ne sia un punto generico; chiameremo *tangente* a W_m in Q la posizione limite della retta dello spazio euclideo S_N (in cui la V_n si può immaginare immersa) che unisce il punto Q con un altro punto arbitrario Q_1 di W_m, quando Q_1 muovendosi sulla W_m tende, in modo qualunque, al punto Q.

È chiaro che se una retta è tangente a W_m in Q, sarà pure tangente in Q ad ogni varietà immersa in V_n e passante per la W_m considerata.

Poichè i vettori $\partial Q/\partial p_1, ..., \partial Q/\partial p_m$ sono linearmente indipendenti, le rette passanti per Q e parallele a questi vettori sono tutte tangenti a W_m in Q, e determinano un S_m euclideo che è *tangente* alla varietà W_m in Q.

Riguardo alle tangenti ad una varietà si hanno le proprietà seguenti:

TEOREMA I. - *Ogni retta passante per il punto Q di W_m e normale alle direzioni dei vettori $\partial Q/\partial p_r$, $(r = 1, 2, ..., m)$, che determinano lo spazio S_m tangente a W_m in Q, è anche normale a tutte le altre rette passanti per Q e appartenenti all'S_m tangente.*

Infatti, se v è un vettore parallelo alla retta considerata, si hanno, per ipotesi, le m relazioni:

$$(a) \qquad v \times \partial Q/\partial p_r = 0, \quad (r = 1, 2, ..., m);$$

d'altra parte, se u è un vettore parallelo ad una retta passante per Q ed appartenente all'S_m tangente, si trae, da una formula analoga alla (4);

$$u = h_1 \frac{\partial Q}{\partial p_1} + h_2 \frac{\partial Q}{\partial p_2} + ... + h_m \frac{\partial Q}{\partial p_m},$$

di qui, e dalla (a), si conclude $v \times u = 0$, il che dimostra il teorema.

La retta considerata è una *normale* alla varietà W_m in Q.

Se ora consideriamo la varietà V_n, le rette passanti per Q e parallele agli spostamenti infinitesimi dQ del punto Q sulla V_n, sono tangenti a V_n in Q. Poichè il punto Q di V_n è funzione delle variabili indipendenti $q_1, q_2, ..., q_n$, si ha:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2} dq_2 + ... + \frac{\partial Q}{\partial q_n} dq_n,$$

da cui segue facilmente che tutte le tangenti a V_n in Q formano uno spazio euclideo ad n dimensioni, immerso in S_N, e che può chiamarsi *spazio tangente* alla V_n in Q.

TEOREMA II. - *Se una retta è normale alla* V_n *in* Q, *è pure normale in* Q *ad ogni* W_m *immersa nella* V_n *e passante per* Q.

Questa proprietà è pressochè evidente, in virtù del teorema I.

TEOREMA III. - *Le tangenti a* V_n *in* Q, *che sono pure normali in* Q *ad una varietà* W_m *immersa in* V_n, *formano un* S_{n-m}.

Infatti, preso nello spazio euclideo tangente a V_n in Q un sistema unitario-ortogonale di vettori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, ..., \boldsymbol{i}_n$ ne risulta che una direzione qualunque in tale spazio sarà determinata da un vettore della forma:

$$x = h_1\boldsymbol{i}_1 + h_2\boldsymbol{i}_2 + ... + h_n\boldsymbol{i}_n,$$

ove le h sono numeri determinati; il vettore x sarà normale a W_m se è normale ai vettori $\partial Q/\partial p_r$, cioè se si ha:

$$x \times \partial Q/\partial p_r = 0, \quad (r = 1, 2, ..., m);$$

ora da queste m equazioni si possono ricavare m delle quantità h in funzione delle rimanenti, che sono $n - m$, e di qui si conclude il teorema.

In particolare, se la W_m è una ipersuperficie di V_n, cioè $m = n - 1$, esiste ***una sola normale*** a W_m in Q (e tangente, s'intende, a V_n in Q).

Se la W_m che si considera è una *curva* di V_n, allora $m = 1$, e il punto Q risulta funzione di una sola variabile p e per l'elemento d'arco della curva sussiste la (1). Se poi si pone

$$t = dQ/ds, \tag{7}$$

è chiaro che il vettore t è unitario e parallelo alla tangente alla curva in Q.

Ne segue il seguente

TEOREMA IV. - *La derivata del vettore* t *è un vettore normale a* t, *perciò si può porre*:

$$dt/ds = n, \quad \text{cioè} \quad d^2Q/ds^2 = hn, \tag{8}$$

ove h è un numero reale, ed n un vettore unitario, normale a t.

Infatti, derivando la $t^2 = 1$, si ha:

$$t \times dt/ds = 0,$$

la quale mostra che il vettore dt/ds è normale a t, e da ciò risultano le (8).

È importante osservare che il vettore d^2Q/ds^2 non è più, in generale, tangente a V_n in Q; cioè la retta Qn, che si può chiamare *normale principale* della curva in Q, non appartiene più allo spazio tangente a V_n in Q, bensì allo spazio S_N.

4. Angoli di curve e di ipersuperficie. Gradiente superficiale.

Siano dQ e δQ due spostamenti infinitesimi del punto Q sulla V_n; noi chiameremo *angolo* dei due vettori dQ e δQ di V_n, l'angolo formato da questi stessi vettori considerati come appartenenti allo spazio euclideo S_N, in cui può immaginarsi immersa la V_n.

Risulterà perciò, ricordando anche la (1):

$$\cos(dQ, \delta Q) = \frac{dQ \times \delta Q}{\operatorname{mod} dQ \cdot \operatorname{mod} \delta Q} = \frac{dQ}{ds} \times \frac{\delta Q}{\delta s}. \tag{9}$$

Se poi indichiamo con $d's$ la distanza dei punti infinitamente vicini $Q + dQ$, $Q + \delta Q$, che possiamo considerare come ancora appartenenti alla V_n, si ha:

$$d's^2 = (dQ - \delta Q)^2 = dQ^2 + \delta Q^2 - 2dQ \times \delta Q,$$

od ancora, chiamando ω l'angolo dei vettori dQ e δQ:

$$d's^2 = ds^2 + \delta s^2 - 2ds \cdot \delta s \cdot \cos\omega,$$

la quale formula è del tutto analoga a quella che si ha nello spazio ordinario.

Gli spostamenti dQ e δQ sono tra loro *perpendicolari* se $dQ \times \delta Q = 0$.

Se C, C' sono due curve di V_n, che si tagliano in Q, si chiama *angolo delle due curve* l'angolo acuto formato dalle tangenti alle due curve in Q; se t e t' sono i due vettori unitari, tangenti alle due curve in Q, dati dalla (7), si ha allora dalla (9), per l'angolo ω delle due curve:

$$\cos\omega = \operatorname{mod}(t \times t'). \tag{10}$$

Per calcolare l'angolo di una curva e di un'ipersuperficie, o di due ipersuperficie di V_n, conviene definire il gradiente superficiale di una funzione numerica.

Sia dunque $f(Q)$ una funzione numerica del punto Q variabile in V_n; colla notazione $\operatorname{grad}_v f$, che si legge *gradiente di f sulla varietà* V_n, o, brevemente, *gradiente superficiale di f*, si intende quel vettore tangente a V_n in Q e tale che sia

$$df = \operatorname{grad}_v f \times dQ, \tag{11}$$

qualunque sia lo spostamento dQ tangente a V_n in Q; il df indica naturalmente l'incremento della $f(Q)$ corrispondente allo spostamento dQ del punto Q.

Si vede facilmente che *il vettore* $\operatorname{grad}_v f$ *è la proiezione ortogonale sullo spazio tangente alla* V_n *in* Q, *del* $\operatorname{grad} f$ *calcolato nello spazio euclideo* S_N.

Infatti, se si chiama u la proiezione ortogonale, sullo spazio euclideo tangente alla V_n in Q, del vettore $\operatorname{grad} f$, si può porre $\operatorname{grad} f = u + U$, ove U è un vettore normale alla V_n in Q; ne segue:

$$\operatorname{grad} f \times dQ = u \times dQ, \quad \text{cioè} \quad df = u \times dQ,$$

e confrontando colla (11) si conclude $u = \operatorname{grad}_v f$.

Si può perciò scrivere:

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}_v f + U, \tag{12}$$

ove U è un vettore normale a V_n in Q.

Per il gradiente superficiale valgono molte delle proprietà del gradiente ordinario; così ad es. se $f(x, y, \ldots)$ è funzione delle variabili $x, y, \ldots$, che a loro volta sono funzioni del punto Q, si ha la seguente formula, analoga alla (54″) del Cap. I:

$$(13) \qquad \operatorname{grad}_v f = \frac{\partial f}{\partial x} \operatorname{grad}_v x + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{grad}_v y + \ldots .$$

Questa formula si stabilisce subito ricorrendo alla precedente (12) e alla (54″) del Cap. I.

Un'altra proprietà notevole è la seguente:

TEOREMA I. - *Se, sulla varietà* V_n, $f(Q) = 0$ *è l'equazione di un'ipersuperficie* Σ (*immersa in* V_n), *allora* $\operatorname{grad}_v f$ *è un vettore normale in* Q *a* Σ.

Infatti, se il punto Q si sposta su Σ, si ha $df = 0$, e quindi, per la (11), $\operatorname{grad}_v f \times dQ = 0$ qualunque sia lo spostamento dQ su Σ; ne segue che $\operatorname{grad}_v f$ deve essere normale a Σ (e, s'intende, tangente a V_n).

Consideriamo ora un'ipersuperficie Σ e una curva C di V_n, che si taglino in un punto Q; noi diremo che la curva C è *normale* a Σ se essa è normale a tutte le curve giacenti su Σ e passanti per Q.

Sussiste allora il seguente

TEOREMA II. - *Se* $f(Q) = 0$ *è l'equazione, sulla* V_n, *dell'ipersuperficie* Σ, *allora si ha*:

$$(14) \qquad (\operatorname{grad}_v f)^2 = (df/ds)^2,$$

ove df *è l'incremento di* $f(Q)$ *corrispondente ad uno spostamento* dQ *del punto* Q *sopra una curva* C *di* V_n, *normale a* Σ *in* Q, *ed inoltre* ds *è l'elemento d'arco di* C.

Infatti, il vettore $\operatorname{grad}_v f$ ha la direzione della normale a Σ in Q (ed è inoltre tangente a V_n in Q), perciò se dQ è uno spostamento di Q sulla curva C, il vettore dQ/ds è unitario e tangente a tale curva, quindi risulta:

$$(\operatorname{grad}_v f)^2 = (\operatorname{grad}_v f \times dQ/ds)^2 = (df/ds)^2,$$

che dimostra la (14).

Il primo membro della (14) non differisce dall'espressione che, secondo il BELTRAMI, si chiama *parametro differenziale primo* di f sulla varietà V_n.

Più in generale, se un'ipersuperficie Σ e una curva C di V_n si tagliano in un punto Q, l'angolo di C con Σ è, per definizione, il complemento dell'angolo acuto formato da C colla normale in Q a Σ (e tangente alla V_n). Per determinare tale angolo si ha il seguente

TEOREMA III. - *Se $f(Q) = 0$ è l'equazione, sulla V_n, dell'ipersuperficie Σ, l'angolo ω di Σ con C si calcola colla formula:*

$$\text{sen}\,\omega = \frac{1}{\text{mod grad}_v f}\,\text{mod}\,\frac{df}{ds}. \tag{15}$$

Infatti, siccome il vettore $\text{grad}_v f$ ha la direzione della normale a Σ in Q, si trae, ricordando la (11):

$$\text{sen}\,\omega = \text{mod}\left(\frac{\text{grad}_v f}{\text{mod grad}_v f} \times \frac{dQ}{ds}\right) = \frac{1}{\text{mod grad}_v f}\,\text{mod}\,\frac{df}{ds}; \quad \text{c. d. d.}$$

Se la curva C taglia *ortogonalmente* l'ipersuperficie Σ, si ha $\text{sen}\,\omega = 1$, come risulta dalle (15) e (14).

Siano Σ e Σ_1 due ipersuperficie immerse nella V_n, e supponiamo che si taglino; allora, in ogni punto Q comune ad esse si chiama angolo di Σ e Σ_1 l'angolo acuto formato dalle normali in Q alle due ipersuperficie.

Per determinare tale angolo è utile il seguente

TEOREMA IV. - *Se $f(Q) = 0$ e $f_1(Q) = 0$ sono le equazioni, sulla V_n, di Σ e Σ_1, l'angolo ω da esse formato si calcola colla formula:*

$$\cos\omega = \frac{\text{mod}\,(\text{grad}_v f \times \text{grad}_v f_1)}{\text{mod grad}_v f \cdot \text{mod grad}_v f_1}. \tag{16}$$

Infatti, osservando che i vettori $\text{grad}_v f / \text{mod grad}_v f$, $\text{grad}_v f_1 / \text{mod grad}_v f_1$ sono unitari e normali a Σ e Σ_1, la formula (10) ci dà senz'altro la (16).

5. Variazione di un arco di curva.

Sia W_m una varietà ad m dimensioni ($m \leq n$) immersa nella V_n, e diciamo M, N due punti qualunque di una curva C appartenente alla W_m.

Diamo poi ad ogni punto della curva C uno spostamento infinitesimo δQ, tangente alla W_m, il che equivale a dare una deformazione infinitesima alla C, e calcoliamo la *variazione* δs dell'arco s di curva compreso fra i punti M ed N.

Tale variazione è data dalla formula:

$$(17) \qquad \delta s = (\delta Q \times Q')_N - (\delta Q \times Q')_M - \int_M^N \delta Q \times Q'' ds,$$

ove Q' e Q'' sono le derivate prima e seconda di Q rispetto all'arco s di C.

Infatti, il punto Q che descrive la curva C è funzione di una variabile p, e chiamando a, b i valori (costanti) di p corrispondenti ai punti M, N, l'arco s è dato dalla (1), perciò ne viene:

$$\delta s = \int_a^b \delta(\mathrm{mod}\, dQ/dp) dp = \int_M^N \delta\, \mathrm{mod}\, dQ;$$

ma $(\mathrm{mod}\, dQ)^2 = dQ^2$, quindi, differenziando col simbolo δ, risulta:

$$\mathrm{mod}\, dQ \cdot \delta\, \mathrm{mod}\, dQ = dQ \times \delta dQ,$$

da cui ricordando la (1):

$$\delta\, \mathrm{mod}\, dQ = dQ \times \delta dQ / \mathrm{mod}\, dQ = d\delta Q \times dQ/ds,$$

perciò, sostituendo ed integrando poi per parti:

$$\delta s = \int_M^N d\delta Q \times Q' = \left(\delta Q \times Q'\right)_M^N - \int_M^N \delta Q \times Q'' ds,$$

che dimostra la (17).

Più in generale, se u è una funzione numerica del punto Q mobile sulla W_m, si ottiene, con un calcolo del tutto analogo al precedente:

$$\delta \int_M^N u ds = (\delta Q \times u Q')_N - (\delta Q \times u Q')_M - \int_M^N \delta Q \times [d(uQ') - \operatorname{grad} u \cdot ds].$$

6. Geodetiche e loro proprietà.

Sia ancora W_m una varietà ad m dimensioni, immersa nella V_n, allora si chiamano *geodetiche* di W_m quelle linee per le quali la variazione prima dell'arco compreso fra due punti arbitrari di una qualunque di esse è nulla quando si passa dalla curva considerata ad ogni altra curva infinitamente vicina, passante per gli stessi due punti e appartenente alla W_m.

Le linee che segnano il più breve cammino, sulla W_m, fra due punti dati, vanno cercate fra le geodetiche che passano per quei due punti.

Indichiamo con M, N due punti della W_m, e diciamo G l'arco di geodetica che li congiunge; consideriamo poi sulla W_m un altro arco G' di curva, avente gli stessi estremi M, N e infinitamente vicino a G: tale arco si può ovviamente considerare come ottenuto deformando infinitamente poco l'arco G senza uscire dalla W_m, il che equivale a dare ad ogni punto di G uno spostamento infinitesimo δQ. Se allora chiamiamo s la lunghezza dell'arco G di geodetica, sarà $s + \delta s$ la lunghezza dell'arco di G', e dalla condizione posta per le geodetiche si trae $\delta s = 0$, cioè

$$\delta \int_M^N \operatorname{mod} dQ = 0, \tag{18}$$

la quale equazione determina le geodetiche.

Ne seguono le proprietà:

TEOREMA I. - *L'equazione differenziale delle geodetiche di* W_m *è*:

$$Q'' \times \delta Q = 0, \tag{19}$$

qualunque sia lo spostamento δQ *tangente a* W_m *in* Q.

Infatti, poichè i punti M, N sono fissi, lo spostamento δQ si annulla nei punti M ed N, e allora la (17) porge senz'altro:

$$\delta s = -\int_M^N \delta Q \times Q'' ds,$$

di qui si trae che in ogni punto della geodetica considerata deve essere verificata la (19), perchè, in caso contrario, se si danno ai punti Q della geodetica G spostamenti δQ che formino angolo acuto col vettore Q'', il prodotto $\delta Q \times Q''$ risulterebbe positivo, quindi $\delta s < 0$, perciò la lunghezza dell'arco diminuirebbe passando dalla G alla G', il che è assurdo, perchè la G è una geodetica.

Teorema II. - *Una curva della* W_m *è una geodetica quando la normale principale alla curva in ogni punto* Q *è normale alla* W_m *in* Q.

Ciò risulta subito dalla (19) osservando che la normale principale in Q ha la direzione del vettore Q'' (§ 3).

Se la varietà W_m coincide colla V_n stessa, dalla (19) si deduce il seguente

Teorema III. - *L'equazione differenziale delle geodetiche di* V_n *è*

$$Q''_v = 0, \quad \text{oppure} \quad (dt)_v = 0, \tag{20}$$

ove Q''_v *e* $(dt)_v$ *indicano le proiezioni ortogonali dei vettori* Q'' *e* dt *sullo spazio tangente alla* V_n *in* Q.

Sussiste pure il seguente

Teorema IV. - *Una geodetica della* V_n *è anche geodetica per ogni* W_m *passante per questa curva e appartenente a* V_n.

E infatti, se è vera la (20) è chiaro che sarà pure verificata la (19).

L'equazione (20) è di secondo ordine, e lineare rispetto alla derivata seconda; se ne deduce, dai teoremi generali sull'integrazione delle equazioni differenziali, la proprietà:

Teorema V. - *Per un punto qualunque della* V_n *passa una sola geodetica avente per tangente in esso una tangente determinata della* V_n.

Ossia, una geodetica di V_n è completamente determinata dalla condizione di passare per un punto di V_n e di avervi una data tangente.

Osservazione. - Se si considerano, in generale, *tutte* le curve soddisfacenti alla (20), allora è facile vedere che per due punti dati M, N di V_n, anche molto vicini fra loro, possono passare molte di tali curve; basta ad es. pensare, nello spazio ordinario, ad un cilindro circolare, per il quale, come si è visto, la (20) esprime che la normale principale alla curva deve essere normale al cilindro, e allora, come è notissimo, si sa che le curve che soddisfano alla (20), sono *eliche circolari*; ora supponendo, ad es., che M, N stiano sopra una stessa generatrice, è chiaro che soddisfa alla (20) il segmento di generatrice MN compreso fra M ed N, come pure le eliche il cui passo è un sottomultiplo qualunque di MN, e che quindi vanno da M ad N avvolgendosi più volte sul cilindro. È chiaro che di queste varie curve solo il segmento MN soddisfa alla condizione del cammino più breve fra M ed N.

7. Ipersuperficie geodeticamente parallele.

Sia W_{n-1} una ipersuperficie immersa nella V_n; sussistono allora le proprietà seguenti.

Teorema I. - *Se sopra tutte le geodetiche di* V_n, *normali all'ipersuperficie* W_{n-1}, *si portano a partire dalle loro intersezioni colla* W_{n-1} *degli archi eguali, allora il luogo geometrico degli estremi di tali archi è un'ipersuperficie* W'_{n-1} *di* V_n *normale a tutte le geodetiche.*

Infatti, applicando la (17) alle geodetiche considerate avremo:

$$(\delta Q \times Q')_N - (\delta Q \times Q')_M = 0;$$

ora supponiamo che M sia il punto d'intersezione di una di queste geodetiche colla W_{n-1}, allora, osservando che lo spostamento δQ è tangente alla W_{n-1}, si conclude che il secondo termine è nullo, e perciò deve essere nullo anche il primo, il che prova che l'ipersuperficie W'_{n-1} descritta dal punto N è normale alle geodetiche.

Si suole dire che le ipersuperficie W_{n-1} e W'_{n-1} sono *geodeticamente parallele*.

Teorema II. - *Se l'ipersuperficie* W'_{n-1} *di* V_n *taglia ad angolo retto tutte le geodetiche di* V_n *normali all'ipersuperficie* W_{n-1}, *allora le lunghezze degli archi di geodetica compresi fra* W_{n-1} *e* W'_{n-1} *sono eguali.*

E infatti, in queste ipotesi, la (17) porge $\delta s = 0$.

Corollario. - *Se sopra tutte le geodetiche di* V_n, *passanti per un punto* M *si portano a partire da* M *degli archi eguali, il luogo geometrico degli estremi di tali archi è una ipersuperficie di* V_n, *normale a tutte le geodetiche; e viceversa.*

Infatti, nelle ipotesi fatte, la (17) porge: $(\delta Q \times Q')_N = 0$. E viceversa.

Se, per maggior chiarezza, chiamiamo f la lunghezza dell'arco di geodetica compreso fra i punti M, N, è chiaro che f è una funzione determinata di M ed N, che si suole chiamare *distanza geodetica* (sulla V_n) dei due punti M ed N.

Indicando con $\operatorname{grad}_v,_M f$ e $\operatorname{grad}_v,_N f$ i gradienti superficiali di f, calcolati nell'ipotesi che varii solo il punto M, ovvero solo il punto N (gradienti parziali), sussistono le proprietà seguenti.

Teorema III. - *La distanza geodetica* f *soddisfa alle equazioni*

$$(21) \qquad \operatorname{grad}_v,_N f = dN/ds, \quad \operatorname{grad}_v,_M f = -dM/ds,$$

$$(22) \qquad (\operatorname{grad}_v,_N f)^2 = 1, \quad (\operatorname{grad}_v,_M f)^2 = 1.$$

Infatti, nel caso di una geodetica, la (17) porge:

$$\delta f = (\delta Q \times Q')_N - (\delta Q \times Q')_M,$$

e poichè f è funzione di M e di N si ha pure:

$$\delta f = \operatorname{grad}_v,_M f \times \delta M + \operatorname{grad}_v,_N f \times \delta N,$$

e confrontando queste due espressioni di δf si hanno le (21).

E poichè i vettori dN/ds, dM/ds sono unitari, dalle (21) seguono senz'altro le (22).

I primi membri delle (22) mostrano che *il parametro differenziale primo della distanza geodetica deve valere sempre 1.*

TEOREMA IV. - *Viceversa, se la funzione f soddisfa all'equazione*

$$(\mathrm{grad}_v, {}_Q f)^2 = 1, \tag{23}$$

le ipersuperficie $f(Q) =$ cost. della V_n saranno geodeticamente parallele, e la distanza geodetica (costante) delle due ipersuperficie $f(Q) = a$, $f(Q) = b$ sarà eguale a $b - a$.

Infatti, dalla (23) segue che la (14) si riduce a $(df/ds)^2 = 1$, da cui $f = s +$ cost; di qui risulta facilmente il teorema.

TEOREMA V. - *Affinchè le ipersuperficie $f(Q) =$ cost siano geodeticamente parallele è necessario e sufficiente che $(\mathrm{grad}_v, {}_Q f)^2$ sia funzione della sola f.*

È intanto chiaro che la condizione indicata è necessaria; per mostrare che è anche sufficiente supponiamo $(\mathrm{grad}_v, {}_Q f)^2 = F(f)$, ove $F(f)$ è una certa funzione (sempre positiva) di f, e allora avremo:

$$\left[(\mathrm{grad}_v, {}_Q f)/\sqrt{F(f)}\right]^2 = 1,$$

la quale relazione si può pure scrivere così:

$$\left(\mathrm{grad}_v, {}_Q \int \frac{df}{\sqrt{F(f)}}\right)^2 = 1,$$

perciò ponendo $\varphi = \int df/\sqrt{F(f)}$, risulta $(\mathrm{grad}_v, {}_Q \varphi)^2 = 1$, che non è altro che la (23), quindi le ipersuperficie $\varphi(Q) =$ cost, ovvero, il che equivale, $f(Q) =$ cost, saranno geodeticamente parallele.

Per altre proprietà delle geodetiche cfr. *Espaces courbes*, pag. 146.

Capitolo III.

Omografia di Riemann.

1. Differenziale superficiale di un vettore ([1]).

Consideriamo una varietà V_n, ad n dimensioni, descritta da un punto generico Q, e immersa in uno spazio euclideo S_N, avente un numero N di dimensioni sufficientemente grande.

Supponiamo che nel punto generico Q della V_n esista uno spazio euclideo ben determinato, S_n, ad n dimensioni (immerso in S_N) *tangente* alla V_n (Cap. II, § 3).

Se u è un vettore, funzione del punto Q, tale che la retta Qu sia tangente a V_n in Q, diremo brevemente che il vettore u è tangente alla V_n in Q od anche che è un *vettore tangenziale*. Se ora diamo al punto Q uno spostamento infinitesimo qualunque dQ sulla V_n, il vettore u subirà un incremento, pure infinitesimo, du, ed è chiaro che questo vettore, in generale, non risulta più tangente alla V_n in Q, ma è un vettore di S_N.

In ciò che segue, ci è indispensabile considerare la *componente tangenziale* di tale vettore, cioè la sua proiezione (ortogonale) sullo spazio S_n tangente alla V_n in Q; questa componente la indicheremo con $(du)_v$, e risulterà perciò definita dalla condizione:

$$(1) \qquad [(du)_v - du] \times a = 0,$$

ove a è un vettore qualunque, tangente alla V_n in Q.

([1]) La prima introduzione della nozione di operatori superficiali (nell' ordinaria geometria) si trova nella Mem. di Burgatti del 1917 « I teoremi del grad, div e rot sopra una sup. ecc. ». Mem. Acc. Bologna.

Dalla (1) si deduce ovviamente:

(2) $$(\boldsymbol{du})_v = d\boldsymbol{u} + \boldsymbol{U},$$

ove $\boldsymbol{U}$ è un vettore *normale* alla V_n in Q.

Il vettore $(\boldsymbol{du})_v$ lo chiameremo *differenziale di* $\boldsymbol{u}$ *sulla varietà* V_n, o, brevemente, *differenziale superficiale di* $\boldsymbol{u}$, e, per semplicità di scrittura, lo indicheremo anche con $d_v\boldsymbol{u}$.

Riferendoci ad un sistema unitario-ortogonale di vettori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n$, tangenti alla V_n in Q (e quindi funzioni di Q), dalla (1) risulta tosto:

(3) $$d_v\boldsymbol{u} = \Sigma d\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s = \Sigma \mathrm{H}(\boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{i}_s) d\boldsymbol{u},$$

ove nella Σ si intende che l'indice s varia da 1 ad n. E siccome si ha evidentemente: $\boldsymbol{u} = \Sigma \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s$, la (3) mostra che per calcolare $d_v\boldsymbol{u}$ basta differenziare la precedente eguaglianza *riguardandovi i vettori* $\boldsymbol{i}_s$ *come costanti*.

Poichè ogni spostamento infinitesimo dQ del punto Q sulla V_n è un vettore tangente alla V_n, si può scrivere $d_vQ = dQ$; quindi, considerando un altro spostamento infinitesimo δQ di Q sulla V_n, si ha, dalla (3):

$$d_v\delta_v Q = d_v\delta Q = \Sigma d\delta Q \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s,$$

e siccome $d\delta Q = \delta dQ$, ne segue l'importantissima relazione:

(4) $$d_v\delta_v Q = \delta_v d_v Q,$$

che sarà spesso adoperata nel seguito.

2. Proprietà dei differenziali superficiali.

Per i differenziali superficiali, ora definiti, sussistono proprietà perfettamente analoghe a quelle dei differenziali ordinari.

Vediamole brevemente. Con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ indicheremo dei vettori tangenti alla V_n in Q.

a) Si ha:

(5) $$d_v(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = d_v\boldsymbol{u} + d_v\boldsymbol{v}.$$

È conseguenza immediata della (2), od anche della (3).

b) Se m è una funzione numerica di Q, e si conviene che $d_v m = dm$, risulta:

$$(6) \qquad d_v(mu) = d_v m \cdot u + m d_v u.$$

Infatti, dalla (2) si ha, se U, V sono vettori normali alla V_n in Q:

$$\begin{aligned} d_v(mu) &= d(mu) + V = dm \cdot u + m du + V = \\ &= d_v m \cdot u + m d_v u + (V - mU), \end{aligned}$$

da cui segue la (6).

c) Si ha:

$$(7) \qquad d_v(u \times v) = u \times d_v v + v \times d_v u.$$

Infatti, applicando la (2) si deduce:

$$\begin{aligned} d_v(u \times v) &= d(u \times v) = u \times dv + v \times du = u \times (d_v v - V) + \\ &+ v \times (d_v u - U) = u \times d_v v + v \times d_v u. \end{aligned}$$

d) Nel caso di una varietà V_3 a 3 dimensioni, si ha:

$$(8) \qquad d_v(u \wedge v) = (d_v u) \wedge v + u \wedge d_v v,$$

$$(9) \quad d_v(u \wedge v \times w) = (d_v u) \wedge v \times w + u \wedge (d_v v) \times w + u \wedge v \times d_v w.$$

Infatti, osservando che $u \wedge v$ è pure vettore tangente alla V_3 in Q, dalla (2) si deduce che si può porre, se W è un vettore normale alla V_3 in Q:

$$\begin{aligned} (a) \quad d_v(u \wedge v) &= d(u \wedge v) + W = (du) \wedge v + u \wedge dv + W = \\ &= (d_v u) \wedge v + u \wedge d_v v + (W - U \wedge v - u \wedge V), \end{aligned}$$

ora, siccome, ad es., il vettore U è normale alla V_3 in Q e quindi ad ogni vettore a tangente alla V_3 in Q, ne segue che esso è normale anche al vettore $v \wedge a$, che è tangente alla V_3 in Q, perciò $U \times v \wedge a = 0$, cioè $U \wedge v \times a = 0$, la quale mostra che il vettore $U \wedge v$ è normale alla V_3 in Q; per la stessa ragione anche il vettore $u \wedge V$ è normale alla V_3 in Q, perciò la stessa proprietà compete al vettore $(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{V})$ e allora dalla (α) si conclude senz'altro la (8). La (9) risulta facilmente dalle (7), (8).

3. Differenziale superficiale delle omografie.

Indichiamo con μ_1 un'omografia ordinaria (o di ordine 1), funzione del punto Q della varietà V_n e che trasformi vettori tangenti a V_n in Q in vettori pure tangenti a V_n in Q.

Chiameremo *differenziale di* μ_1 *sulla varietà* V_n, o, brevemente, *differenziale superficiale di* μ_1, e la indicheremo colla notazione $d_v\mu_1$, quell'omografia (ordinaria) tale che, qualunque sia il vettore $\boldsymbol{u}$, tangente alla V_n in Q, si abbia:

$$(d_v\mu_1)\boldsymbol{u} = d_v(\mu_1\boldsymbol{u}) - \mu_1 d_v\boldsymbol{u}. \tag{10}$$

È facile mostrare che *l'operatore* $d_v\mu_1$, *che risulta definito dalla* (10), *è effettivamente un'omografia che trasforma vettori tangenti alla* V_n *in* Q *in vettori pure tangenti alla* V_n *in* Q.

Infatti, se $\boldsymbol{v}$ è un altro vettore tangente alla V_n in Q, ed m è una funzione numerica di Q, si ha dalla (10), tenendo conto delle (5), (6):

$$(d_v\mu_1)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = d_v(\mu_1\boldsymbol{u} + \mu_1\boldsymbol{v}) - \mu_1(d_v\boldsymbol{u} + d_v\boldsymbol{v}) =$$
$$= [d_v(\mu_1\boldsymbol{u}) - \mu_1 d_v\boldsymbol{u}] + [d_v(\mu_1\boldsymbol{v}) - \mu_1 d_v\boldsymbol{v}] = (d_v\mu_1)\boldsymbol{u} + (d_v\mu_1)\boldsymbol{v},$$

$$(d_v\mu_1)(m\boldsymbol{u}) = d_v(m\mu_1\boldsymbol{u}) - \mu_1 d_v(m\boldsymbol{u}) = (d_v m)\mu_1\boldsymbol{u} + m d_v(\mu_1\boldsymbol{u}) -$$
$$- [(d_v m)\mu_1\boldsymbol{u} + m\mu_1 d_v\boldsymbol{u}] = m[d_v(\mu_1\boldsymbol{u}) - \mu_1 d_v\boldsymbol{u}] = m(d_v\mu_1)\boldsymbol{u},$$

le quali relazioni dimostrano l'asserto.

Inoltre l'operatore $d_v\mu_1$ è indipendente da $\boldsymbol{u}$, per un noto teorema funzionale (*Espaces*, pag. 11).

La (10) può ancora scriversi:

$$d_v(\mu_1\boldsymbol{u}) = (d_v\mu_1)\boldsymbol{u} + \mu_1 d_v\boldsymbol{u}. \tag{10'}$$

Similmente, se μ_2 è un'omografia di 2° ordine, funzione di Q, che trasforma coppie di vettori tangenti alla V_n in Q, in vettori tangenti alla V_n in Q, chiameremo *differenziale*

superficiale di μ_2, e la indicheremo con $d_v\mu_2$, l'omografia di 2° ordine che risulta definita ponendo:

$$(11) \qquad (d_v\mu_2)u = d_v(\mu_2 u) - \mu_2 d_v u;$$

di qui e dalla (10) segue poi la relazione analoga alla (10'):

$$d_v(\mu_2 uv) = (d_v\mu_2)uv + \mu_2(d_v u)v + \mu_2 u d_v v.$$

Si vede subito che l'omografia $d_v\mu_2$ trasforma coppie di vettori tangenti alla V_n in Q, in vettori pure tangenti alla V_n in Q.

In modo analogo, se si ha un'omografia μ_3 di 3° ordine, funzione di Q, che trasforma terne di vettori tangenti alla V_n in Q, in vettori tangenti a V_n in Q, si può definire il differenziale superficiale $d_v\mu_3$ della μ_3, e risulta, analogamente alla (10'):

$$(10'') \qquad d_v(\mu_3 uv) = (d_v\mu_3)uv + \mu_3(d_v u)v + \mu_3 u d_v v,$$

$$(10''') \quad d_v(\mu_3 uvw) = (d_v\mu_3)uvw + \mu_3(d_v u)vw + \mu_3 u(d_v v)w + \mu_3 uvd_v w,$$

precisamente come per i differenziali nello spazio euclideo S_N.

Formule perfettamente analoghe si hanno per una μ_r.

4. Differenziali superficiali di operatori lineari.

Indichiamo con μ_r un'omografia d'ordine r, funzione del punto generico Q mobile sulla V_n, la quale trasformi le r-ple di vettori tangenti alla V_n in Q, in vettori tangenti alla V_n in Q.

Considerando allora gli operatori lineari K, I_1, k, k*, v, introdotti nel § 9 del Cap. I, sussiste l'importante proprietà che *tali operatori sono permutabili coll'operatore* d_v *di differenziazione superficiale*, cioè:

$$(12) \qquad d_v \mathrm{K}\mu_r = \mathrm{K} d_v\mu_r, \quad d_v \mathrm{I}_1\mu_r = \mathrm{I}_1 d_v\mu_r, \qquad (r \geq 1),$$

$$(13) \quad d_v \mathrm{k}\mu_r = \mathrm{k} d_v\mu_r, \; d_v\mathrm{k}^*\mu_r = \mathrm{k}^* d_v\mu_r, \; d_v \mathrm{v}\mu_r = \mathrm{v} d_v\mu_r, (r \geq 2).$$

Dimostriamo intanto la prima delle (12) per $r=1$; se u, v, w sono vettori tangenti a V_n in Q, si ha, dalla (21) del Cap. I:

$$u \times K\mu_1 v = v \times \mu_1 u, \tag{a}$$

da cui, prendendo il differenziale superficiale, e ricordando le (7), (10′), risulta:

$$\begin{aligned} d_v u \times K\mu_1 v + u \times d_v(K\mu_1)v + u \times K\mu_1 d_v v = \\ = d_v v \times \mu_1 u + v \times (d_v\mu_1)u + v \times \mu_1 d_v u; \end{aligned}$$

ora, in virtù della (a), il primo termine e l'ultimo si elidono, perchè $d_v u$ è, come u, tangente a V_n in Q, e così si elidono il terzo e il quarto termine, perciò rimane

$$u \times d_v(K\mu_1)v = v \times (d_v\mu_1)u,$$

od anche, per la (a),

$$u \times d_v(K\mu_1)v = u \times K(d_v\mu_1)v,$$

e per l'arbitrarietà dei vettori u, v si deduce

$$d_v K\mu_1 = K d_v\mu_1; \qquad \text{c. d. d.} \tag{14}$$

Supponiamo ora, per fissare le idee, $r=3$, e mostriamo che $d_v K\mu_3 = K d_v\mu_3$.

Dalla (33) del Cap. I si ha:

$$(K\mu_3)uv = K(\mu_3 uv), \tag{b}$$

da cui, ricordando la (10″) e la (14):

$$\begin{aligned} (d_v K\mu_3)uv + K\mu_3(d_v u)v + K\mu_3 u d_v v = \\ = K[(d_v\mu_3)uv + \mu_3(d_v u)v + \mu_3 u d_v v], \end{aligned}$$

e poichè la (b) sussiste se al posto di u si pone $d_v u$, o se al posto di v si pone $d_v v$, la precedente relazione si riduce ad:

$$(d_v K\mu_3)uv = K(d_v\mu_3)uv,$$

la quale, per l'arbitrarietà dei vettori u, v dimostra la prima delle (12).

Per stabilire la seconda delle (12), supponiamo dapprima $r = 1$ ed osserviamo che, riferendoci ad un sistema unitario-ortogonale di vettori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \dots, \boldsymbol{i}_n$, tangenti alla V_n in Q, si ha, dalla (10) del Cap. I, $I_1\mu_1 = \Sigma \boldsymbol{i}_s \times \mu_1 \boldsymbol{i}_s$, da cui, ricordando le (7), (10'):

$$(a')\quad d_v I_1 \mu_1 = \Sigma(d_v \boldsymbol{i}_s \times \mu_1 \boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_s \times \mu_1 d_v \boldsymbol{i}_s) + \Sigma \boldsymbol{i}_s \times (d_v \mu_1)\boldsymbol{i}_s .$$

Ora osserviamo che i vettori $\boldsymbol{i}_s$ soddisfano alle condizioni

$$\boldsymbol{i}_s^2 = 1, \quad \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_h = 0, \quad \text{per} \quad s \neq h,$$

perciò prendendo il differenziale superficiale risulta:

$$(b')\qquad \boldsymbol{i}_s \times d_v \boldsymbol{i}_s = 0, \quad \boldsymbol{i}_s \times d_v \boldsymbol{i}_h + \boldsymbol{i}_h \times d_v \boldsymbol{i}_s = 0.$$

La prima di queste mostra che il vettore $d_v \boldsymbol{i}_s$ può rappresentarsi colla formula:

$$d_v \boldsymbol{i}_s = \Sigma_k m_{sk} \boldsymbol{i}_k ,$$

ove gli m_{sk} sono coefficienti numerici tali che $m_{ss} = 0$; la seconda delle (b') mostra poi che deve essere

$$(c')\qquad m_{ks} + m_{sk} = 0,$$

perciò si ha:

$$\Sigma_s(d_v \boldsymbol{i}_s \times \mu_1 \boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_s \times \mu_1 d_v \boldsymbol{i}_s) = \Sigma_s \Sigma_k m_{sk}(\boldsymbol{i}_k \times \mu_1 \boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_s \times \mu_1 \boldsymbol{i}_k);$$

ma scambiando s con k il secondo membro non dovrebbe cambiare, mentre invece i coefficienti m_{sk} cambiano tutti di segno in virtù della (c'), dunque questo secondo membro deve essere nullo e allora la (a') si riduce a

$$d_v I_1 \mu_1 = \Sigma \boldsymbol{i}_s \times (d_v \mu_1) \boldsymbol{i}_s ,$$

il cui secondo membro, per la citata (10) del Cap. I, vale appunto $I_1 d_v \mu_1$.

Se poi $r > 1$ si ricorre alla (34) del Cap. I, e si procede in modo del tutto analogo a quello seguito per stabilire la prima delle (12) per $r > 1$.

Passiamo a dimostrare la prima delle (13). Per fissar le idee, supponiamo $r = 3$, e osserviamo che si ha, dalla (35) del Cap. I:

$$(a'') \qquad (\mathrm{k}\mu_3)uvw = \mu_3 uwv,$$

da cui, per la (10‴):

$$\begin{aligned}(d_v\mathrm{k}\mu_3)\cdot uvw + (k\mu_3)(d_v u)vw + \mathrm{k}\mu_3 u(d_v v)w + (\mathrm{k}\mu_3)uvd_v w = \\ = (d_v\mu_3)uwv + \mu_3(d_v u)wv + \mu_3 u(d_v w)v + \mu_3 uwd_v v,\end{aligned}$$

ma siccome la (a'') sussiste se al posto di u si pone $d_v u$, ovvero al posto di v si pone $d_v v$, ovvero al posto di w si pone $d_v w$, ne segue che la relazione precedente si riduce a:

$$(d_v\mathrm{k}\mu_3)\cdot uvw = (d_v\mu_3)uwv;$$

ma il secondo membro, per la (a'') vale $(\mathrm{k}d_v\mu_3)uvw$, perciò si deduce, a causa della arbitrarietà di u, v, w, che

$$d_v\mathrm{k}\mu_3 = \mathrm{k}d_v\mu_3.$$

In modo analogo, partendo dalla (36) del Cap. I si stabilisce la seconda delle (13), e partendo dalla (42) del Cap. I, si dimostra la terza delle (13).

Nel caso di una varietà V_3 a tre dimensioni, si può considerare il *vettore* della omografia ordinaria μ_1, che si indica con $V\mu_1$, e che è definito dalla condizione

$$(14) \qquad 2(V\mu_1)\times u\wedge v = v\times\mu_1 u - u\times\mu_1 v,$$

ove u, v sono vettori qualunque, tangenti alla V_3 in Q.

Da essa è facile dedurre:

$$(15) \qquad d_v V\mu_1 = Vd_v\mu_1.$$

Basta infatti prendere il differenziale superficiale della (14) e poi imitare i calcoli fatti nelle dimostrazioni precedenti.

Da quanto precede si conclude quindi che *il simbolo d_v di differenziale superficiale relativo ad una varietà gode di* *proprietà del tutto analoghe a quelle dell'ordinario simbolo d di differenziale per gli spazi euclidei.*

OSSERVAZIONE. - La proprietà ora stabilita equivale a quest'altra, che *nel calcolo del differenziale superficiale delle* (*a*), (*b*), (*a''*), (14) *ecc. i vettori* u, v, w, i_1, i_2, ... (*pure essendo variabili*) *si comportano come delle costanti.*

5. Differenziali superficiali di 2° ordine; omografia di Riemann.

Indichiamo, come dianzi, con u un vettore funzione del punto Q (mobile sulla V_n), e tangente alla V_n in Q; allora se consideriamo due spostamenti infinitesimi qualunque dQ e δQ del punto Q sulla V_n, i corrispondenti differenziali superficiali $d_v u$, $\delta_v u$ del vettore u risultano espressi dalla (3), perciò si ha:

$$(16) \qquad d_v u = \Sigma du \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s, \quad \delta_v u = \Sigma \delta u \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s.$$

È assai facile calcolare i differenziali superficiali di 2° ordine, in generale diversi fra loro $\delta_v d_v u$, $d_v \delta_v u$; applicando l'operatore δ_v alla prima delle (16) e ricordando le proprietà del n. 2, si ha:

$$\delta_v d_v u = \Sigma \delta du \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s + \Sigma du \times \delta \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s + \Sigma du \times \boldsymbol{i}_s \cdot \delta_v \boldsymbol{i}_s;$$

e per ottenere $d_v \delta_v u$ basta scambiare d con δ, e risulta:

$$d_v \delta_v u = \Sigma d\delta u \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s + \Sigma \delta u \times d\boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s + \Sigma \delta u \times \boldsymbol{i}_s \cdot d_v \boldsymbol{i}_s.$$

Da queste eguaglianze si ottiene, per sottrazione:

$$(17) \qquad \begin{aligned} \delta_v d_v u - d_v \delta_v u &= \Sigma(du \times \delta \boldsymbol{i}_s - \delta u \times d\boldsymbol{i}_s)\boldsymbol{i}_s + \\ &+ \Sigma(du \times \boldsymbol{i}_s \cdot \delta_v \boldsymbol{i}_s - \delta u \times \boldsymbol{i}_s \cdot d_v \boldsymbol{i}_s), \end{aligned}$$

la quale mostra che, in generale, $\delta_v d_v u \neq d_v \delta_v u$.

Dalla (17) si deduce inoltre la seguente proprietà fondamentale:

La differenza $\delta_v d_v u - d_v \delta_v u$ *è funzione lineare dei vettori* dQ, δQ, u.

Infatti, osserviamo in primo luogo che se $\boldsymbol{v}$ è un vettore tangente alla V_n in Q, si ha, dalla (16):

$$d_v \boldsymbol{v} = \sum d\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s = \sum \frac{d\boldsymbol{v}}{dQ} dQ \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s = \left\{ \sum \mathrm{H}(\boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{i}_s) \right\} \frac{d\boldsymbol{v}}{dQ} dQ,$$

e ponendo, per brevità,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dQ}\right)_v = \left\{ \sum \mathrm{H}(\boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{i}_s) \right\} \frac{d\boldsymbol{v}}{dQ}, \tag{18}$$

è chiaro che $\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dQ}\right)_v$ è un'omografia ben determinata, che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori pure tangenti alla V_n in Q; essa può chiamarsi *derivata superficiale* del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto al punto Q, e si ha, da quanto precede:

$$d_v \boldsymbol{v} = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dQ}\right)_v dQ. \tag{19}$$

Ciò premesso, possiamo scrivere la (17) così:

$$\begin{aligned}\delta_v d_v \boldsymbol{u} - d_v \delta_v \boldsymbol{u} &= \sum \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} dQ \times \frac{d\boldsymbol{i}_s}{dQ} \delta Q - \frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} \delta Q \times \frac{d\boldsymbol{i}_s}{dQ} dQ \right) \boldsymbol{i}_s + \\ &+ \sum \left[\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} dQ \times \boldsymbol{i}_s \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{i}_s}{dQ}\right)_v \delta Q - \frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} \delta Q \times \boldsymbol{i}_s \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{i}_s}{dQ}\right)_v dQ \right],\end{aligned}$$

ed è chiaro che il secondo membro è funzione lineare tanto di dQ come di δQ.

Inoltre, se m è una funzione numerica di Q e si osserva che $\delta dm = d\delta m$, si ha:

$$\delta_v d_v(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - d_v \delta_v(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (\delta_v d_v \boldsymbol{u} - d_v \delta_v \boldsymbol{u}) + (\delta_v d_v \boldsymbol{v} - d_v \delta_v \boldsymbol{v}),$$

$$\begin{aligned}\delta_v d_v(m\boldsymbol{u}) - d_v \delta_v(m\boldsymbol{u}) &= \delta_v(dm \cdot \boldsymbol{u} + m d_v \boldsymbol{u}) - d_v(\delta m \cdot \boldsymbol{u} + m \delta_v \boldsymbol{u}) = \\ &= m(\delta_v d_v \boldsymbol{u} - d_v \delta_v \boldsymbol{u});\end{aligned}$$

da queste relazioni risulta che $\delta_v d_v \boldsymbol{u} - d_v \delta_v \boldsymbol{u}$ è funzione lineare anche di $\boldsymbol{u}$.

Con ciò la proprietà enunciata è completamente dimostrata.

Poichè, dunque, il primo membro della (17) è funzione lineare di ciascuno dei vettori dQ, δQ, u, si conclude, in base ad una proprietà generale (*Espaces*, pag. 24), che esiste una ed una sola omografia di 3° ordine, che indicheremo con $\mathfrak{R}$, funzione di Q (ma non di dQ, δQ, u) tale che

$$\delta_v d_v u - d_v \delta_v u = \mathfrak{R} dQ \delta Q u, \tag{20}$$

qualunque siano i vettori dQ, δQ, u (tangenti alla V_n in Q).

L'omografia di 3° ordine $\mathfrak{R}$ la chiameremo *omografia di Riemann.*

È chiaro che $\mathfrak{R} dQ \delta Q$ è un'omografia ordinaria, ed $\mathfrak{R} dQ$ è un'omografia di 2° ordine.

Come vettore u si può prendere uno spostamento infinitesimo $d'Q$ (che è lo stesso di $d_v'Q$) di Q sulla V_n, e allora la (20) porge:

$$\delta_v d_v d_v' Q - d_v \delta_v d_v' Q = \mathfrak{R} dQ \delta Q d' Q. \tag{20'}$$

L'omografia $\mathfrak{R}$ si può evidentemente anche applicare ad una terna di vettori di moduli finiti, tangenti alla V_n in Q.

Osservazione. - Se la varietà V_n è *euclidea*, i vettori i_s sono indipendenti da Q, cioè costanti, e allora la (17) mostra che $\delta_v d_v u - d_v \delta_v u = 0$, dopo di che la (20) porge subito $\mathfrak{R} = 0$.

6. Proprietà fondamentali dell'omografia di Riemann.

L'omografia di Riemann $\mathfrak{R}$ gode delle proprietà fondamentali espresse dalle formule seguenti, ove a, b, c, d sono vettori tangenti alla V_n in Q:

(21) $\mathfrak{R} abc = - \mathfrak{R} bac$, (proprietà *emisimmetrica*),

(22) $\mathfrak{R} abc \times d = - \mathfrak{R} abd \times c$, (proprietà *assiale*),

(23) $\mathfrak{R} abc + \mathfrak{R} bca + \mathfrak{R} cab = 0$, (proprietà *ciclica*),

(24) $\mathfrak{R} abc \times d = \mathfrak{R} cda \times b$, (proprietà *commutativa*).

Queste proprietà possono scriversi sotto forma più semplice, introducendo gli operatori K, k, k*; essendo i vettori a, b, c arbitrari, si ha dalla (21):

$$(21') \qquad \mathfrak{R}ab = -\mathfrak{R}ba,$$

od anche, più brevemente:

$$(21'') \qquad \mathrm{k}^*\mathfrak{R} = -\mathfrak{R}.$$

Poichè $\mathfrak{R}ab$ è un'omografia ordinaria, la (22) esprime che essa è *assiale* (Cap. I, n. 6), perciò si può scrivere:

$$(22') \qquad \mathrm{K}(\mathfrak{R}ab) = -\mathfrak{R}ab,$$

od anche, più semplicemente:

$$(22'') \qquad \mathrm{K}\mathfrak{R} = -\mathfrak{R}.$$

La (23) può scriversi, tenendo anche conto della (21″) e delle (41) del Cap. I: $\mathfrak{R}abc + \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R}abc - \mathrm{k}\mathfrak{R}abc = 0$, da cui:

$$(23') \qquad \mathfrak{R} + \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R} - \mathrm{k}\mathfrak{R} = 0.$$

La (24) può anche scriversi:

$$\mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R}cab \times d = \mathrm{k}\mathfrak{R}cad \times b$$

cioè, per il teorema di commutazione:

$$\mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R}cab \times d = \mathrm{Kk}\mathfrak{R}cab \times d,$$

e perciò:

$$(24') \qquad \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R} = \mathrm{Kk}\mathfrak{R}.$$

Ciò premesso, passiamo a dimostrare le (21) .... (24).

Dim. 21. - Scambiando, nella (20′) gli operatori d e δ, e quindi d_v e δ_v, il 1° membro cambia solo di segno, perciò $\mathfrak{R}dQ\delta Qd'Q = -\mathfrak{R}\delta QdQd'Q$, che equivale alla (21).

Dim. 22. - Sia $\delta'Q$ un altro spostamento di Q sulla V_n; allora si ha:

$$d_v(d_v'Q \times \delta_v'Q) = d_v'Q \times d_v\delta_v'Q + \delta_v'Q \times d_vd_v'Q,$$

$$\delta_vd_v(d_v'Q \times \delta_v'Q) = d_v'Q \times \delta_vd_v\delta_v'Q + \delta_vd_v'Q \times d_v\delta_v'Q +$$
$$+ \delta_v'Q \times \delta_vd_vd_v'Q + \delta_v\delta_v'Q \times d_vd_v'Q;$$

scambiando in questa d_v con δ_v, si ha:

$$d_v\delta_v(d_v'Q \times \delta_v'Q) = d_v'Q \times d_v\delta_v\delta_v'Q + d_v d_v'Q \times \delta_v\delta_v'Q + \\ + \delta_v'Q \times d_v\delta_v d_v'Q + d_v\delta_v'Q \times \delta_v d_v'Q,$$

sottraendo, ed osservando che i primi membri sono eguali, risulta:

$$0 = d_v'Q \times (\delta_v d_v \delta_v'Q - d_v\delta_v\delta_v'Q) + \delta_v'Q \times (\delta_v d_v d_v'Q - d_v\delta_v d_v'Q)$$

cioè, per la (20′)

$$\mathfrak{R}dQ\delta Q\delta'Q \times d'Q + \mathfrak{R}dQ\delta Q d'Q \times \delta'Q = 0,$$

che equivale alla (22).

Dim. 23. - Se nella (20′) si permutano circolarmente i differenziali d_v, δ_v, d_v' e poi si sommano membro a membro le eguaglianze ottenute, e si tiene presente la (4), il 1° membro risulta identicamente nullo e si ha:

$$0 = \mathfrak{R}dQ\delta Q d'Q + \mathfrak{R}\delta Q d'Q dQ + \mathfrak{R}d'Q dQ\delta Q,$$

che equivale alla (23).

Dim. (24). - Dalla (23) si ha

$$(a) \qquad \mathfrak{R}abc \times d + \mathfrak{R}bca \times d + \mathfrak{R}cab \times d = 0,$$

e permutando circolarmente a, b, c, d si ottiene:

$$(b) \qquad \mathfrak{R}bcd \times a + \mathfrak{R}cdb \times a + \mathfrak{R}dbc \times a = 0,$$

$$(c) \qquad \mathfrak{R}cda \times b + \mathfrak{R}dac \times b + \mathfrak{R}acd \times b = 0,$$

$$(d) \qquad \mathfrak{R}dab \times c + \mathfrak{R}abd \times c + \mathfrak{R}bda \times c = 0;$$

ora sommando le (a), (b) e dal risultato sottraendo la (c) e la (d), e tenendo conto delle (21), (22) si trova che 8 dei dodici termini si elidono a due a due, e che i 4 termini rimanenti sono a due a due eguali, e precisamente si ha:

$$2\mathfrak{R}abc \times d - 2\mathfrak{R}cda \times b = 0,$$

da cui segue la (24).

7. Identità di Bianchi.

Fra i differenziali superficiali dell'omografia di RIEMANN $\mathfrak{R}$ intercede una relazione molto notevole, che è stata stabilita la prima volta dal PADOVA nel 1889, e poi venne ritrovata dal BIANCHI nel 1902, e che ora è nota col nome di *identità di Bianchi.*

Siano dQ, δQ, $d'Q$ tre spostamenti infinitesimi arbitrari del punto Q sulla V_n, e siano $d_v\mathfrak{R}$, $\delta_v\mathfrak{R}$, $d_v'\mathfrak{R}$ i differenziali superficiali corrispondenti dell'omografia $\mathfrak{R}$; allora l'identità di BIANCHI può scriversi:

$$(25) \qquad d_v'\mathfrak{R}\cdot dQ\delta Q + d_v\mathfrak{R}\cdot \delta Q d'Q + \delta_v\mathfrak{R}\cdot d'QdQ = 0.$$

Infatti, dalla (20′), indicando con $\delta'Q$ un altro spostamento infinitesimo di Q sulla V_n, si deduce:

$$\mathfrak{R}dQ\delta Q\delta' Q = \delta_v d_v \delta_v' Q - d_v\delta_v\delta_v' Q,$$

e prendendo il differenziale superficiale col simbolo d_v' risulta:

$$d_v'(\mathfrak{R}dQ\delta Q)\cdot\delta'Q = d_v'\delta_v d_v\delta_v'Q - d_v'd_v\delta_v\delta_v'Q - \mathfrak{R}dQ\delta Q d_v'\delta_v'Q;$$

ora, la (20′) sussiste per un qualunque vettore infinitesimo $d'Q$ tangente alla V_n in Q, quindi sussisterà anche se al posto di $d'Q$ si pone il vettore $d_v'\delta_v'Q$, che è pure tangente alla V_n in Q, perciò si ha:

$$\mathfrak{R}dQ\delta Q d_v'\delta_v'Q = \delta_v d_v d_v'\delta_v'Q - d_v\delta_v d_v'\delta_v'Q,$$

e sostituendo:

$$d_v'(\mathfrak{R}dQ\delta Q)\cdot\delta'Q = d_v'\delta_v d_v\delta_v'Q - d_v'd_v\delta_v\delta_v'Q - \delta_v d_v d_v'\delta_v'Q + d_v\delta_v d_v'\delta_v'Q;$$

se ora sommiamo questa eguaglianza colle altre due che se ne deducono permutando circolarmente i tre differenziali d_v', d_v, δ_v, si trova che il secondo membro viene zero, perchè i termini si elidono evidentemente a due a due, e quindi risulta:

$$d_v'(\mathfrak{R}dQ\delta Q)\cdot\delta'Q + d_v(\mathfrak{R}\delta Q d'Q)\cdot\delta'Q + \delta_v(\mathfrak{R}d'QdQ)\cdot\delta'Q = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà del vettore $\delta' Q$:

$$d_v'(\mathfrak{R} dQ \delta Q) + d_v(\mathfrak{R} \delta Q d'Q) + \delta_v(\mathfrak{R} d'Q dQ) = 0,$$

che è una prima forma dell'identità di BIANCHI. Sviluppando poi i differenziali dei prodotti indicati mediante la (10''), e tenendo conto delle (4), (21') si conclude che i termini contenenti dei differenziali secondi di Q si elidono a due a due, e rimangono solo i tre termini che figurano nella (25), la quale risulta così dimostrata.

Si può porre: $d_v \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_v' dQ$, e così $\delta_v \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_v' \delta Q$ ...., ove $\mathfrak{R}_v'$ è una determinata omografia di 4° ordine, funzione di Q (ma non di dQ, δQ, ...) che si può chiamare *derivata superficiale* della $\mathfrak{R}$; e allora la (25) può porsi sotto la forma (scrivendo il 1° termine per ultimo):

$$\mathfrak{R}_v' dQ \delta Q d'Q + \mathfrak{R}_v' \delta Q d'Q dQ + \mathfrak{R}_v' d'Q dQ \delta Q = 0, \tag{26}$$

od ancora, se a, b, c sono vettori tangenti alla V_n in Q:

$$\mathfrak{R}_v' abc + \mathfrak{R}_v' bca + \mathfrak{R}_v' cab = 0. \tag{26'}$$

La (26') mostra che *l'identità di Bianchi si può immaginare ottenuta dalla proprietà ciclica* (23) *sostituendo ad* $\mathfrak{R}$ *la sua derivata superficiale* $\mathfrak{R}_v'$.

8. Vettore dell'omografia di Riemann.

Il vettore $\mathrm{v}\mathfrak{R}$ dell'omografia di RIEMANN è un'omografia ordinaria (Cap. I, n. 9), che indicheremo con ψ, cioè porremo:

$$\psi = \mathrm{v}\mathfrak{R}; \tag{27}$$

è chiaro che la ψ trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori pure tangenti alla V_n in Q.

Dalla (44') del Cap. I risulta, con riferimento al solito sistema unitario-ortogonale, tangente alla V_n in Q (n. 4)

$$\psi a = \Sigma \mathfrak{R} a i_s i_s, \tag{28}$$

ove a è un vettore tangente alla V_n in Q.

L'omografia ψ è stata ricavata dalla Q per *contrazione*, o, come anche si suol dire, per *saturazione degli indici*. Ora, esaminando il secondo membro della (28), si scorge che anche le espressioni

$$\Sigma \mathfrak{R} i_s a i_s, \quad \Sigma \mathfrak{R} i_s i_s a,$$

che sono le uniche che si possano dedurre dalla (28) permutando i vettori a, i_s, corrispondono ad altre saturazioni di indici, ma esse non danno nulla di nuovo, perchè la prima di esse vale $-\psi a$, in virtù della (21), mentre la seconda è identicamente nulla, sempre in virtù della (21).

Stabiliamo ora l'importante

TEOREMA. - *L'omografia* ψ *è una dilatazione, cioè* $\mathrm{K}\psi = \psi$.

Infatti, se b è un altro vettore tangente alla V_n in Q, si ha dalla (28), ricordando la (24):

$$\psi a \times b = \Sigma \mathfrak{R} a i_s i_s \times b = \Sigma \mathfrak{R} i_s b a \times i_s,$$

ora l'ultimo membro, in virtù delle (21) e (22), si trasforma in $-\Sigma \mathfrak{R} b i_s a \times i_s$ e poi in $\Sigma \mathfrak{R} b i_s i_s \times a$, e siccome quest'ultima espressione vale $\psi b \times a$, ne viene $\psi a \times b = \psi b \times a$, il che prova (Cap. I, n. 6) che la ψ è una dilatazione.

9. Gradiente del vettore dell'omografia di Riemann.

Indichiamo con μ un'omografia ordinaria, funzione del punto Q mobile sulla V_n, che trasformi vettori tangenti alla V_n in Q in vettori pure tangenti alla V_n in Q.

Consideriamo il differenziale superficiale $d_v\mu$ e poniamo $d_v\mu = \mu_v' dQ$, ove μ_v' è una determinata omografia di 2° ordine, funzione di Q (ma non di dQ), che si può chiamare derivata superficiale di μ. Chiameremo allora *gradiente di* μ *sulla varietà* V_n, o, brevemente, *gradiente superficiale di* μ, e lo indicheremo con $\mathrm{grad}_v\, \mu$ il vettore definito dalla relazione:

$$\mathrm{grad}_v\, \mu = \mathrm{v} \frac{d_v \mu}{dQ} = \mathrm{v} \mu_v'. \tag{29}$$

Riferendoci al solito sistema unitario-ortogonale, tangente alla V_n in Q, si deduce dalla seconda delle (44') del Cap. I:

$$\mathrm{grad}_v \mu = \Sigma \mu_v' \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s, \tag{30}$$

da cui risulta che il vettore $\mathrm{grad}_v\, \mu$ è tangente alla V_n in Q.

In particolare, il gradiente superficiale dell'omografia ψ, data dalla (27), risulterà espresso da:

$$\mathrm{grad}_v\, \psi = \mathrm{v}\psi_v'. \tag{31}$$

Ora sussiste il seguente importante

Teorema. - *Il gradiente superficiale dell'omografia ψ vale la metà del gradiente superficiale del suo invariante primo, cioè*

$$\mathrm{grad}_v\, \psi = \frac{1}{2}\, \mathrm{grad}_v\, \mathrm{I}_1\, \psi. \tag{32}$$

Infatti, osserviamo intanto che dalla (27) e dalla terza delle (13) si ha:

$$\psi_v' dQ = d_v \psi = d_v \mathrm{v}\mathfrak{R} = \mathrm{v} d_v \mathfrak{R} = \mathrm{v}(\mathfrak{R}_v' dQ);$$

ricordando poi la (43) del Cap. I, si trae che l'ultimo membro vale $(\mathrm{v}\mathfrak{R}_v')dQ$, perciò $\psi_v' = \mathrm{v}\mathfrak{R}_v'$, e dalla (31) e dalla (44'') del Cap. I si conclude quindi che

$$\mathrm{grad}_v\, \psi = \mathrm{v}(\mathrm{v}\mathfrak{R}_v') = \Sigma_r \Sigma_s \mathfrak{R}_v' \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_s. \tag{33}$$

Per calcolare l'ultimo membro è necessario ricorrere all'identità di Bianchi (26'), ove figura la $\mathfrak{R}_v'$; da essa risulta:

$$\mathfrak{R}_v' \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s dQ + \mathfrak{R}_v' \boldsymbol{i}_s dQ \boldsymbol{i}_r + d_v \mathfrak{R} \cdot \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s = 0,$$

da cui, applicando ad $\boldsymbol{i}_r$, e poi moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{i}_s$:

$$\mathfrak{R}_v' \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s dQ \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s + \mathfrak{R}_v' \boldsymbol{i}_s dQ \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s + d_v \mathfrak{R} \cdot \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = 0.$$

Ora, dalla osservazione finale del n. 4 si deduce che le (21), (22), (24) sussistono pure se al posto di $\mathfrak{R}$ si pone un suo differenziale superficiale qualsiasi $\delta_v\mathfrak{R}$, cioè $\mathfrak{R}_v'\delta Q$, od anche $\mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}$ (ove $\boldsymbol{i}$ è un vettore tangente alla V_n in Q), e allora trasformando gli ultimi due termini mediante la (21) si ha:

$$\mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_s dQ\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s - \mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r dQ\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s - d_v\mathfrak{R}\cdot\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = 0,$$

od ancora, applicando la (22):

$$\mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_s dQ\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s + \mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r dQ\boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_r - d_v\mathfrak{R}\cdot\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = 0;$$

qui trasformiamo i primi due termini mediante la (24) ed avremo:

$$\mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_s \times dQ + \mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r \times dQ - d_v\mathfrak{R}\cdot\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = 0.$$

Prendendo ora la $\Sigma_r\Sigma_s$ i primi due termini risultano eguali, e dalla (33) si ha:

$$(a) \qquad 2\,\mathrm{grad}_v\,\psi \times dQ - \Sigma_r\Sigma_s d_v\mathfrak{R}\cdot\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = 0;$$

ma in virtù della seconda delle (44′) e della (10) del Cap. I e delle (12), (13) la doppia sommatoria che qui figura si trasforma successivamente in

$$\Sigma_s(\mathrm{v}d_v\mathfrak{R})\boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_s = \mathrm{I}_1(\mathrm{v}d_v\mathfrak{R}) = \mathrm{I}_1 d_v\mathrm{v}\mathfrak{R} = d_v\mathrm{I}_1\psi = (\mathrm{grad}_v\,\mathrm{I}_1\psi) \times dQ,$$

perciò sostituendo nella (a) si deduce, per l'arbitrarietà del vettore dQ, che deve essere $2\,\mathrm{grad}_v\,\psi - \mathrm{grad}_v\,\mathrm{I}_1\psi = 0$, da cui segue la (32).

Osservazione. - La (33) mostra che il vettore $\mathrm{grad}_v\,\psi$ risulta dall'omografia di 4° ordine $\mathfrak{R}_v'$ mediante una doppia contrazione; ora, si possono ancora fare due (e due sole) altre contrazioni, che sono quelle che conducono ai vettori $\Sigma_r\Sigma_s\mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_s$, $\Sigma_r\Sigma_s\mathfrak{R}_v'\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_r$; ma si vede subito che il primo di questi vettori vale $-\mathrm{grad}_v\,\psi$, e che il secondo è identicamente nullo.

10. Omografia di gravitazione.

La formula (32) mostra l'opportunità di introdurre l'omografia

$$(34) \qquad \theta = \psi - \mathrm{I}_1\psi/2,$$

la quale è una *dilatazione,* essendo tale la ψ (n. 8). La (32) porge allora:

$$\text{grad}_v\,\theta = 0. \tag{35}$$

Nella teoria della relatività einsteiniana la dilatazione θ, per il caso dello spazio-tempo a 4 dimensioni, si chiama *omografia di gravitazione*; la (35) esprime allora la proprietà, di importanza fondamentale nella teoria della relatività:

Il gradiente superficiale della omografia di gravitazione è nullo in tutto lo spazio curvo considerato.

11. Condizioni d'integrabilità.

Si può dare alla (20) una forma differente, come risulta dal seguente

TEOREMA I. - *Se a, b, u sono vettori tangenti alla* V_n *in Q, si ha:*

$$\mathfrak{R}abu = \frac{d_v^2 u}{dQ^2}\,ba - \frac{d_v^2 u}{dQ^2}\,ab. \tag{36}$$

Qui $d_v u/dQ$ indica la derivata superficiale di Q, che è un'omografia (ordinaria) che applicata al vettore dQ, dà per risultato il differenziale superficiale $d_v u$; analogo significato ha la derivata superficiale di secondo ordine $d_v^2 u/dQ^2$, che è un'omografia di secondo ordine.

Per stabilire la (36) applichiamo la (20) e osserviamo che

$$\delta_v d_v u = \delta_v\left(\frac{d_v u}{dQ}\,dQ\right) = \left(\delta_v\,\frac{d_v u}{dQ}\right)dQ + \frac{d_v u}{dQ}\,\delta_v d_v Q =$$

$$= \frac{d_v^2 u}{dQ^2}\,\delta Q dQ + \frac{d_v u}{dQ}\,\delta_v d_v Q\,;$$

se ora scambiamo δ con d, l'ultimo termine non muta, quindi sostituendo nella (20) risulta:

$$\mathfrak{R}dQ\delta Q u = \frac{d_v^2 u}{dQ^2}\,\delta Q dQ - \frac{d_v^2 u}{dQ^2}\,dQ\,\delta Q;$$

ora è chiaro che qui possiamo sostituire a dQ e δQ due vettori qualunque $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, tangenti alla V_n in Q, e così si ha senz'altro la (36).

La (36) può ancora scriversi:

$$\mathrm{k}\frac{d_v{}^2 u}{dQ^2}ab - \frac{d_v{}^2 u}{dQ^2}ab = \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R}uab,$$

o, più semplicemente:

$$\mathrm{k}\frac{d_v{}^2 u}{dQ^2} - \frac{d_v{}^2 u}{dQ^2} = \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R}u, \tag{37}$$

la quale formula costituisce una identità alla quale soddisfa sempre il vettore tangenziale $\boldsymbol{u}$.

Chiamando μ l'omografia definita nello spazio euclideo S_n, tangente alla V_n in Q, tale che per ogni dQ di S_n si abbia $\mu dQ = d_v u$, la (37) può scriversi

$$\mathrm{k}\frac{d_v\mu}{dQ} - \frac{d_v\mu}{dQ} = \mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathfrak{R}u, \tag{38}$$

ed essa esprime, in sostanza, la condizione d'integrabilità dell'espressione differenziale μdQ.

TEOREMA II. - *Se μ è un' omografia che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori pure tangenti alla V_n in Q, si ha:*

$$\delta_v d_v\mu - d_v\delta_v\mu = \mathfrak{R}dQ\delta Q\mu - \mu\mathfrak{R}dQ\delta Q, \tag{39}$$

$$\mathrm{k}^*\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} - \frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} = -\mathrm{K}(\mathrm{K}\mu\cdot\mathfrak{R}) - \mu\mathfrak{R}. \tag{40}$$

Infatti, ponendo μu al posto di u nella (20), risulta:

$$\delta_v d_v(\mu u) - d_v\delta_v(\mu u) = \mathfrak{R}dQ\delta Q u, \tag{a}$$

ma applicando la (10′) si trae:

$$\begin{aligned}\delta_v d_v(\mu u) &= \delta_v(d_v\mu\cdot u + \mu d_v u) = \\ &= \delta_v d_v\mu\cdot u + d_v\mu\cdot\delta_v u + \delta_v\mu\cdot d_v u + \mu\delta_v d_v u\end{aligned}$$

scambiando d con δ il secondo e terzo termine dell'ultimo membro si scambiano fra loro, quindi la (a) porge:

$$(\delta_v d_v \mu - d_v \delta_v \mu) u + \mu(\delta_v d_v u - d_v \delta_v u) = \mathfrak{R} dQ \delta Q u,$$

e ricordando la (20) ne segue la (39).

Osservando poi che $d_v \mu = \frac{d_v \mu}{dQ} dQ$, e analogamente per $\delta_v \mu$, la (39) può scriversi:

$$\frac{d_v{}^2 \mu}{dQ^2} \delta Q dQ - \frac{d_v{}^2 \mu}{dQ^2} dQ \delta Q = \mathfrak{R} dQ \delta Q \mu - \mu \mathfrak{R} dQ \delta Q,$$

od anche:

$$\left(\mathrm{k}^* \frac{d_v{}^2 \mu}{dQ^2} - \frac{d_v{}^2 \mu}{dQ^2}\right) dQ \delta Q = \mathrm{K}(\mathrm{K}\mu \cdot \mathrm{K}\mathfrak{R} dQ \delta Q) - \mu \mathfrak{R} dQ \delta Q,$$

e dalla proprietà assiale (22″) ne segue la (40).

Questa è un'identità alla quale soddisfa sempre l'omografia μ.

Ponendo: $\mu_2 dQ = d_v \mu$, ove μ_2 è un'omografia superficiale di secondo ordine, la (40) diviene:

$$(40') \qquad \mathrm{k}^* \frac{d_v \mu_2}{dQ} - \frac{d_v \mu_2}{dQ} = - \mathrm{K}(\mathrm{K}\mu \cdot \mathfrak{R}) - \mu \mathfrak{R},$$

la quale esprime la condizione d'integrabilità per l'espressione differenziale $\mu_2 dQ$.

12. Divergenza superficiale.

Sia, come sempre, u un vettore tangente alla V_n in Q. Chiameremo ***divergenza di u sulla varietà*** V_n, o, brevemente, ***divergenza superficiale di u***, e lo indicheremo con $\mathrm{div}_v\, u$, il numero reale definito dalla relazione:

$$(41) \qquad \mathrm{div}_v\, u = \mathrm{I}_1 \frac{d_v \mu}{dP},$$

che è del tutto analoga a quella che definisce la divergenza di un vettore nello spazio euclideo.

In modo simile si può definire, con formula analoga alla (53) del Cap. I, la divergenza superficiale di un'omografia d'ordine qualunque.

Se poi μ è un'omografia ordinaria, che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori pure tangenti alla V_n in Q, è facile stabilire l'importante formula:

$$(42)\qquad \operatorname{div}_v \operatorname{grad}_v \mu = \operatorname{div}_v \operatorname{grad}_v K\mu.$$

Infatti, procedendo come a pag. 158, si ha dalle (29), (41), (13):

$$(b)\quad \operatorname{div}_v \operatorname{grad}_v \mu = \operatorname{div}_v\left(v\,\frac{d_v\mu}{dQ}\right) = I_1\frac{d_v}{dQ}\left(v\,\frac{d_v\mu}{dQ}\right) = I_1 v\,\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2};$$

ma, in virtù della (40), si può scrivere:

$$I_1 v\,\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} = I_1 v k^*\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} + I_1 vK(K\mu\cdot\mathfrak{R}) + I_1 v(\mu\mathfrak{R}),$$

od ancora, per la (44''') del Cap. I:

$$I_1 v\,\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} = I_1 vK\,\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} + I_1 v k^*(K\mu\cdot\mathfrak{R}) + I_1 v(\mu\mathfrak{R});$$

siccome poi, da una formula di pag. 153 e dalla (21'') si trae:

$$k^*(K\mu\cdot\mathfrak{R}) = K\mu\cdot k^*\mathfrak{R} = -\,K\mu\cdot\mathfrak{R},$$

ne segue:

$$(c)\qquad I_1 v\,\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} = I_1 vK\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} - I_1 v[(K\mu - \mu)\mathfrak{R}];$$

d'altra parte, da una formula di pag. 154 e dalla (27) si ha:

$$I_1 v[(K\mu - \mu)\mathfrak{R}] = I_1[(K\mu - \mu)v\mathfrak{R}] = I_1[(K\mu - \mu)\psi],$$

e siccome l'omografia $K\mu - \mu$ è assiale, mentre la ψ è dilatazione, l'ultimo membro è nullo (pag. 147), quindi la (c) porge:

$$I_1 v\,\frac{d_v{}^2\mu}{dQ^2} = I_1 v\,\frac{d_v{}^2 K\mu}{dQ^2},$$

che, per la (b), equivale alla (42).

Ne segue ovviamente che se l'omografia μ è assiale si ha, come a pag. 158, $\operatorname{div}_v \operatorname{grad}_v \mu = 0$.

CAPITOLO IV.

Curvatura di Riemann.

1. Curvatura di una superficie ordinaria.

Sia V_2 una superficie immersa nello spazio ordinario E_3 (euclideo); come già sappiamo (Parte I, Cap. II) si può definire per tale superficie un elemento di importanza fondamentale, che è la *curvatura totale o di* GAUSS; essa può esprimersi colla formula seguente

$$\mathcal{K} = \frac{d\boldsymbol{N} \wedge \delta \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}}{dQ \wedge \delta Q \times \boldsymbol{N}}, \tag{1}$$

ove $\boldsymbol{N}$ è il vettore unitario normale alla V_2 in Q, e dQ, δQ sono spostamenti infinitesimi arbitrari del punto Q sulla superficie V_2 e $d\boldsymbol{N}$, $\delta \boldsymbol{N}$ sono i corrispondenti incrementi del vettore $\boldsymbol{N}$.

Poichè $\boldsymbol{N}^2 = 1$, si ha $\boldsymbol{N} \times d\boldsymbol{N} = 0$, perciò il vettore $d\boldsymbol{N}$ è normale ad $\boldsymbol{N}$, quindi è tangente alla V_2 in Q.

Si può porre evidentemente $m\boldsymbol{N} = dQ \wedge \delta Q$, ove m è un opportuno numero reale, e allora la (1) porge:

$$\mathcal{K} = \frac{d\boldsymbol{N} \wedge \delta \boldsymbol{N} \times (dQ \wedge \delta Q)}{(dQ \wedge \delta Q)^2},$$

ovvero, sviluppando:

$$\mathcal{K} = \frac{d\boldsymbol{N} \times dQ \cdot \delta \boldsymbol{N} \times \delta Q - d\boldsymbol{N} \times \delta Q \cdot \delta \boldsymbol{N} \times dQ}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2}; \tag{2}$$

questa formula equivale a quella che, colle notazioni ordinarie, si scrive sotto la forma

$$\mathcal{K} = (\mathrm{DD''} - \mathrm{D'^2})/(\mathrm{EG} - \mathrm{F^2}). \tag{2'}$$

che si ottiene con calcoli più complicati.

Trasformiamo il numeratore della (2), che indicheremo con A, in guisa da farvi figurare solo differenziali superficiali del punto Q. Osservando che

$$(3) \qquad N \times dQ = 0,$$

differenziando si ha:

$$dN \times dQ = -N \times d^2Q, \quad \delta N \times dQ = -N \times \delta dQ,$$

quindi:

$$A = -N \times d^2Q \cdot \delta N \times \delta Q + N \times d\delta Q \cdot dN \times \delta Q,$$

od ancora, osservando che $N \times \delta Q = 0$:

$$A = -\delta(N \times d^2Q \cdot N) \times \delta Q + d(N \times d\delta Q \cdot N) \times \delta Q;$$

ma si ha ovviamente:

$$N \times d^2Q \cdot N = d^2Q - d_v{}^2Q, \quad N \times d\delta Q \cdot N = d\delta Q - d_v\delta Q,$$

perciò:

$$A = -\delta(d^2Q - d^2{}_vQ) \times \delta Q + d(d\delta Q - d_v\delta Q) \times \delta Q,$$

cioè, sviluppando:

$$A = -\delta d^2Q \times \delta Q + \delta d^2{}_vQ \times \delta Q + d^2\delta Q \times \delta Q - dd_v\delta Q \times \delta Q =$$
$$= \delta d^2{}_vQ \times \delta Q - dd_v\delta Q \times \delta Q;$$

e siccome $\delta d^2{}_vQ$ differisce da $\delta_v d^2{}_vQ$ per un vettore parallelo ad N, e analogamente per $dd_v\delta Q$, si deduce:

$$A = (\delta_v d^2{}_vQ - d^2{}_v\delta Q) \times \delta Q,$$

quindi dalla (2) risulta la notevole formula:

$$(4) \qquad \mathcal{K} = \frac{(\delta_v d^2{}_vQ - d^2{}_v\delta Q) \times \delta Q}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2},$$

nella quale figurano solo differenziali superficiali.

Ricordando poi la (20) del Cap. III la (4) porge senz'altro:

$$(5) \qquad \mathcal{K} = \frac{\mathcal{R}dQ\delta QdQ \times \delta Q}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2};$$

indicando con α l'angolo compreso fra i vettori dQ e δQ, e con ds, δs i moduli di questi vettori, la (5) può pure scriversi:

$$\mathcal{K} = \mathfrak{R}\frac{dQ}{ds}\frac{\delta Q}{\delta s}\frac{dQ}{ds}\times\frac{\delta Q}{\delta s} / \operatorname{sen}^2\alpha. \tag{6}$$

2. Curvatura riemanniana di una V_n.

Consideriamo ora una varietà qualunque V_n ad n dimensioni, immersa in uno spazio euclideo E_N ad N dimensioni. Preso un punto qualunque Q della V_n, due spostamenti infinitesimi dQ, δQ del punto Q, sulla V_n, determinano una *giacitura*; orbene chiameremo ***curvatura riemanniana*** della V_n in Q, secondo la giacitura dQ, δQ, il numero definito dalla (4) o dalla equivalente (5).

Se a, b sono vettori paralleli a dQ e δQ, e quindi tangenti alla V_n in Q, la (5) può scriversi:

$$\mathcal{K} = \frac{\mathfrak{R}aba\times b}{a^2b^2-(a\times b)^2}; \tag{7}$$

sarebbe facile verificare che il valore di $\mathcal{K}$ dato dalla (7) rimane invariato se ai vettori a, b si sostituiscono altri due vettori complanari con essi, perciò la curvatura $\mathcal{K}$ è funzione solo di Q e della giacitura considerata.

È facile trasformare il denominatore della (7) e dargli una forma analoga a quella del numeratore. Per questo osserviamo che si ha intanto:

$$\begin{aligned} a^2\cdot b^2-(a\times b)^2 &= (a^2\cdot b - a\times b\cdot a)\times b = \\ &= [\mathrm{H}(a,b)-\mathrm{H}(b,a)]a\times b; \end{aligned} \tag{a}$$

ora l'omografia $\mathrm{H}(a, b) - \mathrm{H}(b, a)$ è evidentemente funzione lineare del vettore a, come pure del vettore b, perciò esiste un'omografia di 3° ordine ξ_3 indipendente da a e b e tale che, qualunque siano i vettori a, b si abbia (*Espaces*, pag. 48):

$$\xi_3 ab = \mathrm{H}(a,b) - \mathrm{H}(b,a), \tag{8}$$

e allora risulterà dalla (a):

$$a^2b^2 - (a\times b)^2 = \xi_3 aba\times b,$$

quindi, dalla (7):

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{R}aba \times b}{\xi_3 aba \times b}, \tag{9}$$

ove il denominatore ha la stessa forma del numeratore.

Si verifica subito, mediante la (8), che per l'omografia ξ_3 valgono le proprietà espresse dalle (21) .... (24) del Cap. III per l'omografia di RIEMANN $\mathcal{R}$.

Se, in particolare, la V_n è un'ipersuperficie di uno spazio euclideo S_{n+1}, in ogni punto di essa esiste un vettore unitario normale N ben determinato, e l'espressione della curvatura riemanniana si può porre sotto la forma (2), perchè dalla (4), rifacendo i calcoli a ritroso, si perviene alla (2).

Se, ad es., l'ipersuperficie V_n è un'*ipersfera* di centro O e raggio r, di S_{n+1}, si ha

$$(Q - O)^2 = r^2, \quad Q = O + rN, \quad dN = dQ/r,$$

e la (2) porge senz'altro: $\mathcal{K} = 1/r^2$, risultato prevedibile *a priori*.

3. Varietà isotrope.

Studiamo quelle varietà V_n per le quali la curvatura riemanniana *non dipende dalla giacitura*, e quindi è funzione tutt'al più della posizione del punto Q; tali varietà saranno chiamate *isotrope*. Per esse sussiste l'importante

TEOREMA. - *Affinchè la varietà* V_n *sia isotropa è necessario e sufficiente che la corrispondente omografia di* RIEMANN *risulti espressa da*:

$$\mathcal{R} = c\xi_3, \tag{10}$$

ove c *è una funzione numerica del punto* Q.

Infatti, supposto in primo luogo che sussista la (10), la formula (9) porge senz'altro $\mathcal{K} = c$, perciò la curvatura riemanniana vale c, onde è indipendente dalla giacitura.

Mostriamo ora che la (10) fornisce la più generale espressione dell'omografia di RIEMANN, per la quale la curvatura riemanniana vale c.

Poniamo infatti

$$(11) \qquad \mathfrak{R} = c\xi_3 + \mu_3,$$

ove μ_3 è un'omografia di 3° ordine da determinare; faremo vedere che dovrà essere $\mu_3 = 0$. Per questo, ricorriamo alla (9), la quale, essendo $\mathfrak{K} = c$, porge:

$$(\mathfrak{R} - c\xi_3)\boldsymbol{aba} \times \boldsymbol{b} = 0,$$

cioè, per la (11):

$$(12) \qquad \mu_3\boldsymbol{aba} \times \boldsymbol{b} = 0,$$

qualunque siano i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ tangenti alla V_n in Q.

Osserviamo ora che per l'omografia μ_3 valgono le proprietà espresse dalle (21)....(24) del Cap. III; inoltre se $\boldsymbol{c}$ è un vettore tangente alla V_n in Q, la (12) sussiste se al posto di $\boldsymbol{b}$ si pone $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, perciò:

$$\mu_3\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = 0,$$

sviluppando e tenendo conto della (12) risulta

$$\mu_3\boldsymbol{aca} \times \boldsymbol{b} + \mu_3\boldsymbol{aba} \times \boldsymbol{c} = 0,$$

ma per la proprietà commutativa a cui soddisfa la μ_3 [form. (24) del Cap. III] si ha $\mu_3\boldsymbol{aba} \times \boldsymbol{c} = \mu_3\boldsymbol{aca} \times \boldsymbol{b}$, quindi la precedente ci dà $\mu_3\boldsymbol{aca} \times \boldsymbol{b} = 0$, e per l'arbitrarietà del vettore $\boldsymbol{b}$ segue $\mu_3\boldsymbol{aca} = 0$.

Poichè si ha [form. (21″) del Cap. III]:

$$(a) \qquad \mathrm{k}^*\mu_3 = -\mu_3,$$

la relazione trovata $\mu_3\boldsymbol{aca} = 0$ può scriversi: $\mu_3\boldsymbol{caa} = 0$, e ponendo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ al posto di $\boldsymbol{a}$ e sviluppando risulta: $\mu_3\boldsymbol{cab} + \mu_3\boldsymbol{cba} = 0$, cioè $\mathrm{k}\mu_3\boldsymbol{cba} = -\mu_3\boldsymbol{cba}$, e per l'arbitrarietà dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, si conclude:

$$(b) \qquad \mathrm{k}\mu_3 = -\mu_3.$$

D'altra parte la proprietà ciclica della μ_3 [form. (23) del Cap. III] ci dà:

$$\mu_3\boldsymbol{abc} + \mu_3\boldsymbol{bca} + \mu_3\boldsymbol{cab} = 0,$$

ora, dalle (a), (b) risulta che i tre termini del primo membro sono eguali, quindi $\mu_3 abc = 0$, da cui $\mu_3 = 0$; c. d. d.

Concludiamo perciò che se una V_n ha la curvatura riemanniana c indipendente dalla giacitura, ma funzione solo della posizione di Q, la corrispondente omografia di Riemann ha il valore dato dalla (10).

La funzione c che figura nella (10) non può però essere assegnata ad arbitrio; anzi ora dimostreremo che se $n > 2$, la c deve essere necessariamente costante.

Se la varietà V_n è euclidea, si ha $\mathfrak{R} = 0$, quindi la (9) mostra che $\mathfrak{K} = 0$; viceversa, se $\mathfrak{K} = 0$ in ogni punto di V_n, la (10) mostra che sarà pure $\mathfrak{R} = 0$, e la varietà è euclidea.

4. Teorema di Schur.

Si dice che la varietà V_n ha *la curvatura riemanniana costante* c, se, qualunque sia il punto Q della V_n, e qualunque siano gli spostamenti non paralleli dQ e δQ, tangenti alla V_n in Q, la curvatura riemanniana di V_n in Q, secondo la giacitura determinata dai vettori dQ e δQ ha il valor costante c.

Circa le varietà a curvatura riemanniana costante si ha il seguente notevole

Teorema di Schur. - *Se la curvatura riemanniana della V_n in un punto qualunque Q è indipendente dalla giacitura determinata da dQ e δQ, allora tale curvatura è indipendente anche da Q, cioè è costante.*

In altri termini, se sussiste la (10), *la c deve essere necessariamente costante.*

Si deve supporre, evidentemente, $n > 2$, perchè per $n = 2$, cioè per una superficie ordinaria, non vi è nel punto Q, che una sola giacitura tangente alla superficie.

Siano allora dQ, δQ, $d'Q$ tre differenziali, non complanari, del punto Q (che saranno perciò tangenti alla V_n in Q); essi certamente esistono, perchè $n > 2$. Differenziando poi la (10) e osservando che $d\xi_3 = 0$, avremo: $d\mathfrak{R} = dc \cdot \xi_3$, perciò:

$$d\mathfrak{R} \cdot \delta Q d'Q = dc \cdot \xi_3 \delta Q d'Q;$$

permutando circolarmente i differenziali d, δ, d' e sommando avremo, tenendo conto dell'identità di Bianchi (Cap. III, n. 7):

$$dc \cdot \xi_3 \delta Q d'Q + \delta c \cdot \xi_3 d'Q dQ + d'c \cdot \xi_3 dQ \delta Q = 0,$$

da cui:

$$dc \cdot \xi_3 \delta Q d'Q d'Q + \delta c \cdot \xi_3 d'Q dQ d'Q + d'c \cdot \xi_3 dQ \delta Q d'Q = 0.$$

Supponiamo che il vettore $d'Q$ sia normale tanto a dQ che a δQ; allora la relazione precedente, tenuto conto della (8), si riduce senz'altro alla:

$$- dc \cdot (d'Q)^2 \delta Q + \delta c \cdot (d'Q)^2 dQ = 0,$$

e poichè i vettori dQ, δQ non sono paralleli, deve essere $dc = \delta c = 0$, cioè c deve essere costante; c. d. d.

Un'altra dimostrazione del teorema di Schur trovasi in *Espaces*, pag. 170.

5. Relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi corrispondenti.

Siano V_n e V_n' due varietà ad n dimensioni e supponiamo stabilita tra queste due varietà una corrispondenza tale che ad ogni punto Q della V_n corrisponda un punto determinato Q' della V_n'; potremo allora riguardare Q' come una determinata funzione di Q.

Si tratta allora di trovare la relazione che esiste fra l'omografia di Riemann $\mathfrak{R}$ relativa alla V_n e l'omografia di Riemann $\mathfrak{R}'$ relativa alla V_n'.

Indicheremo, al solito, con dQ, δQ, $d'Q$ tre spostamenti infinitesimi di Q sulla V_n, e con dQ', $\delta Q'$, $d'Q'$ i tre spostamenti corrispondenti di Q' sulla V_n'.

Si ha allora intanto:

$$dQ' = \frac{dQ'}{dQ} dQ, \tag{13}$$

perciò indicando con σ l'omografia

$$\sigma = dQ' / dQ, \tag{14}$$

la quale trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori tangenti alla V_n' in Q', avremo:

$$dQ' = \sigma dQ. \tag{13'}$$

L'omografia σ, che è funzione di Q, non può essere arbitraria, perchè deve essere tale che il secondo membro della (13') sia un differenziale esatto; per trovare la condizione a cui deve soddisfare la σ occorre definire prima il *differenziale superficiale* di σ, osservando che non si può senz'altro applicare la (10) del Cap. III, perchè ora la σ trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori tangenti alla V_n' in Q' (e quindi non più tangenti alla V_n in Q). Definiremo perciò il differenziale superficiale di σ, che indicheremo con $d_v\sigma$, come quell'omografia tale che, qualunque sia il vettore u, tangente alla V_n in Q, si abbia, analogamente alla citata (10) del Cap. III:

$$(d_v\sigma)u = d_{v'}(\sigma u) - \sigma d_v u, \tag{15}$$

ove $d_{v'}(\sigma u)$ indica, naturalmente, il differenziale superficiale (relativo alla varietà V_n') del vettore σu, che è tangente alla V_n' in Q.

È facile provare, come nel n. 3 del Cap. III, che l'operatore $d_v\sigma$ definito dalla (15) è effettivamente un'omografia che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori tangenti alla V_n' in Q'.

Dalla (15) si deduce:

$$d_{v'}(\sigma u) = (d_v\sigma)u + \sigma d_v u. \tag{15'}$$

Ciò premesso, analogamente alla (13'), avremo:

$$\delta Q' = \sigma\delta Q; \tag{13''}$$

operando ora con $\delta_{v'}$ sulla (13') e con $d_{v'}$ sulla (13'') si ha, ricordando la (15'):

$$(a) \quad \delta_{v'} dQ' = (\delta_v\sigma)dQ + \sigma\delta_v dQ, \quad d_{v'}\delta Q' = (d_v\sigma)\delta Q + \sigma d_v\delta Q,$$

sottraendo e tenendo conto della (4) del Cap. III, si conclude:

(16) $$\delta_v \sigma \cdot dQ = d_v \sigma \cdot \delta Q,$$

che è la relazione a cui deve soddisfare l'omografia σ affinchè sussista la (13').

Vogliamo ora stabilire l'importante

TEOREMA. - *Fra le omografie di Riemann relative alle varietà* V_n, V_n' *sussiste la relazione:*

(17) $$\mathfrak{R}' dQ' \delta Q' d'Q' = (\delta_v d_v \sigma - d_v \delta_v \sigma) d'Q + \sigma \mathfrak{R} dQ \delta Q d'Q.$$

Infatti, se $d'Q$ è un altro spostamento di Q sulla V_n e $d'Q'$ è il suo corrispondente sulla V_n', si ha dalla (a):

$$d_{v'} d'Q' = d_v \sigma \cdot d'Q + \sigma d_v d'Q,$$

da cui, operando con $\delta_{v'}$ e applicando la (15'):

$$\delta_{v'} d_{v'} d'Q' = \delta_v d_v \sigma \cdot d'Q + d_v \sigma \cdot \delta_v d'Q + \delta_v \sigma \cdot d_v d'Q + \sigma \delta_v d_v d'Q;$$

scambiando qui δ con d, il secondo e terzo termine del 2° membro si scambiano fra loro, quindi sottraendo e ricordando la (20') del Cap. III risulta senz'altro la (17).

6. Spazi in rappresentazione conforme.

Supponiamo stabilita fra le varietà V_n, V_n' una corrispondenza tale che ad ogni punto della V_n corrisponda un punto determinato della V_n', in guisa che l'angolo di due vettori tangenti alla V_n in Q risulti eguale all'angolo compreso fra i due vettori corrispondenti della V_n'.

Si dice allora che la corrispondenza, o rappresentazione, della varietà V_n sulla varietà V_n' è conforme.

Si vede facilmente che se dQ e dQ' sono due spostamenti corrispondenti in V_n e V_n' affinchè la rappresentazione di V_n sulla V_n' sia conforme è necessario e sufficiente che si abbia:

(18) $$dQ' = U \lambda dQ,$$

ove U è una funzione numerica di Q e λ è una *isomeria* vettoriale, pure funzione di Q, che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori tangenti alla V_n' in Q'.

In questo caso l'omografia σ considerata nel n. precedente vale $U\lambda$, e la condizione d'integrabilità (16) diventa:

$$\delta U \cdot \lambda dQ + U \delta_v \lambda \cdot dQ = dU \cdot \lambda \delta Q + U d_v \lambda \cdot \delta Q;$$

operando a sinistra con $K\lambda / U$ e ricordando che, essendo λ isomeria, si ha (n. 7, Cap. I):

$$K\lambda \cdot \lambda = \lambda K \lambda = 1 \tag{19}$$

ne segue facilmente:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_v \log U \times \delta Q \cdot dQ + K\lambda \cdot \delta_v \lambda \cdot dQ = \\ = \operatorname{grad}_v \log U \times dQ \cdot \delta Q + K\lambda \cdot d_v \lambda \cdot \delta Q, \end{aligned} \tag{20}$$

che è la condizione che lega le funzioni U e λ affinchè possa sussistere la (18).

7. Trasformazione della condizione d'integrabilità.

La (20) costituisce, come abbiamo detto, la condizione d'integrabilità della (18); ora si può trasformare la (20) in modo da ricavarne un'espressione molto semplice e notevole per $d_v \lambda$.

Essa è fornita dal seguente

TEOREMA. - *Il differenziale superficiale dell'isomeria λ è dato da:*

$$d_v \lambda = \lambda \xi_3 \operatorname{grad}_v \log U \cdot dQ, \tag{21}$$

ove ξ_3 è l'omografia di 3° ordine definita dalla (8).

Infatti, ponendo, per brevità,

$$u = \operatorname{grad}_v \log U, \tag{22}$$

e aggiungendo $dQ \times \delta Q \cdot u$ ai due membri della (20), si ha:

$$\begin{aligned} K\lambda \cdot d_v \lambda \cdot \delta Q - u \times \delta Q \cdot dQ + dQ \times \delta Q \cdot u = \\ = K\lambda \cdot \delta_v \lambda \cdot dQ - u \times dQ \cdot \delta Q + dQ \times \delta Q \cdot u, \end{aligned}$$

cioè:

$$(a)\quad \mathrm{K}\lambda \frac{d_v\lambda}{dQ} dQ\delta Q - \xi_3 u dQ\delta Q = \mathrm{K}\lambda \frac{d_v\lambda}{dQ} \delta Q dQ - \xi_3 u \delta Q dQ.$$

Ponendo:

$$(b)\qquad \mathrm{K}\lambda \frac{d_v\lambda}{dQ} dQ\delta Q - \xi_3 u dQ\delta Q = \mu_2 dQ\delta Q,$$

la μ_2 è un'omografia di 2° ordine, ben determinata, indipendente da dQ e δQ, e la (a) mostra che $\mu_2 dQ\delta Q = \mu_2 \delta Q dQ$; perciò, se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori tangenti alla V_n in Q, si può scrivere:

$$(c)\qquad \mu_2 \boldsymbol{ab} = \mu_2 \boldsymbol{ba}, \quad \text{od anche} \quad \mathrm{k}\mu_2 = \mu_2.$$

Dalla (b) si ha poi:

$$\mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda - \xi_3 u dQ = \mu_2 dQ,$$

ma differenziando la (19) risulta:

$$\mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda + \mathrm{K} d_v\lambda \cdot \lambda = 0, \quad \text{cioè} \quad \mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda + \mathrm{K}(\mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda) = 0,$$

la quale mostra che l'omografia $\mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda$ è assiale, e siccome anche l'omografia $\xi_3 u dQ$ è assiale, ne segue che l'omografia $\mu_2 dQ$, e quindi $\mu_2 \boldsymbol{a}$, è *assiale*, perciò:

$$\mu_2 \boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{b} = 0, \quad \text{da cui} \quad \mu_2 \boldsymbol{ba} \times \boldsymbol{b} = 0, \quad \boldsymbol{a} \times \mu_2 \boldsymbol{bb} = 0,$$

e siccome il vettore $\boldsymbol{a}$ è arbitrario, si conclude:

$$(d)\qquad \mu_2 \boldsymbol{bb} = 0.$$

Ne segue ovviamente: $\mu_2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 0$; sviluppando e tenendo conto delle (c), (d) rimane $\mu_2 \boldsymbol{ab} = 0$, da cui si ha senz'altro $\mu_2 = 0$, dopo di che la (b) porge:

$$\mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda = \xi_3 u dQ,$$

da cui, operando a sinistra con λ, si ottiene la (21).

8. Applicabilità di due spazi curvi.

Supponiamo che la corrispondenza fra le varietà V_n e V_n' sia tale che gli elementi d'arco corrispondenti (e quindi anche gli angoli) di tali varietà siano eguali; allora si dice che le varietà V_n e V_n' sono fra loro *applicabili*.

Dovrà dunque essere, qualunque sia Q:

$$dQ'^2 = dQ^2, \tag{23}$$

perciò si può porre (Cap. I, n. 7)

$$dQ' = \lambda dQ, \tag{23'}$$

ove λ è una isomeria, funzione di Q. Questa relazione rientra nella (18) per $U = 1$, perciò l'isomeria λ deve soddisfare alla condizione che si ricava dalla (21) per $U = 1$, e allora si ha $d_v \lambda = 0$, perciò vediamo che *il differenziale superficiale dell'isomeria λ deve essere nullo.*

Di qui è facile dedurre il notevole

Teorema. - *Le curvature riemanniane delle varietà V_n, V_n' in ogni coppia di punti corrispondenti e secondo giaciture corrispondenti sono sempre fra loro eguali.*

Infatti, dalla (17), ove la σ ora non è altro che l'isomeria λ, si trae, per la proprietà testè stabilita:

$$\mathfrak{R}' dQ' \delta Q' d'Q' = \lambda \mathfrak{R} dQ \delta Q d'Q,$$

da cui, in virtù della (19):

$$K\lambda \cdot \mathfrak{R}' dQ' \delta Q' d'Q' \times \delta' Q = \mathfrak{R} dQ \delta Q d'Q \times \delta' Q,$$

ossia, applicando il teorema di commutazione e la (23'):

$$\mathfrak{R}' dQ' \delta Q' d'Q' \times \delta' Q' = \mathfrak{R} dQ \delta Q d'Q \times \delta' Q.$$

Da questa formula, dalla ovvia relazione $dQ' \times \delta Q' = = dQ \times \delta Q$, e dalla (5) segue senz'altro $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$, conforme al teorema.

Un'altra dimostrazione trovasi in *Espaces*, pag. 168.

9. Relazione fra le omografie di Riemann per due spazi in rappresentazione conforme.

Vediamo come si trasforma la relazione (17) fra le omografie di Riemann nel caso di due varietà V_n, V_n' corrispondenti in una rappresentazione conforme.

Basterà calcolare il valore che assume l'espressione $\delta_v d_v \sigma - d_v \delta_v \sigma$. Intanto, poichè $\sigma = U\lambda$, si ha:

$$\delta_v d_v \sigma = \delta d U \cdot \lambda + d U \cdot \delta_v \lambda + \delta U \cdot d_v \lambda + U \delta_v d_v \lambda,$$

perciò:

$$\delta_v d_v \sigma - d_v \delta_v \sigma = U(\delta_v d_v \lambda - d_v \delta_v \lambda),$$

e allora la (17) porge:

$$(24)\quad \mathfrak{R}' dQ' \delta Q' d' Q' = U(\delta_v d_v \lambda - d_v \delta_v \lambda) d'Q + U\lambda \mathfrak{R} dQ \delta Q d'Q.$$

Calcoliamo ora, mediante la (21), il valore di $\delta_v d_v \lambda - d_v \delta_v \lambda$. Ponendo:

$$(24') \qquad U = 1/u, \quad v = \operatorname{grad}_v u, \quad \text{si ha} \quad u = -v/u,$$

perciò la (18) diviene $dQ' = (\lambda/u) dQ$, ove l'isomeria λ deve soddisfare alla condizione d'integrabilità (16), cioè:

$$(16') \qquad \left(\delta_v \frac{\lambda}{u}\right) dQ = \left(d_v \frac{\lambda}{u}\right) \delta Q;$$

la (21) si scrive poi:

$$(25) \qquad d_v \lambda = -\frac{\lambda}{u} \xi_3 v dQ,$$

da cui:

$$\delta_v d_v \lambda = -\left(\delta_v \frac{\lambda}{u}\right) \xi_3 v dQ - \frac{\lambda}{u} \xi_3 \delta_v v \cdot dQ - \frac{\lambda}{u} \xi_3 v \delta_v d_v Q,$$

quindi, se a è un vettore tangente alla V_n in Q, risulta:

$$(\delta_v d_v \lambda) a = -\left(\delta_v \frac{\lambda}{u}\right) (v \times a \cdot dQ - a \times dQ \cdot v) - \frac{\lambda}{u} \xi_3 \delta_v v \cdot dQ \cdot a -$$

$$- \frac{\lambda}{u} \xi_3 v \delta_v d_v Q \cdot a = - v \times a \left(\delta_v \frac{\lambda}{u}\right) dQ + a \times dQ \cdot \frac{\delta_v \lambda}{u} v -$$

$$- \frac{\delta u}{u^2} a \times dQ \cdot \lambda v - \frac{\lambda}{u} \xi_3 \delta_v v \cdot dQ \cdot a - \frac{\lambda}{u} \xi_3 v \delta_v d_v Q \cdot a,$$

od ancora, ricordando la (25):

$$(\delta_v d_v \lambda)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)d\boldsymbol{Q} - \frac{1}{u^2}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\lambda\xi_3\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v} -$$

$$-\frac{\delta u}{u^2}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\lambda\boldsymbol{v} - \frac{\lambda}{u}\xi_3\delta_v\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a} - \frac{\lambda}{u}\xi_3\boldsymbol{v}\delta_v d_v\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a} =$$

$$= -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)d\boldsymbol{Q} - \frac{1}{u^2}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\lambda(\boldsymbol{v}^2\cdot\delta\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}) -$$

$$-\frac{\delta u}{u^2}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\lambda\boldsymbol{v} - \frac{\lambda}{u}\xi_3\delta_v\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a} - \frac{\lambda}{u}\xi_3\boldsymbol{v}\delta_v d_v\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a};$$

ma $\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{Q} = \mathrm{grad}_v\, u\times\delta\boldsymbol{Q} = \delta u$, quindi, semplificando si ha:

$$(\delta_v d_v \lambda)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)d\boldsymbol{Q} - \frac{1}{u^2}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}^2\lambda\delta\boldsymbol{Q} -$$

$$-\frac{\lambda}{u}\xi_3\delta_v\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a} - \frac{\lambda}{u}\xi_3\boldsymbol{v}\delta_v d_v\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a}.$$

Scambiando qui δ con d, il primo termine del 2° membro non muta in virtù della condizione d'integrabilità (16'), e l'ultimo termine pure resta invariato, perciò si conclude:

$$(\delta_v d_v\lambda - d_v\delta_v\lambda)\boldsymbol{a} = -\frac{1}{u^2}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}^2\lambda\delta\boldsymbol{Q} + \frac{1}{u^2}\boldsymbol{a}\times\delta\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}^2\lambda d\boldsymbol{Q} -$$

$$-\frac{\lambda}{u}\xi_3\delta_v\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a} + \frac{\lambda}{u}\xi_3 d_v\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a},$$

ma i primi due termini del 2° membro possono scriversi così:

$$-\frac{1}{u^2}\boldsymbol{v}^2\lambda(\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{Q}\cdot\delta\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{a}\times\delta\boldsymbol{Q}\cdot d\boldsymbol{Q}),$$

cioè

$$-\frac{1}{u^2}\boldsymbol{v}^2\lambda\xi_3 d\boldsymbol{Q}\delta\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a},$$

perciò si ha:

$$\delta_v d_v\lambda - d_v\delta_v\lambda = -\frac{1}{u^2}\boldsymbol{v}^2\lambda\xi_3 d\boldsymbol{Q}\delta\boldsymbol{Q} - \frac{1}{u}\lambda\xi_3\delta_v\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{Q} + \frac{1}{u}\lambda\xi_3 d_v\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{Q},$$

ovvero, ricordando la (8):

$$\delta_v d_v \lambda - d_v \delta_v \lambda = (\lambda / u^2) \{ -v^2 [\mathrm{H}(dQ, \delta Q) - \mathrm{H}(\delta Q, dQ)] - \\ - u[\mathrm{H}(\delta_v v, dQ) - \mathrm{H}(dQ, \delta_v v) - \mathrm{H}(d_v v, \delta Q) + \mathrm{H}(\delta Q, d_v v)] \},$$

e sostituendo nella (24) si ottiene:

$$(26) \quad \mathfrak{R}' dQ' \delta Q' d'Q' = \\ = (\lambda / u^3) \{ -v^2 [\mathrm{H}(dQ, \delta Q) - \mathrm{H}(\delta Q, dQ)] - u[\mathrm{H}(\delta_v v, dQ) - \\ - \mathrm{H}(dQ, \delta_v v) - \mathrm{H}(d_v v, \delta Q) + \mathrm{H}(\delta Q, d_v v)] \} d'Q + (\lambda / u) \mathfrak{R} dQ \delta Q d'Q;$$

questa formula stabilisce la relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi corrispondenti nella rappresentazione conforme determinata dalla formula:

$$(27) \qquad dQ' = (\lambda dQ)/u,$$

che risulta dalla (18), perchè $U = 1/u$.

10. Rappresentazione conforme di una varietà a curvatura costante sopra una euclidea.

Supponiamo che S_n sia uno spazio *euclideo* ad n dimensioni, luogo di un punto Q, e che V_n' sia una varietà descritta dal punto Q'.

Si può allora dimostrare l'importante

Teorema. - *Se la varietà* V_n' *è a curvatura riemanniana costante è sempre possibile rappresentarla conformemente sulla varietà euclidea* S_n.

Basta far vedere che è possibile determinare una conveniente funzione u ed una isomeria λ, funzioni di Q, tali da soddisfare alla (27).

Per questo, osserviamo dapprima che, per spazi euclidei, si ha $\mathfrak{R} = 0$, e che avendo la V_n' una curvatura riemanniana costante $\mathcal{K}_0$, si ha dalla (10): $\mathfrak{R}' = \mathcal{K}_0 \xi_3$, e allora applicando la (26) si ha:

$$\mathcal{K}_0 (dQ' \times d'Q' \cdot \delta Q' - \delta Q' \times d'Q' \cdot dQ') = \\ = (\lambda / u^3) \{ -v^2 (dQ \times d'Q \cdot \delta Q - \delta Q \times d'Q \cdot dQ) - \\ - u(\delta v \times d'Q \cdot dQ - dQ \times d'Q \cdot \delta v - dv \times d'Q \cdot \delta Q + \delta Q \times d'Q \cdot dv) \},$$

ove abbiamo scritto dv, δv al posto di $d_v v$ e $\delta_v v$, perchè essendo S_n spazio euclideo il differenziale superficiale coincide col differenziale ordinario; ma dalla (27) si deduce

$$dQ' \times d'Q' = \lambda dQ \times \lambda d'Q / u^2 = dQ \times d'Q / u^2,$$

quindi sostituendo si ha:

$$\begin{aligned}(28)\quad & \mathcal{K}_0(dQ \times d'Q \cdot \delta Q - \delta Q \times d'Q \cdot dQ) = \\ & = -v^2(dQ \times d'Q \cdot \delta Q - \delta Q \times d'Q \cdot dQ) - \\ & - u(\delta v \times d'Q \cdot dQ - dQ \times d'Q \cdot \delta v - dv \times d'Q \cdot \delta Q + \delta Q \times d'Q \cdot dv).\end{aligned}$$

Poichè, a norma della (24′), $v = \operatorname{grad} u$, la precedente è un'equazione differenziale di 2° ordine rispetto ad u; per trovarne l'integrale generale osserviamo che, essendo il vettore $d'Q$ arbitrario, possiamo supporlo in primo luogo normale a dQ e a δQ, nel qual caso la (28) si riduce alla:

$$\delta v \times d'Q \cdot dQ - dv \times d'Q \cdot \delta Q = 0,$$

e siccome i vettori dQ e δQ non sono paralleli, ne segue:

$$(29)\qquad \delta v \times d'Q = 0;$$

supponiamo ora invece $d'Q = dQ$ e inoltre $d'Q \times \delta Q = 0$, e avremo dalla (28), ricordando la (29):

$$(30)\quad \mathcal{K}_0 \cdot dQ^2 \cdot \delta Q = -v^2 \cdot dQ^2 \cdot \delta Q + u(dQ^2 \cdot \delta v + dv \times dQ \cdot \delta Q),$$

la quale mostra che si può porre:

$$(a)\qquad \delta v = 2q\delta Q,$$

ove q è una funzione numerica di Q; questa funzione però non può essere arbitraria, perchè deve esser tale che il secondo membro risulti un differenziale esatto. Di qui è facile dedurre che q deve essere costante; e infatti, oltre alla (a) si ha pure:

$$(b)\qquad dv = 2q dQ,$$

ora operando col differenziale d sulla (a) e con δ sulla (b), poi sottraendo ed osservando che trattandosi di uno spazio euclideo si ha $d\delta v = \delta dv$, risulta:

$$dq \cdot \delta Q = \delta q \cdot dQ,$$

che, per l'arbitrarietà di dQ e δQ porge $dq = \delta q = 0$, cioè $q = \text{cost.}$

Dopo ciò dalla (a) si ricava, integrando:

$$(c) \qquad v = 2q(Q - O) + a,$$

ove O è un punto fisso, ed a un vettore costante arbitrario.

Poichè $v = \operatorname{grad} u$, integrando ancora si ha l'espressione *generale* di u sotto la forma:

$$(31) \qquad u = q(Q - O)^2 + a \times (Q - O) + p,$$

ove p è una costante arbitraria.

Le costanti d'integrazione p, a non sono però interamente arbitrarie, perchè la (31) deve soddisfare alla (28), o, più semplicemente, alla (30); e facendo la sostituzione si ottiene:

$$\mathcal{K}_0 \cdot dQ^2 \cdot \delta Q = -[4q^2(Q - O)^2 + a^2 + 4qa \times (Q - O)] \cdot dQ^2 \cdot \delta Q + \\ + [q(Q - O)^2 + a \times (Q - O) + p] \, 4q dQ^2 \cdot \delta Q,$$

cioè, riducendo:

$$(32) \qquad \mathcal{K}_0 = 4pq - a^2,$$

che è la relazione cercata fra le costanti d'integrazione.

Ottenuta così la funzione u, la (22') che si scrive:

$$(33) \qquad d\lambda = -\lambda \xi_3 \operatorname{grad} \log u \cdot dQ,$$

è un'equazione differenziale di 1° ordine (fra omografie), che determina la isomeria λ.

Così abbiamo stabilito che è sempre possibile determinare la u e l'isomeria λ in modo che sia soddisfatta la (27) e perciò il teorema è dimostrato.

11. Casi particolari.

Nell'espressione (31) di u figurano le costanti numeriche p, q e il vettore costante a, le quali sono legate dall'unica condizione (32); possiamo quindi imporre ancora altre condizioni relative ad un punto generico O, fissato ad arbitrio. Per es., supponiamo che nel punto O debba essere:

$$u = 1, \quad \operatorname{grad} u = 0,$$

e allora dalle (31), (c) si deduce tosto:

$$p = 1, \quad a = 0,$$

perciò, ricordando la (32) si ha:

$$u = \mathcal{K}_0 (Q - O)^2/4 + 1, \tag{34}$$

dopo di che la (27), che porge, $dQ'^2 = dQ^2/u^2$, può scriversi:

$$dQ'^2 = dQ^2/[\mathcal{K}_0 (Q - O)^2/4 + 1]^2, \tag{35}$$

formula dovuta a RIEMANN.

Se invece si suppone $q = 0$ le (31), (32) divengono

$$u = a \times (Q - O) + p, \quad \mathcal{K}_0 = -a^2,$$

perciò la curvatura deve essere *negativa*, e si dice allora che V_n è uno *spazio pseudosferico* di raggio $1/\operatorname{mod} a$; la (27) fornisce in tal caso:

$$dQ'^2 = dQ^2/[a \times (Q - O) + p]^2,$$

che, per $p = 0$, può ancora scriversi:

$$dQ'^2 = \frac{dQ^2}{-\mathcal{K}_0 [b \times (Q - O)]^2},$$

ove b è un vettore unitario. Questa formula è dovuta a BELTRAMI (a. 1868).

12. Applicabilità delle V_n colla stessa curvatura costante.

Dai risultati precedenti discende tosto il seguente notevolissimo

TEOREMA. - *Se due varietà ad n dimensioni hanno la stessa curvatura riemanniana costante, allora esse sono sempre fra loro applicabili.*

Infatti, siano V_n', V_n'' le due varietà, che supponiamo descritte rispettivamente dai punti Q', Q''; sussisterà allora la (35), e una analoga per la varietà V_n'', nella quale i secondi membri sono eguali, perchè le due varietà hanno la stessa curvatura costante $\mathcal{K}_0$. Ne segue $dQ'^2 = dQ''^2$ il che prova l'applicabilità delle due varietà considerate.

Capitolo V.

Curve ed ipersuperficie degli spazi curvi.

1. Curvatura delle linee di una varietà.

Sia C una curva della varietà V_n, ad n dimensioni, e supponiamo che sia descritta da un punto Q funzione di una variabile numerica q; sappiamo che se ds è l'elemento d'arco di C si ha:

$$ds = \operatorname{mod} dQ. \tag{1}$$

Inoltre, se si pone:

$$\boldsymbol{t} = dQ/ds, \tag{2}$$

il vettore $\boldsymbol{t}$ è unitario e parallelo alla tangente a C in Q.

Il vettore

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d^2Q}{ds^2} \tag{3}$$

è normale a $\boldsymbol{t}$ e dà la direzione della *normale principale assoluta* della curva C in Q (Cap. II, n. 3). Se si pone

$$\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} / \operatorname{mod} \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}, \tag{4}$$

il vettore $\boldsymbol{n}$ è unitario e parallelo alla normale principale assoluta di C in Q.

Ciò posto, si chiama *curvatura della linea* C *in* Q il numero c definito dall'eguaglianza

$$c = \boldsymbol{n} \times d\boldsymbol{t}/ds, \tag{5}$$

il che è perfettamente analogo a quanto si fa per le curve dello spazio ordinario.

Sussiste il seguente

TEOREMA I. - *La derivata dt/ds è data dalla formula:*

$$dt/ds = cn. \tag{6}$$

Infatti dalle (4), (5) segue ovviamente $c = \mathrm{mod}\,(dt/ds)$; dopo ciò la (4) porge senz'altro la (6). È chiaro che $c \geq 0$.

La (6) è analoga alla prima delle ben note formule di FRENET per le curve dello spazio ordinario.

È poi assai facile stabilire, come nel caso dello spazio ordinario, che *la curvatura di* C *in Q è il rapporto fra l'angolo di contingenza e l'arco elementare,* chiamandosi angolo di contingenza quello formato dalle tangenti a C in Q e in un altro punto infinitamente vicino.

La proiezione (ortogonale) della normale principale assoluta sullo spazio euclideo S_n, tangente alla V_n in Q, è una retta che si chiama *normale principale relativa a* V_n della curva C in Q. Tale retta è normale al vettore t.

Se n_r è un vettore unitario parallelo alla normale principale relativa in Q, e avente per verso quello della proiezione di n su questa normale, e si indica con $c_r n_r$ la proiezione del vettore cn sulla normale stessa (cioè sopra S_n), il numero c_r (che è positivo) si chiama *curvatura geodetica relativa a* V_n della curva C in Q.

Di qui e dalla (6) seguono subito le relazioni:

$$c_r n_r ds = d_v t, \quad c_r = cn \times n_r = n_r \times dt/ds. \tag{7}$$

Ricordando una proprietà delle geodetiche (Cap II, n. 6, Teor. III), si trae subito dalla (7) il seguente

TEOREMA II. - *La curvatura geodetica relativa a* V_n *è nulla solo per le geodetiche di* V_n.

Indichiamo con G la geodetica di V_n passante per Q e tangente in Q alla curva C, cioè tangente al vettore t; sia poi c_g la curvatura di questa geodetica in Q ed n_g un vettore unitario parallelo alla normale principale assoluta della geodetica G in Q.

Avremo allora il seguente

TEOREMA III. - *Le curvature* c, c_g *sono legate dalla relazione:*

$$c_g = c\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_g. \tag{8}$$

Infatti, il vettore $\boldsymbol{n}_g$ è normale alla V_n in Q (Cap. II, n. 6), perciò $\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}_g = 0$; derivando rispetto ad s ed osservando che $\frac{d\boldsymbol{n}_g}{ds} = \frac{d\boldsymbol{n}_g}{dQ}\boldsymbol{t}$, si ha, per la (6):

$$c\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_g + \boldsymbol{t} \times \frac{d\boldsymbol{n}_g}{dQ}\boldsymbol{t} = 0;$$

il secondo termine non muta se si sostituisce alla curva C un'altra curva della V_n, tangente in Q al vettore $\boldsymbol{t}$; in particolare prendendo la geodetica G risulta:

$$c_g + \boldsymbol{t} \times \frac{d\boldsymbol{n}_g}{dQ}\boldsymbol{t} = 0,$$

e confrontando colla precedente si conclude la (8).

Consideriamo n geodetiche della V_n passanti per Q e a due a due ortogonali, e siano $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ vettori unitari tangenti ad esse in Q e diretti nel verso crescente degli archi; diciamo poi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ gli angoli da essi formati col vettore $\boldsymbol{t}$ tangente alla C in Q. Si ha allora il

TEOREMA IV. - *Il vettore* $\boldsymbol{n}_r$ *si può esprimere mediante i vettori* $\boldsymbol{t}_i$ *colla formula:*

$$c_r\boldsymbol{n}_r ds = -(\operatorname{sen}\varphi_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 + \operatorname{sen}\varphi_2 \cdot d\varphi_2 \cdot \boldsymbol{t}_2 + \ldots + \operatorname{sen}\varphi_n \cdot d\varphi_n \cdot \boldsymbol{t}_n). \tag{9}$$

Infatti, si ha ovviamente:

$$\boldsymbol{t} = \cos\varphi_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 + \cos\varphi_2 \cdot \boldsymbol{t}_2 + \ldots + \cos\varphi_n \cdot \boldsymbol{t}_n,$$

prendendo il differenziale superficiale e badando che trattandosi di geodetiche si ha $d_v\boldsymbol{t}_i = 0$, risulta:

$$d_v\boldsymbol{t} = -(\operatorname{sen}\varphi_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 + \ldots + \operatorname{sen}\varphi_n \cdot d\varphi_n \cdot \boldsymbol{t}_n),$$

di qui e dalla (7) segue la (9).

Ne risulta, ad es., $c_r n_r \times t_1 = -\operatorname{sen}\varphi_1 \cdot d\varphi_1/ds$. Nel caso di una superficie dello spazio ordinario si ha $n_r \times t_1 = -\operatorname{sen}\varphi_1$, perciò ne segue senz'altro la nota proprietà $c_r = d\varphi_1/ds$.

Prendiamo sulle curve C, G, a partire dal punto Q due archi eguali e siano Q_1 e Q_2 i loro estremi. Si possono allora stabilire le proprietà seguenti (*Espaces*, pag. 182):

Teorema V. - *La curvatura geodetica relativa a* V_n, *della curva* C *in* Q *vale il doppio del limite del rapporto della distanza* Q_1Q_2 *al quadrato della distanza* QQ_1, *quando i punti* Q_1 *e* Q_2 *tendono al punto* Q.

Teorema VI. - *La normale principale relativa a* V_n *della curva* C *in* Q *è la posizione limite della retta* Q_1Q_2 *quando* Q_1 *e* Q_2 *tendono a* Q.

Osservazione. - Si potrebbe assumere senz'altro la (7) per definire la curvatura geodetica della C in Q; in tal caso, prendendo il differenziale superficiale della relazione $t^2 = 1$, si ottiene $t \times d_v t = 0$, la quale mostra che il vettore n_r è normale a t, cioè alla curva C.

2. Curvatura delle linee di un'ipersuperficie.

Sia W_{n-1}, un'ipersuperficie della varietà V_n, e sia C′ una curva tracciata sulla W_{n-1}, e t il vettore unitario tangente alla C′ in Q.

Poichè la curva C′ appartiene anche alla V_n, avremo da considerare, come nel n. precedente, la *normale principale relativa a* V_n di C′ in Q, che è definita dal vettore n_r e la *curvatura geodetica* c_r *relativa a* V_n.

Il vettore n_r è tangente alla V_n in Q ed è in pari tempo normale a t; la proiezione della normale principale relativa a V_n di C′ in Q sullo spazio euclideo S_{n-1} tangente in Q all'ipersuperficie W_{n-1} è una retta chiamata *normale principale relativa a* W_{n-1} della curva C′ in Q. Questa retta è normale al vettore t.

Se n'_r è un vettore unitario parallelo alla normale principale relativa a W_{n-1} della curva C′ in Q, e si indica con $c'_r n'_r$ la proiezione del vettore $c_r n_r$ sullo spazio S_{n-1}, il numero positivo c'_r si chiama *curvatura geodetica relativa a* W_{n-1} della curva C′ in Q.

È chiaro che si ha:

$$c'_r n'_r ds = d_w t, \tag{10}$$

ove $d_w t$ è il differenziale di t sulla ipersuperficie W_{n-1}.

Ne segue:

$$c_r' = c_r n_r \times n_r' = n_r' \times dt/ds. \tag{11}$$

Sia G′ la geodetica di W_{n-1} passante per Q e tangente a C′ in Q; indichiamo poi con c_g' la curvatura di questa geodetica in Q, e con N il vettore unitario, normale all'ipersuperficie W_{n-1} in Q e tangente alla V_n in Q; tale vettore, come sappiamo (Cap. II, n. 3) è unico, ed *è parallelo alla normale principale relativa a* V_n *della geodetica* G′ in Q (Cap. II, n. 6).

Ciò posto, sussiste l' importante

Teorema. - *Le curvature* c_r, c_r', c_g' *sono legate dalle relazioni:*

$$c_g' = -t \times \frac{d_v N}{dQ} t, \quad c_g' = c_r n_r \times N, \tag{12}$$

$$c_r n_r = c_g' N + c_r' n_r'. \tag{13}$$

Infatti, procedendo come per il Teor. III del n. precedente, osserviamo che $t \times N = 0$, da cui prendendo il differenziale superficiale:

$$d_v t \times N + t \times d_v N = 0,$$

ma dalle (7) si ha:

$$d_v t \times N = c_r n_r \times N \cdot ds, \tag{a}$$

perciò:

$$c_r n_r \times N \cdot ds + t \times d_v N = 0$$

ma si può scrivere:

$$d_v N = \frac{d_v N}{dQ} dQ = \frac{d_v N}{dQ} t ds$$

quindi:

$$c_r n_r \times N + t \times \frac{d_v N}{dQ} t = 0;$$

il secondo termine di questa eguaglianza non muta se si sostituisce alla curva C′ un'altra curva della W_{n-1}, tangente in Q al vettore t; considerando, in particolare, la geodetica G′ si deduce allora:

$$c_g' + t \times \frac{d_v N}{dQ} t = 0,$$

che dimostra la prima delle (12).

Dal confronto delle ultime due eguaglianze segue la seconda delle (12).

È chiaro che il vettore $c_r n_r - c_r' n_r'$ è parallelo ad N, cioè è della forma hN, e perciò $c_r n_r = c_r' n_r' + hN$; sostituendo nella seconda delle (12) si conclude subito $h = c_g'$, e così risulta dimostrata anche la (13).

Se si indica con θ l'angolo dei vettori n_r, N, la seconda delle (12) e la (11) ci danno le formule notevoli:

$$c_g' = c_r \cos\theta, \quad c_r' = c_r \operatorname{sen}\theta; \tag{14}$$

la prima di queste costituisce l'estensione del teorema di Meusnier alle ipersuperficie degli spazi curvi ad un numero qualunque di dimensioni.

Ricordando la (a) e la prima delle (12) si può scrivere la seconda delle (12) sotto le forme seguenti:

$$c_g' = d_v t \times N/ds = -\frac{dQ}{ds} \times \frac{d_v N}{ds} = -\frac{dQ \times d_v N}{dQ^2}, \tag{15}$$

che sono analoghe a note formule delle superficie ordinarie.

3. L'omografia fondamentale delle ipersuperficie.

Lo studio delle proprietà fondamentali delle ipersuperficie può farsi semplicemente considerando un'omografia notevolissima, analoga a quella introdotta dal Burali per le superficie ordinarie (Parte I, Cap. II, n. 5).

Sia, come dianzi, W_{n-1} una ipersuperficie della varietà V_n, ed $\boldsymbol{N}$ sia il vettore unitario, normale alla W_{n-1} (e tangente a V_n) in Q.

Poichè $\boldsymbol{N}^2 = 1$, ne segue, prendendo il differenziale superficiale sulla V_n:

$$\boldsymbol{N} \times d_v \boldsymbol{N} = 0, \tag{16}$$

quindi: *il vettore* $d_v \boldsymbol{N}$ *è tangente alla* W_{n-1} *in* Q.

Definiamo ora un'omografia σ, funzione del punto Q variabile sulla V_n, colle condizioni seguenti:

a) quando il punto Q si sposta sulla W_{n-1} si ha:

$$\sigma dQ = d_v \boldsymbol{N}, \tag{17}$$

cioè:

$$\sigma = d_v \boldsymbol{N} / dQ, \tag{18}$$

b) inoltre si ha:

$$\sigma \boldsymbol{N} = 0. \tag{19}$$

Nelle (17), (18) il vettore dQ è evidentemente normale ad $\boldsymbol{N}$, e quindi la (17) ci dà il corrispondente, rispetto a σ, di qualunque vettore tangente alla W_{n-1} in Q; la (19) esprime poi che il corrispondente, rispetto a σ, di qualunque vettore normale alla W_{n-1} (e tangente alla V_n) è il vettore nullo. E poichè ogni vettore tangente alla V_n in Q si può scomporre nella somma di un vettore tangente alla W_{n-1} in Q e di un vettore normale alla W_{n-1}, si conclude che le (18), (19) *definiscono l'omografia* σ *per ogni vettore tangente alla* V_n *in* Q.

L'omografia σ gode delle proprietà fondamentali seguenti:

TEOREMA. - *Se* dQ *è uno spostamento del punto* Q *sulla* W_{n-1}, *si ha:*

$$\boldsymbol{N} \times \sigma dQ = 0, \tag{20}$$

inoltre

$$\mathrm{K} \sigma \boldsymbol{N} = 0, \tag{21}$$

$$\mathrm{K} \sigma = \sigma, \tag{22}$$

perciò l'omografia σ *è una* **dilatazione.**

La (20) è una immediata conseguenza delle (16), (17).

Considerando poi un vettore u qualunque, tangente alla V_n in Q, esso può porsi sotto la forma: $u = a\boldsymbol{N} + bdQ$, ove a, b sono numeri reali e dQ è tangente alla W_{n-1}, perciò dalle (17), (19) si trae:

$$\sigma u = b\sigma dQ = bd_v\boldsymbol{N},$$

perciò $\sigma u \times \boldsymbol{N} = 0$, da cui $u \times \mathrm{K}\sigma\boldsymbol{N} = 0$, e, per l'arbitrarietà del vettore u si conclude la (21).

Se poi δQ è un altro spostamento di Q sulla W_{n-1}, si ha:

$$\boldsymbol{N} \times dQ = 0, \quad \boldsymbol{N} \times \delta Q = 0;$$

applicando il differenziale δ_v alla prima di queste eguaglianze, e il differenziale d_v alla seconda, si ha:

$$\delta_v\boldsymbol{N} \times dQ + \boldsymbol{N} \times \delta_v dQ = 0, \quad d_v\boldsymbol{N} \times \delta Q + \boldsymbol{N} \times d_v\delta Q = 0,$$

sottraendo queste due eguaglianze e ricordando la (4) del Cap. III si ha:

$$\delta_v\boldsymbol{N} \times dQ - d_v\boldsymbol{N} \times \delta Q = 0,$$

cioè, per la (17):

$$\begin{aligned} \sigma\delta Q \times dQ - \sigma dQ \times \delta Q &= 0 \\ dQ \times (\sigma - \mathrm{K}\sigma)\delta Q &= 0, \end{aligned}$$

la quale relazione vale qualunque siano i vettori dQ, δQ tangenti alla W_{n-1} in Q; ma, d'altra parte, dalle (19), (21) si trae $(\sigma - \mathrm{K}\sigma)\boldsymbol{N} = 0$, perciò si conclude $\sigma - \mathrm{K}\sigma = 0$, da cui risulta la (22).

4. Curvatura totale di un'ipersuperficie.

Il concetto di curvatura totale, o di Gauss, per una superficie ordinaria, può estendersi facilmente ad un'ipersuperficie W_{n-1} di una V_n; premettiamo all'uopo il seguente

Teorema. - *Se d_1Q, d_2Q, ..., $d_{n-1}Q$ sono spostamenti infinitesimi arbitrari del punto Q sulla W_{n-1} e $d_{v1}\boldsymbol{N}$, $d_{v2}\boldsymbol{N}$, ...,*

$d_{v,n-1}\boldsymbol{N}$ *sono i corrispondenti differenziali superficiali di* $\boldsymbol{N}$, *si ha:*

$$\operatorname{am}(\boldsymbol{N},\, d_1 Q,\, d_2 Q,\, \ldots,\, d_{n-1}Q)\cdot \mathrm{I}_{n-1}\sigma = \tag{23}$$
$$= \operatorname{am}(\boldsymbol{N},\, d_{v1}\boldsymbol{N},\, d_{v2}\boldsymbol{N},\, \ldots,\, d_{v,n-1}\boldsymbol{N}).$$

Basta applicare la (8″) del Cap. I, ricordare che $\sigma\boldsymbol{N} = 0$, e tener presente la (17).

Nel caso di una superficie dello spazio ordinario, si ha $n = 3$, e allora la (23) ci fornisce l'invariante secondo della omografia σ, che non è altro che la curvatura totale, o di GAUSS, della superficie considerata [Cap. IV, form. (1)].

Per n qualunque si può quindi, per analogia, chiamare *curvatura totale* dell'ipersuperficie W_{n-1} il valore di $\mathrm{I}_{n-1}\sigma$ ricavato dalla (23).

Si possono anche considerare altre curvature, definite da $\mathrm{I}_1\sigma$, $\mathrm{I}_2\sigma$, ... (*Espaces*, pag. 188).

La curvatura totale ora introdotta è suscettibile di una interessante interpretazione geometrica, ricorrendo alla cosidetta rappresentazione ipersferica dell'ipersuperficie W_{n-1}.

Per questo, sia O un punto fisso, e ad ogni punto Q della W_{n-1} facciamo corrispondere il punto:

$$M = O + \boldsymbol{N}; \tag{24}$$

è chiaro che quando il punto Q descrive la W_{n-1}, il punto M si muove sull'ipersfera Σ_{n-1} di raggio 1, avente per centro il punto O.

Si dice perciò che la (24) stabilisce la ***rappresentazione ipersferica*** dell'ipersuperficie W_{n-1} sull'ipersfera Σ_{n-1}.

Ad ogni punto della W_{n-1} corrisponde un punto ben determinato di Σ_{n-1}, ma un punto di quest'ipersfera può essere il corrispondente di più punti della W_{n-1}; se il punto Q descrive una regione della W_{n-1}, il punto M descrive la porzione corrispondente di Σ_{n-1} e se consideriamo le estensioni (ad $n-1$ dimensioni) di due porzioni corrispondenti, si ha il seguente:

TEOREMA. - *Il rapporto delle estensioni di due regioni*

infinitesime corrispondenti di Σ_{n-1} ***e di*** W_{n-1} ***è eguale alla curvatura totale della*** W_{n-1}.

Infatti, si può prendere per elemento di estensione della W_{n-1} il parallelepipedo (ad $n-1$ dimensioni) determinato dai vettori d_1Q, d_2Q, ..., $d_{n-1}Q$, dianzi considerati; la sua estensione, tenendo conto del segno, vale $\text{am}\,(\boldsymbol{N},\ d_1Q,\ d_2Q,\ ...,\ d_{n-1}Q)$.

All'elemento di estensione considerato sulla W_{n-1}, corrisponde sulla Σ_{n-1} un altro elemento di estensione determinato dai vettori $d_1\boldsymbol{M}$, $d_2\boldsymbol{M}$, ..., $d_{n-1}\boldsymbol{M}$, cioè, in virtù della (24), dai vettori $d_{v1}\boldsymbol{N}$, $d_{v2}\boldsymbol{N}$, ..., $d_{v,\,n-1}\boldsymbol{N}$, il cui valore è $\text{am}\,(\boldsymbol{N},\ d_{v1}\boldsymbol{N},\ d_{v2}\boldsymbol{N},\ ...,\ d_{v,\,n-1}\boldsymbol{N})$. Ora il rapporto fra queste due estensioni è precisamente eguale, in virtù della (23), alla curvatura totale della W_{n-1}, conforme al teorema.

Si può anche trovare facilmente l'interpretazione geometrica di $I_1\sigma$, che può chiamarsi *curvatura media* della W_{n-1} (*Espaces*, pag. 191).

5. Curvature principali di un'ipersuperficie. Formula di Eulero.

Come abbiamo visto, l'omografia σ è una dilatazione, quindi, per un teorema noto (Cap. I, n. 6), ***essa ammette almeno n direzioni unite, a due a due ortogonali.***

Una di queste direzioni è quella del vettore $\boldsymbol{N}$, perchè $\sigma\boldsymbol{N}=0$; le altre $n-1$ direzioni sono perciò normali ad $\boldsymbol{N}$, quindi ***sono tangenti alla*** W_{n-1} ***in*** Q.

Se $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, ..., $\boldsymbol{i}_{n-1}$ sono vettori unitari paralleli alle direzioni unite considerate, possiamo dunque porre:

$$\sigma\boldsymbol{i}_r = -m_r\boldsymbol{i}_r, \quad (r=1,2,...,n-1), \tag{25}$$

ove le m_r indicano numeri reali determinati.

Le $n-1$ direzioni unite ora introdotte, si chiamano ***direzioni principali*** dell'ipersuperficie W_{n-1} nel punto Q, e i numeri m_r si chiamano *curvature principali* della W_{n-1} in Q.

Introducendo la σ, si può scrivere la prima delle (12) così:

$$c_g' = -\frac{dQ}{ds} \times \sigma \frac{dQ}{ds}, \tag{26}$$

$$c_g' = -\frac{(P-Q) \times \sigma(P-Q)}{(P-Q)^2}, \tag{26'}$$

ove si è posto:

$$dQ/ds = (P-Q)/\mathrm{mod}\,(P-Q).$$

Mediante la (26′) possiamo ottenere le direzioni principali della W_{n-1} in modo del tutto diverso, e precisamente cercando le direzioni (tangenti alla W_{n-1} in Q) secondo le quali la curvatura c_g' è massima o minima.

Si ha, in proposito, il seguente:

TEOREMA I. - *Le direzioni secondo le quali la curvatura c_g' è massima o minima sono le direzioni principali della W_{n-1} in Q, e questi valori massimi e minimi sono le curvature principali della W_{n-1} in Q.*

Infatti, affinchè la curvatura c_g', considerata come funzione di P, a norma della (26′), sia massima o minima, è necessario che $\mathrm{grad}_P\, c_g' = 0$; ora dalla (26′) si ha:

$$(P-Q) \times \sigma(P-Q) = -c_g'(P-Q)^2,$$

e prendendo il gradiente si ottiene:

$$\sigma(P-Q) = -c_g'(P-Q),$$

la quale mostra che $P-Q$ è direzione unita di σ; di qui risulta il teorema.

TEOREMA II. - *Se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sono gli angoli che il vettore $P-Q$ (tangente alla W_{n-1} in Q) forma colle direzioni principali della W_{n-1} in Q, si ha:*

$$c_g' = m_1 \cos^2 \varphi_1 + m_2 \cos^2 \varphi_2 + \ldots + m_{n-1} \cos^2 \varphi_{n-1}. \tag{27}$$

Infatti, se si pone $l = \mathrm{mod}\,(P-Q)$, si ha ovviamente:

$$P - Q = l(\boldsymbol{i}_1 \cos \varphi_1 + \ldots + \boldsymbol{i}_{n-1} \cos \varphi_{n-1});$$

sostituendo nella (26′), e tenendo conto delle (25), risulta la (27).

Come ben si vede, la (27) non è altro che la generalizzazione alle ipersuperficie degli spazi curvi della formula di EULERO per le superficie dello spazio ordinario.

Si chiama *quadrica indicatrice* della dilatazione σ la quadrica (ad $n-1$ dimensioni, appartenente all' S_{n-1} tangente alla W_{n-1} in Q) luogo dei punti P che soddisfano alla

$$(28) \qquad (P-Q)\times\sigma(P-Q)=\pm 1;$$

tale quadrica, che ha per centro Q, gode di proprietà del tutto analoghe a quelle relative all'indicatrice di DUPIN per le superficie dello spazio ordinario.

Così, ad es., sussiste il seguente

TEOREMA III. - *Il reciproco del quadrato di un semidiametro della quadrica indicatrice è eguale alla curvatura della geodetica della* W_{n-1} *tangente in* Q *al diametro considerato.*

Questa proprietà risulta senz'altro dalle (26′), (28).

È importante osservare che le (25), unitamente alla relazione $\sigma\boldsymbol{N}=0$, definiscono completamente la σ; e di qui si possono dedurre varie relazioni fra gli invarianti di σ e le curvature principali m_r; ci limiteremo alle due seguenti, che risultano subito dalle (10), (18) del Cap. I:

$$\mathrm{I}_1\sigma=-(m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}),$$
$$\mathrm{I}_{n-1}\sigma=(-1)^{n-1}m_1m_2\ldots m_{n-1}.$$

Infine notiamo che dalla (59) del Cap. I si deducono subito le relazioni:

$$\mathrm{R}\sigma\boldsymbol{i}_r=0, \quad (r=1, 2, \ldots, n-1), \quad \mathrm{R}\sigma\boldsymbol{N}=(\mathrm{I}_{n-1}\sigma)\boldsymbol{N},$$

perciò si ha:

$$\mathrm{R}\sigma=(\mathrm{I}_{n-1}\sigma)\mathrm{H}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}),$$

formula analoga a quella delle superficie ordinarie

6. Linee di curvatura di un' ipersuperficie.

Abbiamo definito nel precedente numero le direzioni principali di un' ipersuperficie W_{n-1} nel punto Q; per mezzo di questa nozione possiamo definire le linee di curvatura nel modo seguente.

Si chiama *linea di curvatura* della W_{n-1} ogni curva di W_{n-1} tale che ciascuna delle sue tangenti sia una direzione principale della W_{n-1}.

Per ogni punto della W_{n-1} passano, almeno, $n-1$ linee di curvatura, che si tagliano ortogonalmente; perciò sulla W_{n-1} esistono $n-1$ sistemi di linee di curvatura tali che, per ogni punto della W_{n-1} passa sempre una curva di ciascuno dî questi sistemi.

Sussistono le proprietà seguenti (*Espaces*, pag. 194):

Teorema I. - *L' equazione differenziale delle linee di curvatura è:*

(29) $$d_v N = -m_r dQ.$$

Infatti, se nelle (25) poniamo $i_r = h dQ$, ove h è un numero reale e dQ è uno spostamento tangente ad una delle linee di curvatura, si ha $\sigma dQ = -m_r dQ$; ma $\sigma dQ = d_v N$, perciò ne segue la (29).

Risulta poi dalle (25), (26) che $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ *sono le curvature delle geodetiche di* W_{n-1} *tangenti in* Q *alle linee di curvatura.*

Teorema II. - *Se la curvatura riemanniana della* V_n *è costante e se sull' ipersuperficie* W_{n-1} *della* V_n *ogni linea è linea di curvatura, allora la* W_{n-1} *deve essere un iperpiano od un' ipersfera.*

Infatti, dalla (29) risulta che si può porre, qualunque siano gli spostamenti dQ e δQ sulla W_{n-1}:

(a) $$d_v N = x dQ, \quad \delta_v N = x \delta Q,$$

ove x è una funzione numerica del punto Q; applicando poi l'operatore δ_v alla prima di queste eguaglianze e l'operatore d_v alla seconda, ne segue, sottraendo:

(b) $$\delta_v d_v N - d_v \delta_v N = \delta x \cdot dQ - dx \cdot \delta Q;$$

d'altra parte, essendo la curvatura riemanniana c della V_n costante, sussiste la (10) del Cap. IV, da cui risulta, ricordando la (8) del Cap IV:

$$\mathfrak{R}dQ\delta Qd'Q = c[\mathrm{H}(dQ, \delta Q) - \mathrm{H}(\delta Q, dQ)]d'Q,$$

ora, se il vettore $d'Q$ si suppone parallelo ad $\boldsymbol{N}$, il secondo membro si annulla, perciò $\mathfrak{R}dQ\delta Q\boldsymbol{N} = 0$, ossia, per la (20) del Cap. III: $\delta_v d_v \boldsymbol{N} - d_v \delta_v \boldsymbol{N} = 0$, perciò la precedente ($b$) porge: $\delta x \cdot dQ - dx \cdot \delta Q = 0$, e poichè i vettori dQ, δQ sono arbitrari, risulta: $dx = 0$, $\delta x = 0$, da cui $x = \mathrm{cost}$.

Ciò posto, se $x = 0$, la (a) ci dà $\boldsymbol{N} = \mathrm{cost}$, e la W_{n-1} è allora un iperpiano. Se poi $x \neq 0$, si ha dalla (a) integrando:

$$Q = O + \boldsymbol{N}/x,$$

ove O è un punto arbitrario; ne risulta: $(Q - O)^2 = 1/x^2 = \mathrm{cost}$, ciò che mostra che la W_{n-1} è un'ipersfera.

7. Sistemi n^{pli} ortogonali della V_n. - Teorema di Dupin. Siano

$$(30) \qquad u_1(Q) = \mathrm{cost}, \quad u_2(Q) = \mathrm{cost}, \quad \ldots \quad u_n(Q) = \mathrm{cost},$$

le equazioni di n ipersuperficie immerse nella varietà V_n.

Affinchè queste ipersuperficie si taglino a due a due ortogonalmente è necessario e sufficiente che le n funzioni u_i verifichino le equazioni seguenti [Cap. II, form. (16)]:

$$(31) \qquad \mathrm{grad}_v\, u_i \times \mathrm{grad}_v\, u_j = 0, \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

si ha così un sistema di $n(n-1)/2$ equazioni fra le n funzioni u_i, perciò, se $n > 3$, il numero delle equazioni supera quello delle incognite, e si conclude quindi che, in generale, le equazioni (31) non ammettono soluzioni.

Tuttavia, in taluni casi particolari, le equazioni (31) possono avere soluzioni comuni, ed allora si dice che *le ipersuperficie* (30) *formano un sistema n^{plo} ortogonale.*

Se si considera uno di questi sistemi n^{pli} ortogonali, è facile vedere che $n-1$ qualunque delle ipersuperficie (30) si tagliano secondo una curva ortogonale all'ipersuperficie rimanente; chiamando C_1, C_2, ..., C_n queste curve d'intersezione, la curva C_i sarà allora normale all'ipersuperficie $u_i = \text{cost}$.

Poichè il punto generico Q della V_n risulta determinato dalla intersezione delle n ipersuperficie (30), si può definire il punto Q mediante le n quantità $u_1, u_2, \ldots, u_n$, che possiamo considerare come variabili indipendenti, ed è chiaro che lungo la curva C_i il punto Q è funzione soltanto di u_i, ed il vettore $\partial Q/\partial u_i$, che è tangente alla C_i in Q, risulta normale in Q all'ipersuperficie $u_i = \text{cost}$.

Ne segue:

$$\frac{\partial Q}{\partial u_i} \times \frac{\partial Q}{\partial u_j} = 0, \quad (i \neq j). \tag{32}$$

Indicando poi con $\boldsymbol{N}_i$ un vettore unitario, normale all'ipersuperficie $u_i = \text{cost}$, si può porre:

$$\partial Q/\partial u_i = H_i \boldsymbol{N}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

ove H_i è una certa funzione numerica di Q, e la (32) ci dà:

$$\boldsymbol{N}_i \times \boldsymbol{N}_j = 0, \quad (i \neq j). \tag{32'}$$

Mediante le relazioni precedenti è facile dimostrare (*Espaces*, pag. 197) la seguente proprietà, che estende agli spazi curvi un notevole teorema di Dupin relativo ai sistemi tripli ortogonali dello spazio ordinario:

Teorema I. - *Le curve* $C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n$ *sono linee di curvatura della ipersuperficie* $u_i = \text{cost}$.

Inoltre sussistono le proprietà seguenti (*Espaces*, pag. 198):

Teorema II. - *Se* c_{ij} *indica la curvatura principale in* Q *della ipersuperficie* $u_i = \text{cost}$, *secondo la direzione della curva* C_j, *si ha:*

$$c_{ij} = -\frac{1}{H_i H_j}\frac{\partial H_j}{\partial u_i}.$$

Teorema III. - *Se* c_n *indica, come nel n. 1, la curvatura geodetica relativa alla* V_n *della linea di curvatura* C_n, *e* *se n_r è un vettore unitario parallelo alla normale principale relativa a V_n della curva C_n in Q, allora:*

$$c_r n_r = c_{1n} \boldsymbol{N}_1 + c_{2n} \boldsymbol{N}_2 + \dots + c_{n-1,n} \boldsymbol{N}_{n-1}.$$

Nel caso particolare di $n = 3$, cioè di superficie immerse in spazi curvi a *tre dimensioni* V_3, si possono stabilire facilmente proprietà analoghe a quelle delle superficie dello spazio ordinario. Così, ad es., (*Espaces*, pag. 200) si ha il

Teorema IV. - *Se l'intersezione di due superficie di una V_3 è una linea di curvatura per entrambe le superficie, esse si tagliano sotto angolo costante. E viceversa.*

8. Ipersuperficie in rappresentazione conforme.

Consideriamo, come nel n. 6 del Cap. precedente, due varietà V_n e V_n' ad n dimensioni, le quali si corrispondano secondo la legge espressa dalla (18) del Cap. precedente, cioè:

$$dQ' = U\lambda dQ, \tag{34}$$

ossia supponiamo che vi sia *rappresentazione conforme* dell'una varietà sull'altra.

Sia poi W_{n-1} una ipersuperficie qualunque della V_n e W'_{n-1} l'ipersuperficie corrispondente nella V_n'; indichiamo inoltre con $\boldsymbol{N}$ ed $\boldsymbol{N}'$ i vettori unitari normali alle V_n e V_n' nei punti corrispondenti Q e Q'.

Sussistono allora le proprietà seguenti.

Teorema I. - *Si ha:*

$$\boldsymbol{N}' = \lambda \boldsymbol{N}. \tag{35}$$

Infatti, poichè la rappresentazione conforme conserva gli angoli, è chiaro che al vettore $\boldsymbol{N}$ normale alla W_{n-1}, corrisponderà un vettore normale alla W'_{n-1}; di qui segue subito la (35), perchè $\boldsymbol{N}'$ è vettore unitario.

Teorema II. - *L'isomeria λ e il vettore $\boldsymbol{N}$ sono legati dalla formula:*

$$\mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda \cdot \boldsymbol{N} = (\mathrm{grad}_v \log U) \times \boldsymbol{N} \cdot dQ, \tag{36}$$

ove dQ è un vettore tangente alla W_{n-1} in Q.

Basta infatti ricorrere alla la (21) del Cap. precedente, e poi applicare ai due membri l'omografia Kλ.

Teorema III. - *Alle linee di curvatura dell'ipersuperficie* W_{n-1} *corrispondono le linee di curvatura dell'ipersuperficie* W'_{n-1}, *e le curvature principali* m_r, m_r' *sono legate dalla relazione:*

$$m_r = m_r' U + (\mathrm{grad}_v \log U) \times \boldsymbol{N}. \tag{37}$$

Infatti, l'equazione differenziale di una linea di curvatura della W_{n-1} è data dalla (29), ossia:

$$d_v \boldsymbol{N} = - m_r d\boldsymbol{Q}, \tag{a}$$

ove $d\boldsymbol{Q}$ è parallelo ad una direzione principale. Analogamente, per una linea di curvatura della W'_{n-1} si ha:

$$d_v \boldsymbol{N}' = - m_r' d\boldsymbol{Q}',$$

cioè, in virtù delle (35), (34):

$$\lambda d_v \boldsymbol{N} + d_v\lambda \cdot \boldsymbol{N} = - m_r' U \lambda d\boldsymbol{Q},$$

da cui:

$$d_v \boldsymbol{N} = - \mathrm{K}\lambda \cdot d_v\lambda \cdot \boldsymbol{N} - m_r' U dQ;$$

applicando poi la (36) risulta:

$$d_v \boldsymbol{N} = - (m_r' U + \mathrm{grad}_v \log U \times \boldsymbol{N}) d\boldsymbol{Q},$$

e confrontando colla (a) si deduce il teorema.

9. Teorema di Liouville.

La proprietà ora stabilita può applicarsi, in particolare, agli spazi euclidei, che sono a curvatura riemanniana nulla. In questo caso è facile risolvere la questione di trovare tutte le possibili rappresentazioni conformi di uno spazio euclideo ad n dimensioni sopra se stesso; e precisamente vedremo che il gruppo di tali rappresentazioni, per $n > 2$, è un gruppo *finito*, che dipende da $(n+1)(n+2)/2$, parametri [1].

---

[1] Per $n = 2$, com'è ben noto, il gruppo è infinito e dipende da una funzione arbitraria di variabile complessa.

Intanto dimostriamo la seguente proprietà, che è stata stabilita da LIOUVILLE per il caso dello spazio ordinario:

TEOREMA - *Le più generali trasformazioni conformi dello spazio euclideo di $n > 2$ dimensioni in se stesso si ottengono combinando le inversioni per raggi vettori reciproci coi movimenti e colle similitudini.*

Infatti, considerando la rappresentazione conforme determinata dalla (34), ove Q descrive uno spazio euclideo S_n, dovremo determinare U in modo che il punto Q' pure descriva uno spazio euclideo S_n. Ponendo $U = 1/u$ la (34) diventa la (27) del Cap. precedente, e la questione che ci siamo posta rientra in quella risolta nel n. 10 del Cap. precedente, perciò se $n > 2$, la funzione u deve avere necessariamente la forma (31) data nel n. 10 citato, cioè:

$$u = q(Q - O)^2 + a \times (Q - O) + p, \tag{38}$$

ove a è un vettore costante, e p, q sono numeri pure costanti, legati dalla relazione (32) del citato n. 10, la quale porge ora: $4pq = a^2$.

Ciò premesso, se $q = 0$, deve essere anche $a = 0$, e allora rimane $u = p$, perciò la (33) del solito n. 10 diventa $d\lambda = 0$, perciò l'isomeria λ deve essere *costante*, e allora si ha dalla (34):

$$Q' = O + \lambda(Q - O)/p,$$

ove O è un punto fisso arbitrario; la rappresentazione conforme è allora semplicemente una *similitudine* (ed un *movimento* per $p = 1$).

Supposto poi $q \neq 0$, si può scrivere:

$$u = q(Q - O)^2 + a \times (Q - O) + a^2/(4q),$$

cioè, più semplicemente:

$$u = q(Q - A)^2,$$

avendo posto $A = O - a/(2q)$.

Risulta allora, dalla (34):

$$dQ'^2 = \frac{1}{q^2} \frac{dQ^2}{(Q - A)^2}; \tag{39}$$

a meno di movimenti, questa trasformazione si ottiene coll'inversione per raggi vettori reciproci definita da:

$$Q' = A + \frac{Q - A}{q(Q - A)^2},$$

nella quale A è il centro d'inversione; e infatti da essa si ricava:

$$dQ' = \frac{1}{q[(Q - A)^2]^2} \{(Q - A)^2 \cdot dQ - 2(Q - A) \times dQ \cdot (Q - A)\};$$

elevando a quadrato, ed osservando che il quadrato del vettore chiuso entro le $\{...\}$ vale $[(Q - A)^2 dQ]^2$, ne segue senz'altro la (39). Con ciò il teorema è dimostrato.

Le trasformazioni considerate formano un gruppo continuo, in cui il numero dei parametri è dato da

$$n(n + 1)/2 + 1 + n, \quad \text{cioè} \quad (n + 1)(n + 2)/2;$$

e questo è il *gruppo conforme* dello spazio euclideo.

CAPITOLO VI.

Curvatura delle ipersuperficie degli spazi curvi.

1. L'omografia di Riemann per un'ipersuperficie.

Sia, come nel Cap. precedente, V_n una varietà ad n dimensioni, descritta dal punto variabile Q, e W_{n-1} una ipersuperficie di V_n.

Vogliamo stabilire la relazione che intercede fra l'omografia di RIEMANN relativa alla V_n e quella relativa alla W_{n-1}.

Diciamo, al solito, N il vettore unitario, normale alla W_{n-1} in Q e tangente alla V_n in Q (il cui verso si intende fissato a piacere). Sia poi u un vettore tangente alla W_{n-1} in Q, e diamo al punto Q uno spostamento infinitesimo qualunque dQ sulla superficie W_{n-1} (e quindi appartenente anche alla V_n); è chiaro che il corrispondente differenziale du del vettore u non è più, in generale, tangente alla W_{n-1}, ma è un vettore dello spazio euclideo E_N in cui si può sempre immaginare immersa la V_n.

Consideriamo allora la componente tangenziale, sulla V_n, del vettore du, cioè il vettore proiezione ortogonale di du sullo spazio euclideo S_n tangente alla V_n in Q; esso non è altro che il vettore $d_v u$ differenziale di u sulla varietà V_n, o differenziale superficiale di u; inoltre consideriamo il vettore proiezione ortogonale di du sullo spazio euclideo S_{n-1} tangente alla W_{n-1} in Q (e quindi appartenente anche ad S_n), cioè il vettore $d_w u$ differenziale di u sulla ipersuperficie W_{n-1}; è chiaro che il vettore $d_w u$ si può anche immaginare come la proiezione ortogonale del vettore $d_v u$

sull'S_{n-1} considerato, e si ha perciò:

(1) $$d_w u = d_v u - d_v u \times N \cdot N.$$

Differenziando col simbolo δ_v di differenziale superficiale sulla varietà V_n, il quale, come abbiamo dimostrato nel Cap. III, gode di proprietà analoghe a quelle dell'ordinario simbolo differenziale d negli spazi euclidei (eccezione fatta per la proprietà commutativa dei differenziali secondi) si ha:

(2) $$\delta_v d_w u = \delta_v d_v u - \delta_v d_v u \times N \cdot N - d_v u \times \delta_v N \cdot N - \\ - d_v u \times N \cdot \delta_v N.$$

A noi interessa calcolare $\delta_w d_w u$, che ci è dato da una relazione analoga alla (1), cioè:

(3) $$\delta_w d_w u = \delta_v d_w u - \delta_v d_w u \times N \cdot N;$$

ora, siccome $N^2 = 1$, ne segue:

(4) $$N \times \delta_v N = 0,$$

perciò il vettore $\delta_v N$ è tangente alla W_{n-1} in Q; moltiplicando scalarmente la (2) per N, si deduce quindi:

(5) $$\delta_v d_w u \times N = - d_v u \times \delta_v N.$$

Sostituendo i valori (2) e (5) nel secondo membro della (3) si ha senz'altro:

$$\delta_w d_w u = \delta_v d_v u - \delta_v d_v u \times N \cdot N - d_v u \times N \cdot \delta_v N;$$

osservando che $u \times N = 0$, ne segue: $d_v u \times N = - u \times d_v N$, perciò sostituendo nell'ultimo termine si trae:

$$\delta_w d_w u = \delta_v d_v u - \delta_v d_v u \times N \cdot N + u \times d_v N \cdot \delta_v N;$$

di qui, scambiando i differenziali d e δ risulta:

$$d_w \delta_w u = d_v \delta_v u - d_v \delta_v u \times N \cdot N + u \times \delta_v N \cdot d_v N,$$

e sottraendo dalla precedente:

$$(6) \qquad \delta_w d_w u - d_w \delta_w u = (\delta_v d_v u - d_v \delta_v u) - \\ - (\delta_v d_v u - d_v \delta_v u) \times N \cdot N + u \times d_v N \cdot \delta_v N - u \times \delta_v N \cdot d_v N.$$

Indicando con $\mathfrak{R}_v$ e $\mathfrak{R}_w$ le omografie di Riemann relative alle varietà V_n e W_{n-1}, e ricordando che si ha ad es. [Cap. III, form. (20)]:

$$(7) \qquad \delta_v d_v u - d_v \delta_v u = \mathfrak{R}_v dQ \delta Q u,$$

potremo scrivere la (6) così:

$$(8) \qquad \mathfrak{R}_w dQ \delta Q u = (\mathfrak{R}_v dQ \delta Q u - \mathfrak{R}_v dQ \delta Q u \times N \cdot N) + \\ + u \times d_v N \cdot \delta_v N - u \times \delta_v N \cdot d_v N.$$

Questa è la formula fondamentale che volevamo ottenere e che fornisce una relazione molto semplice fra l'omografia di Riemann $\mathfrak{R}_v$ relativa alla varietà V_n e l'omografia analoga $\mathfrak{R}_w$ relativa all'ipersuperficie W_{n-1} immersa nella V_n.

È chiaro che nella (8) l'espressione chiusa entro le parentesi non è altro che la proiezione, sullo spazio S_{n-1} tangente alla W_{n-1} in Q, del vettore $\mathfrak{R}_v dQ \delta Q u$, cioè è la componente tangenziale, relativa alla W_{n-1}, di questo vettore.

2. Trasformazioni della formula fondamentale.

Se indichiamo con σ l'omografia fondamentale dell'ipersuperficie W_{n-1}, allora sappiamo che (Cap. V, n. 3):

$$(9) \qquad d_v N = \sigma dQ,$$

e la (8) può scriversi:

$$(8') \qquad \mathfrak{R}_w dQ \delta Q u = \mathfrak{R}_v dQ \delta Q u - \mathfrak{R}_v dQ \delta Q u \times N \cdot N + \\ + u \times \sigma dQ \cdot \sigma \delta Q - u \times \sigma \delta Q \cdot \sigma dQ,$$

od anche:

$$(8_1) \qquad \mathfrak{R}_w dQ\delta Q u = \mathfrak{R}_v dQ\delta Q u - \mathfrak{R}_v dQ\delta Q u \times N \cdot N + \\ + [\mathrm{H}(\sigma dQ, \sigma\delta Q) - \mathrm{H}(\sigma\delta Q, \sigma dQ)] u \text{ (1)}.$$

È chiaro che in questa formula si possono sostituire a dQ e δQ due vettori (tangenti alla W_{n-1} in Q) di moduli arbitrari.

Se nella (8′) si pone $u = d'Q$ e si moltiplica scalarmente per un altro differenziale $\delta' Q$ pure tangente alla W_{n-1} in Q, si ha:

$$(10) \qquad \mathfrak{R}_w dQ\delta Q d'Q \times \delta' Q = \mathfrak{R}_v dQ\delta Q d'Q \times \delta' Q + \\ + d'Q \times \sigma dQ \cdot \delta' Q \times \sigma\delta Q - d'Q \times \sigma\delta Q \cdot \delta' Q \times \sigma dQ;$$

se ora qui si introducono le coordinate dei punti delle varietà V_n e W_{n-1} si ottengono le cosidette *formule di Gauss generalizzate* (2).

Facendo invece il prodotto scalare della (8) per N si ottiene ovviamente una identità. Però, tenendo conto della relazione, facile da stabilire:

$$\mathfrak{R}_v dQ\delta Q u \times N = (\delta_v d_v u - d_v \delta_v u) \times N = \\ = - u \times (\delta_w d_v N - d_w \delta_v N),$$

---

(1) Introducendo l'omografia di 3° ordine ξ_3, definita dalla (8) del Cap. IV, è facile vedere che

$$\mathrm{H}(\sigma dQ, \sigma\delta Q) - \mathrm{H}(\sigma\delta Q, \sigma dQ) = \sigma\xi_3 dQ\delta Q \cdot \sigma = - \sigma \mathrm{K}(\sigma\xi_3) dQ\delta Q,$$

perciò si può dare alla (8_1) la forma semplicissima:

$$\mathfrak{R}_w = [1 - \mathrm{H}(N, N)]\mathfrak{R}_v - \sigma\mathrm{K}(\sigma\xi_3).$$

(2) Cfr. Bianchi. - *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª edizione, vol. II, parte II, pag. 452 (Zanichelli, Bologna).

Per il caso particolare in cui la varietà V_n sia euclidea, le formule corrispondenti si trovano pure in: Levi-Civita - *Calcolo differenziale assoluto*, pag. 272, form. (30) (Stock, Roma, a. 1925); in queste formule va però cambiato il segno al primo membro.

la (8) diventa:

$$\mathcal{R}_w dQ\delta Qu = \mathcal{R}_v dQ\delta Qu + u \times (\delta_w d_v N - d_w \delta_v N) \cdot N +$$
$$+ u \times d_v N \cdot \delta_v N - u \times \delta_v N \cdot d_v N,$$

da cui, moltiplicando scalarmente per N e ricordando la (4):

$$\mathcal{R}_v dQ\delta Qu \times N + u \times (\delta_w d_v N - d_w \delta_v N) = 0,$$

che può ancora scriversi, ricordando la (9):

$$(10') \qquad \mathcal{R}_v dQ\delta Qu \times N + u \times (\delta_w \sigma \cdot dQ - d_w \sigma \cdot \delta Q) = 0;$$

supponendo anche qui, come dianzi, $u = d'Q$, poi introducendo le coordinate si ricavano le cosidette *formule di Codazzi generalizzate* (1).

3. Relazioni fra curvature riemanniane.

Dalla (10) si può dedurre una notevole relazione fra le curvature riemanniane $\mathcal{K}_v$ e $\mathcal{K}_w$ delle varietà V_n e W_{n-1}, relative al punto Q e alla giacitura individuata da due spostamenti qualunque dQ e δQ, tangenti alla W_{n-1} in Q.

Ricordiamo perciò che, ad es., la curvatura $\mathcal{K}_v$ è espressa da [Cap. IV, form. (5)]:

$$(11) \qquad \mathcal{K}_v = \frac{\mathcal{R}_v dQ\delta Q dQ \times \delta Q}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2},$$

e analogamente per la curvatura $\mathcal{K}_w$, e allora dalla (10), supponendovi $d'Q = dQ$ e $\delta' Q = \delta Q$, avremo la relazione cercata:

$$(12) \qquad \mathcal{K}_w = \mathcal{K}_v + \frac{dQ \times \sigma dQ \cdot \delta Q \times \sigma \delta Q - (dQ \times \sigma \delta Q)^2}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2},$$

ed è chiaro che, nella frazione a secondo membro, è lecito sostituire a dQ e δQ due vettori, di modulo finito, aventi le stesse loro direzioni.

---

(1) Bianchi - *loc. cit.*, pag. 453.

Se, in particolare, supponiamo che i vettori dQ, δQ siano tangenti a due linee di curvatura della W_{n-1}, passanti per Q, allora essi sono direzioni unite ortogonali per la dilatazione σ (Cap. V, n. 6), perciò si può porre:

$$\sigma dQ = -m_1 dQ, \quad \sigma\delta Q = -m_2 \delta Q, \quad (dQ \times \delta Q = 0),$$

ove m_1, m_2 sono le due curvature principali della W_{n-1} in Q, nelle direzioni delle due linee di curvatura considerate. La (12) ci dà allora:

$$(13) \qquad \mathcal{K}_w = \mathcal{K}_v + m_1 m_2,$$

quindi si conclude il seguente

TEOREMA I. - *Il prodotto di due curvature principali di un' ipersuperficie è eguale alla differenza fra le curvature riemanniane (relative alla giacitura determinata dalle tangenti alle due linee di curvatura considerate) dell' ipersuperficie e della* V_n *in cui essa è immersa.*

È evidente che una relazione analoga alla (13) sussiste per ogni coppia di linee di curvatura della W_{n-1}, passanti per Q.

Supponiamo ora, invece, che la varietà V_n in cui è immersa la W_{n-1} abbia una curvatura riemanniana *costante* $\mathcal{K}_0$; allora sappiamo [Cap. IV, form. (10)] che per l' omografia di RIEMANN $\mathcal{R}_v$ si ha: $\mathcal{R}_v = \mathcal{K}_0 \xi_3$, da cui:

$$(14) \qquad \mathcal{R}_v dQ\delta Q = \mathcal{K}_0 \{ \mathrm{H}(dQ, \delta Q) - \mathrm{H}(\delta Q, dQ) \},$$

perciò $\mathcal{R}_v dQ\delta Q u \times N = 0$, e in tal caso la (8_1) porge:

$$(15) \quad \mathcal{R}_w dQ\delta Q = \mathcal{K}_0 \{ \mathrm{H}(dQ, \delta Q) - \mathrm{H}(\delta Q, dQ) \} + \mathrm{H}(\sigma dQ, \sigma\delta Q) - \\ - \mathrm{H}(\sigma\delta Q, \sigma dQ).$$

Come altro esempio, supponiamo $n = 3$, cioè consideriamo una superficie W_2 immersa in uno spazio curvo qualunque V_3 a 3 dimensioni; potremo allora considerare, in un punto Q, la curvatura totale k di GAUSS della W_2, nonchè le curvature riemanniane $\mathcal{K}_2$ e $\mathcal{K}_3$ della W_2 e dello spazio ambiente V_3, secondo la giacitura del piano tangente alla W_2 in quel punto. Allora si ha il seguente

TEOREMA II. - *La curvatura k di Gauss è data da*:

$$k = \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_3. \tag{16}$$

Infatti, la curvatura k è data dalla (2) del Cap. IV, e poichè $d_v \boldsymbol{N} = \sigma dQ$, si scorge che la frazione che figura nella (2) ora citata è identica a quella che figura nella (12), perciò ne segue senz'altro la (16).

4. Equazione di Weingarten.

Supponiamo che la varietà V_n abbia una curvatura riemanniana *costante* $\mathcal{K}_0$; allora per l'omografia di RIEMANN sussiste la (14), quindi se u è un vettore tangente alla V_n in Q, si ha dalla (7):

$$\delta_v d_v u - d_v \delta_v u = \mathcal{K}_0 (u \times dQ \cdot \delta Q - u \times \delta Q \cdot dQ). \tag{17}$$

Ciò posto, consideriamo *l'equazione di Weingarten*, colla funzione incognita U:

$$d_v \operatorname{grad}_v U + \mathcal{K}_0 U dQ = 0, \tag{18}$$

ove $\operatorname{grad}_v U$ è il gradiente superficiale di U (relativo alla varietà V_n) e dQ è uno spostamento infinitesimo qualunque di Q sulla V_n.

Sussistono allora le proprietà seguenti:

TEOREMA I. - *Essendo costante la curvatura $\mathcal{K}_0$, l'equazione differenziale* (18) *risulta illimitatamente integrabile.*

Infatti, prendendo il differenziale superficiale col simbolo δ_v, si ha dalla (18):

$$\delta_v d_v \operatorname{grad}_v U + \mathcal{K}_0 \delta U \cdot dQ + \mathcal{K}_0 U \delta_v dQ = 0,$$

da cui, scambiando d con δ:

$$d_v \delta_v \operatorname{grad}_v U + \mathcal{K}_0 dU \cdot \delta Q + \mathcal{K}_0 U d_v \delta Q = 0,$$

sottraendo dalla precedente e notando che $\delta_v dQ = d_v \delta Q$, risulta:

$$\delta_v d_v \operatorname{grad}_v U - d_v \delta_v \operatorname{grad}_v U + \mathcal{K}_0(\delta U \cdot dQ - dU \cdot \delta Q) = 0;$$

ora, questa eguaglianza è certo verificata, perchè coincide colla (17) ove vi si ponga $u = \operatorname{grad}_v U$ e si ricordi che $\operatorname{grad}_v U \times dQ = dU$.

Teorema II. - *Se U, V sono due integrali, distinti o no, della* (18) *si ha:*

$$\operatorname{grad}_v U \times \operatorname{grad}_v V + \mathcal{K}_0 U V = \text{costante}. \tag{19}$$

Infatti, dalla (18) moltiplicata scalarmente per $\operatorname{grad}_v V$, si ottiene:

$$\operatorname{grad}_v V \times d_v \operatorname{grad}_v U + \mathcal{K}_0 U dV = 0,$$

e scambiando U con V:

$$\operatorname{grad}_v U \times d_v \operatorname{grad}_v V + \mathcal{K}_0 V dU = 0,$$

e sommando colla precedente:

$$d(\operatorname{grad}_v U \times \operatorname{grad}_v V) + d(\mathcal{K}_0 U V) = 0,$$

da cui segue la (19).

In particolare, per $V = U$, la (19) porge:

$$(\operatorname{grad}_v U)^2 + \mathcal{K}_0 U^2 = C, \tag{20}$$

ove C è una costante arbitraria.

5. Ipersuperficie integrali dell'equazione di Weingarten.

Le ipersuperficie di V_n rappresentate da $U = \text{cost}$, ove U è un integrale dell'equazione (18) di Weingarten, godono delle seguenti proprietà:

Teorema I. - *Le ipersuperficie* $U = \text{cost}$ *sono geodeticamente parallele.*

Ciò risulta senz'altro dalla (20), che esprime che $(\operatorname{grad}_v U)^2$ è funzione della sola U, e da una proprietà nota (Cap. II, Teor. V).

TEOREMA II. - *Le ipersuperficie* $U=\text{cost}$ *hanno la curvatura riemanniana costante e maggiore di* $\mathcal{K}_0$.

Infatti, se $\boldsymbol{N}$ è il solito vettore unitario, normale a tali ipersuperficie in Q, si ha $\boldsymbol{N}=\operatorname{grad}_v U/\operatorname{mod}\operatorname{grad}_v U$, cioè per la (20):

$$\boldsymbol{N}=(\operatorname{grad}_v U)/\sqrt{C-\mathcal{K}_0 U^2},$$

e attribuendo al punto Q uno spostamento infinitesimo dQ sull'ipersuperficie considerata ne segue:

$$\boldsymbol{d_v}\,\boldsymbol{N}=(d_v \operatorname{grad}_v U)/\sqrt{C-\mathcal{K}_0 U^2},$$

cioè, per la (18):

$$\sigma dQ = d_v \boldsymbol{N} = -\frac{\mathcal{K}_0 U}{\sqrt{C-\mathcal{K}_0 U^2}}\, dQ,$$

sostituendo nella (12) si ha:

$$\mathcal{K}_w = \mathcal{K}_0 + \frac{\mathcal{K}_0^2 U^2}{C-\mathcal{K}_0 U^2} = \mathcal{K}_0 + \frac{\mathcal{K}_0^2 U^2}{(\operatorname{grad}_v U)^2},$$

che dimostra il teorema.

6. Ipersuperficie a curvatura costante in una V_n a curvatura costante.

Come altra applicazione delle formule precedenti, cerchiamo direttamente se in una V_n a curvatura riemanniana costante $\mathcal{K}_0$ sono contenute ipersuperficie W_{n-1} a curvatura riemanniana costante $\mathcal{K}_w$ non nulla.

Basta applicare la (13) e avremo:

$$\mathcal{K}_w - \mathcal{K}_0 = m_1 m_2; \tag{21}$$

ora, supposto $n>3$, esistono ancora altre linee di curvatura della W_{n-1} passanti per Q (perchè in tutto sono almeno $n-1$) e quindi esistono delle corrispondenti curvature principali; chiamando m_3 una di queste, sussisteranno le seguenti formule analoghe alla (21):

$$\mathcal{K}_w - \mathcal{K}_0 = m_1 m_3, \quad \mathcal{K}_w - \mathcal{K}_0 = m_2 m_3; \tag{21'}$$

dalle (21), (21′) risulta:

$$(22) \qquad \mathcal{K}_w - \mathcal{K}_0 = m_1^2 = m_2^2 = m_3^2,$$

perciò, in particolare, $\mathcal{K}_w > \mathcal{K}_0$.

Risulta ancora, dalla (22), e analoghe, che le curvature principali della W_{n-1} in Q sono tutte eguali, e chiamando $1/r$ questo valore costante comune, avremo dalla (29) del Cap. V:

$$(23) \qquad d_v N = -dQ/r,$$

da cui, integrando, $N = -(Q-O)/r$, ove O è un punto arbitrario; quadrando si ha: $(Q-O)^2 = r^2$, che rappresenta un'ipersfera di raggio r. Si conclude perciò il seguente

TEOREMA. - *In una varietà a curvatura riemanniana costante* $\mathcal{K}_0$, *a più di 3 dimensioni*, ***non esiste alcuna ipersuperficie*** *a curvatura riemanniana costante* ***e minore di*** $\mathcal{K}_0$; *e di ipersuperficie a curvatura riemanniana* ***costante*** $\mathcal{K}_w > \mathcal{K}_0$ ***esistono*** *soltanto le ipersfere di* ***raggio*** $1/\sqrt{\mathcal{K}_w - \mathcal{K}_0}$.

Si può ancora aggiungere che dalla (23) risulta che ogni direzione della W_{n-1} passante per Q è direzione principale, e quindi ogni linea della W_{n-1} è linea di curvatura, e allora il teorema precedente è in armonia col Teor. II, n. 6, del Cap. precedente.

È evidente che le ipersfere di raggio r, di uno spazio V_n a curvatura riemanniana costante hanno in ogni loro punto eguali fra loro, e alla costante $1/r$, le $n-1$ curvature principali.

Si può anzi dire che *non esistono altre ipersuperficie che abbiano eguali in ogni loro punto le* $n-1$ *curvature principali*. Cioè, in altre parole, se tali curvature sono fra loro eguali, devono necessariamente essere costanti e l'ipersuperficie è un'ipersfera.

Ciò risulta senz' altro dal già citato Teor. II, n. 6, del Cap. precedente.

7. Spazi curvi a tre dimensioni. Omografia di Ricci.

Esaminiamo ora, in modo speciale, il caso degli spazi curvi V_3 a *tre dimensioni*; l'omografia di RIEMANN $\mathfrak{R}$, che è di 3° ordine, può allora, molto utilmente, essere sostituita da un'omografia ordinaria, come ora faremo vedere.

Intanto osserviamo che, se a, b sono due vettori tangenti alla V_3, allora $\mathfrak{R}ab$ è un'omografia assiale ben determinata (Cap. III, n. 6), che trasforma vettori tangenti alla V_3 in Q in vettori pure tangenti alla V_3 in Q.

Ciò premesso, passiamo a dimostrare l'importante

Teorema. - *Esiste una dilatazione* μ, *funzione solo della* $\mathfrak{R}$, *tale che, qualunque siano i vettori* a, b *tangenti alla* V_3 *in* Q, *si ha:*

$$\mu(a \wedge b) = \mathrm{V}(\mathfrak{R}ab), \tag{24}$$

o, ciò che equivale:

$$[\mu(a \wedge b)] \wedge = \mathfrak{R}ab. \tag{25}$$

Infatti, l'omografia $\mathfrak{R}ab$ è funzione lineare ed alternata dei vettori a, b, perciò in virtù di un noto teorema funzionale (*Espaces*, pag. 12), si deduce che esiste un'unica omografia μ, funzione solo di $\mathfrak{R}$, tale da soddisfare alla (24).

Che poi la μ debba essere una dilatazione, risulta dal fatto che se c, d sono altri due vettori tangenti alla V_3 in Q, si ha dalla (25):

$$[\mu(a \wedge b)] \wedge c = \mathfrak{R}abc,$$

quindi, applicando la (24) del n. 6 del Cap. III, e poi ancora la (25), risulta:

$$\begin{aligned}[\mu(a \wedge b)] \wedge c \times d = \mathfrak{R}abc \times d = \mathfrak{R}cda \times b = \\ = [\mu(c \wedge d)] \wedge a \times b = \mu(c \wedge d) \times (a \wedge b);\end{aligned}$$

ma si ha d'altra parte:

$$[\mu(a \wedge b)] \wedge c \times d = [\mu(a \wedge b)] \times (c \wedge d) = [\mathrm{K}\mu(c \wedge d)] \times (a \wedge b),$$

perciò, confrontando colla precedente, si conclude $\mathrm{K}\mu = \mu$, cioè μ è una dilatazione.

La dilatazione μ riassume i noti simboli $\alpha^{(rs)}$ di Ricci, e perciò diremo che μ è l'omografia di Ricci.

8. Forma speciale dell'identità di Bianchi per le V_3.

Introducendo l'omografia di RICCI μ, l'identità di BIANCHI stabilita nel n. 7 del Cap. III, assume una forma più semplice, come ora mostreremo.

Per questo, cominciamo ad osservare che la (24) sussiste se al posto di $\boldsymbol{a}$ si pone $d_v \boldsymbol{a}$, oppure se al posto di $\boldsymbol{b}$ si pone $d_v \boldsymbol{b}$, perchè i vettori $d_v \boldsymbol{a}$, $d_v \boldsymbol{b}$ essendo differenziali superficiali (relativi alla V_3) di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, sono tangenti alla V_3 in Q; di qui si deduce tosto, prendendo il differenziale superficiale della (24) e ricordando la (15) del Cap. III, cioè $d_v \mathrm{V}\mu = \mathrm{V} d_v \mu$:

$$d_v \mu \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \mathrm{V}(d_v \mathfrak{R} \cdot \boldsymbol{ab}),$$

eguaglianza dello stesso tipo della (24). Si può porre $d_v \mu = \mu' dQ$, ove μ' è una determinata omografia di 2° ordine, funzione di Q (ma non di dQ), che si può chiamare ***derivata superficiale*** della μ, e analogamente, come abbiamo già fatto a proposito dell'identità di BIANCHI, si può sostituire $\mathfrak{R}' dQ$ al posto di $d_v \mathfrak{R}$, e allora la precedente porge:

$$\mu' dQ(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \mathrm{V}(\mathfrak{R}' dQ \boldsymbol{ab}),$$

ed è chiaro che si può pure scrivere:

$$\mu' \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \mathrm{V}(\mathfrak{R}' \boldsymbol{cab}), \tag{26}$$

ove $\boldsymbol{c}$ è un vettore qualunque, tangente alla V_3 in Q.

È ora assai facile stabilire il seguente

TEOREMA. - *L'identità di Bianchi equivale alla relazione:*

$$\mu' \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) + \mu' \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) + \mu' \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = 0. \tag{27}$$

Infatti dalla (26) risulta:

$$\begin{aligned} \mu' \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) + \mu' \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) + \mu' \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) &= \\ = \mathrm{V}(\mathfrak{R}' \boldsymbol{abc} + \mathfrak{R}' \boldsymbol{bca} + \mathfrak{R}' \boldsymbol{cab}),& \end{aligned}$$

ma il secondo membro è nullo in virtù dell'identità di BIANCHI, perciò ne segue la (27).

Viceversa, se sussiste la (27), la relazione precedente diviene:

$$(a) \qquad V(\mathfrak{R}'abc + \mathfrak{R}'bca + \mathfrak{R}'cab) = 0,$$

ma siccome l'omografia $\mathfrak{R}ab$ è assiale, è pure tale l'omografia $d\mathfrak{R}\cdot ab$, e quindi anche $\mathfrak{R}'cab$, perciò si deduce che nella (a) l'omografia chiusa entro parentesi è assiale, e allora dalla (a) stessa si conclude che tale omografia deve essere nulla, e così si ottiene l'identità di Bianchi; e con ciò il teorema è dimostrato.

9. Gradiente dell'omografia di Ricci. Relazione colla omografia di gravitazione.

Dalla forma (27) dell'identità di Bianchi si deduce facilmente il seguente

Teorema I. - *Il gradiente superficiale dell'omografia di Ricci è nullo.*

Infatti, supponiamo che nella (27) i vettori a, b, c, tangenti alla V_3 in Q, siano per di più unitari e a due a due ortogonali, e precisamente:

$$b \wedge c = a, \quad c \wedge a = b, \quad a \wedge b = c,$$

allora la (27) diventa:

$$\mu' aa + \mu' bb + \mu' cc = 0,$$

cioè, per la (30) del Cap. III: $\mathrm{grad}_v \mu = 0$; c. d. d.

Abbiamo definito, nel n. 10 del Cap. III, l'omografia di gravitazione θ per una varietà qualunque; nel caso particolare di spazi curvi a tre dimensioni, sussiste la notevole proprietà seguente, dovuta al Prof. Levi-Civita:

Teorema II. - *L'omografia di gravitazione* θ *coincide coll'omografia di Ricci* μ.

Infatti, dalla (28) del Cap. III si ha, in virtù della (25):

$$\psi a = \Sigma[\mu(a \wedge i_s)] \wedge i_s = -\Sigma i_s \wedge \mu(a \wedge i_s),$$

ove nella Σ, l'indice s assume i valori 1, 2, 3; in virtù di semplici proprietà delle omografie ordinarie, l'ultimo membro si può successivamente trasformare così:

$$-\Sigma\, \boldsymbol{i}_s \wedge (\mu \cdot \boldsymbol{a} \wedge) \boldsymbol{i}_s = -2\mathrm{V}(\mu \cdot \boldsymbol{a} \wedge) = -2\mathrm{V}(\boldsymbol{a} \wedge \mu) = -(\mathrm{I}_1 \mu - \mu)\boldsymbol{a}.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà del vettore $\boldsymbol{a}$:

$$\psi = \mu - \mathrm{I}_1 \mu, \quad \text{da cui:} \quad \mathrm{I}_1 \psi = \mathrm{I}_1 \mu - 3\mathrm{I}_1 \mu = -2\mathrm{I}_1 \mu,$$

e siccome l'omografia di gravitazione θ è definita da $\theta = \psi - \mathrm{I}_1 \psi / 2$, si conclude senz'altro $\theta = \mu$; c. d. d.

Ricordando poi la (35) del Cap. III, ritroviamo, senza alcun calcolo, che $\mathrm{grad}_v\, \mu = 0$.

10. Curvature riemanniane principali per le V_3.

Nel caso di uno spazio curvo V_3 a tre dimensioni è facile studiare la distribuzione delle curvature riemanniane intorno ad un punto Q qualsiasi di esso, e secondo le varie giaciture passanti per Q.

Si può in primo luogo osservare che una giacitura qualunque della V_3 è completamente determinata da un vettore unitario $\boldsymbol{u}$ normale ad essa, e mediante l'omografia di Ricci è possibile esprimere la curvatura riemanniana sotto una forma particolarmente semplice, come risulta dal seguente

Teorema I. - *La curvatura riemanniana della* V_3 *secondo la giacitura normale al vettore* $\boldsymbol{u}$ *è espressa da:*

$$\mathcal{K} = \boldsymbol{u} \times \mu \boldsymbol{u}. \tag{28}$$

Infatti, se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori non paralleli, tangenti alla V_3 in Q e situati sulla giacitura considerata, la curvatura riemanniana secondo tale giacitura è data dalla (7) del Cap. IV, che, tenuto conto della (25), può scriversi:

$$\mathcal{K} = \frac{\mu(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2} = \frac{\mu(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^2};$$

ora si può porre evidentemente: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = h\boldsymbol{u}$, ove h è un numero reale, e allora la relazione precedente fornisce la (28).

Come abbiamo dimostrato, l'omografia di Ricci μ è una dilatazione, perciò *essa ammette almeno 3 direzioni unite, a due a due ortogonali.*

Si può perciò porre:

$$\mu \boldsymbol{i}_r = \mathcal{K}_r \boldsymbol{i}_r, \quad (r = 1, 2, 3), \tag{29}$$

ove i vettori $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ formano un sistema unitario ortogonale, e le $\mathcal{K}_r$ indicano numeri reali determinati.

Le direzioni unite ora considerate si chiamano *direzioni riemanniane principali* della V_3 in Q, e le giaciture ad esse normali *giaciture principali* in Q. Le tre direzioni riemanniane principali formano un triedro trirettangolo che si chiama *triedro principale* della V_3 in Q.

I numeri $\mathcal{K}_r$ si chiamano poi *curvature riemanniane principali* della V_3 in Q, e la loro somma

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3, \tag{30}$$

dicesi *curvatura riemanniana media* della V_3 in Q. Essa gode della proprietà seguente:

Teorema II. - *La curvatura riemanniana media è eguale all'invariante primo dell'omografia di Ricci, cioè:*

$$\mathcal{M} = I_1 \mu. \tag{31}$$

Ciò è conseguenza immediata delle (29) e della espressione dell'invariante primo di un'omografia [Capitolo I, form. (10)].

Ponendo $u = (P - Q)/\text{mod}\,(P - Q)$, la (28) diviene:

$$\mathcal{K} = \frac{(P - Q) \times \mu(P - Q)}{(P - Q)^2}, \tag{32}$$

e questa formula permette di ottenere in altro modo le direzioni riemanniane principali, cercando precisamente le *direzioni* (*tangenti alla* V_3 *in* Q) secondo le quali la curvatura $\mathcal{K}$ è massima o minima.

Si ha infatti il seguente

TEOREMA III. - *Le direzioni secondo le quali la curvatura riemanniana è massima o minima sono le direzioni riemanniane principali, e questi valori massimi e minimi sono le curvature riemanniane principali della* V_3 *in* Q.

La dimostrazione è identica a quella del Teor. I, n. 5, del Cap. V.

TEOREMA IV. - *Se* ψ_1, ψ_2, ψ_3, *indicano gli angoli che il vettore* $P - Q$ (*tangente alla* V_3 *in* Q) *forma colle direzioni riemanniane principali della* V_3 *in* Q, *si ha:*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cos^2 \psi_1 + \mathcal{K}_2 \cos^2 \psi_2 + \mathcal{K}_3 \cos^2 \psi_3 . \tag{33}$$

La dimostrazione è la stessa di quella del Teor. II, n. 5, del Cap. V.

La (33) è del tutto analoga alla celebre formula d'EULERO relativa alla curvatura delle sezioni normali di una superficie dello spazio ordinario.

Così pure, la *quadrica indicatrice* della dilatazione μ, cioè la quadrica:

$$(P - Q) \times \mu(P - Q) = \pm 1,$$

è del tutto analoga all'indicatrice di DUPIN per le superficie ordinarie, e alla quadrica già incontrata nel n. 5 del Cap. V; essa permette di studiare la variazione della curvatura $\mathcal{K}$ al variare della giacitura intorno a Q.

Si chiama *linea principale* della V_3 ogni curva della V_3 tale che ciascuna delle sue tangenti sia una direzione riemanniana principale della V_3.

È chiaro che se il vettore unitario v è parallelo ad una direzione riemanniana principale, allora esso è una funzione determinata di Q e l'equazione differenziale delle linee principali risulta $v \wedge dQ = 0$.

Ad ognuna delle tre direzioni principali corrisponde una doppia infinità di linee principali che riempiono la varietà V_3 e formano una *congruenza*, chiamata *congruenza principale*. Esistono quindi tre congruenze principali, ed è chiaro che per ogni punto della V_3 passano tre linee, e cioè una per ciascuna congruenza, che ivi si tagliano ad angolo retto.

Ma, in generale, non è possibile ottenere colle linee delle tre congruenze principali un sistema triplo ortogonale di superficie, perchè, in generale, una congruenza principale non è una *congruenza normale,* cioè non ammette superficie che taglino ortogonalmente le curve di cui è formata.

Si capisce però che per particolari V_3 è possibile formare colle tre congruenze principali un sistema triplo ortogonale di superficie, e in tal caso si dice che la varietà V_3 è *normale.*

11. Teoremi di Souvoroff e Ricci per le V_3.

Supponiamo che la V_3 che si considera sia immersa in uno spazio V_4 a quattro dimensioni, avente una curvatura riemanniana *costante* $\mathcal{K}_0$, del quale spazio essa è un'ipersuperficie. Allora si può stabilire una relazione molto semplice e notevole fra l'omografia fondamentale σ relativa a tale ipersuperficie e l'omografia di Ricci; precisamente si ha il seguente

Teorema I. - *L'omografia σ della V_3 e l'omografia di Ricci sono legate dalla relazione:*

$$\mu = \mathcal{K}_0 + \mathrm{R}\sigma. \tag{34}$$

Infatti, applicando la (15), ove a dQ, δQ possiamo sostituire due vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ paralleli ad essi, e ricordando la (25), si ottiene:

$$(\alpha)\ [\mu(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})]\wedge = \mathcal{K}_0\{\mathrm{H}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{H}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\} + \{\mathrm{H}(\sigma\boldsymbol{a},\sigma\boldsymbol{b}) - \mathrm{H}(\sigma\boldsymbol{b},\sigma\boldsymbol{a})\};$$

ma da formule ben note sulle omografie ordinarie si ha:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{H}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{KH}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2\mathrm{VH}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\wedge = (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\ ,$$

e similmente l'ultimo termine della (α) vale

$$(\sigma\boldsymbol{a}\wedge\sigma\boldsymbol{b})\wedge,\quad \text{cioè}\quad [\mathrm{R}\sigma(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})]\wedge$$

in virtù della (59') del Cap. I; sostituendo nella (a) si deduce subito la (34).

Dalla (34) si deduce l'importante proprietà seguente, dovuta, per il caso $\mathcal{K}_0 = 0$, a SOUVOROFF e a RICCI.

TEOREMA II. - *Le tre direzioni riemanniane principali della* V_3 *in* Q *coincidono colle direzioni delle linee di curvatura della* V_3 *passanti per* Q *e le tre curvature riemanniane principali* $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ *sono legate alle curvature principali* m_1, m_2, m_3 *dalle formule:*

$$(35)\quad \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0 + m_2 m_3, \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_0 + m_3 m_1, \quad \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_0 + m_1 m_2 .$$

Infatti, le direzioni delle linee di curvatura della V_3 in Q sono quelle delle direzioni unite della dilatazione σ (Cap. V, n. 5) e se diciamo $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ tre vettori unitari paralleli a tali direzioni (e quindi a due a due ortogonali) si ha ad es:

$$\sigma \boldsymbol{i}_2 = - m_2 \boldsymbol{i}_2, \quad \sigma \boldsymbol{i}_3 = - m_3 \boldsymbol{i}_3,$$

da cui:

$$\mathrm{R}\sigma(\boldsymbol{i}_2 \wedge \boldsymbol{i}_3) = (\sigma \boldsymbol{i}_2) \wedge \sigma \boldsymbol{i}_3 = m_2 m_3 \boldsymbol{i}_2 \wedge \boldsymbol{i}_3 = m_2 m_3 \boldsymbol{i}_1,$$

quindi $\mathrm{R}\sigma \boldsymbol{i}_1 = m_2 m_3 \boldsymbol{i}_1$; dopo ciò la (34) porge

$$\mu \boldsymbol{i}_1 = (\mathcal{K}_0 + m_2 m_3) \boldsymbol{i}_1, \quad \text{e due analoghe;}$$

queste relazioni mostrano che le direzioni unite $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ di σ sono pure direzioni unite per la dilatazione μ, cioè sono direzioni riemanniane principali della V_3 in Q; e confrontandole poi con le (29) si ottengono le (35).

Dalle (35) risulta ovviamente:

$$(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_0)(\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_0)(\mathcal{K}_3 - \mathcal{K}_0) = m_1^2 m_2^2 m_3^2 \geq 0,$$

perciò ne segue, in particolare, il

TEOREMA III. - *In uno spazio curvo a quattro dimensioni, di curvatura riemanniana costante* $\mathcal{K}_0$, *non esiste alcuno spazio a tre dimensioni di curvatura costante minore della curvatura* $\mathcal{K}_0$ *dello spazio ambiente.*

Così, ad es., lo spazio euclideo S_4 (per il quale $\mathcal{K}_0 = 0$) non contiene alcuno spazio pseudosferico a tre dimensioni, e quindi a curvatura riemanniana costante negativa (Cap. IV, n. 11). Analogamente, non esistono nell'S_4 euclideo spazi subordinati V_3 a tre dimensioni le cui curvature riemanniane principali siano tutte tre negative, ovvero due positive ed una negativa.

Capitolo VII.

Applicazioni.

1. Parallelismo di Levi-Civita.

Sia V_n una varietà ad n dimensioni, e diciamo C una curva della V_n, descritta dal punto variabile Q.

Indichiamo poi con u un vettore unitario, tangente alla V_n in Q e funzione di Q; allora per ogni punto Q della C risulta determinato il vettore unitario u. Se al punto Q si dà uno spostamento infinitesimo arbitrario dQ lungo la curva C, il vettore u subirà un certo incremento du, che sarà un vettore non più tangente, in generale, alla V_n; consideriamo allora la proiezione di questo vettore sulla V_n, cioè il differenziale superficiale $d_v u$; se avviene che

$$d_v u = 0, \tag{1}$$

si dice, con Levi-Civita [1], che il vettore u si è *spostato per parallelismo lungo la curva* C, che si chiama *curva di trasporto*.

Se sussiste la (1) vuol dire che il vettore du è *normale* alla V_n in Q, perciò, qualunque sia lo spostamento δQ di Q sulla V_n, si ha:

$$\delta Q \times du = 0. \tag{2}$$

Se si indica con u^* il vettore u corrispondente al

---

[1] Levi-Civita: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ecc.* (« Rendiconti Circolo matematico di Palermo », a. 1917); oppure: *Calcolo differenziale assoluto*, già citato.

punto $Q + dQ$, è chiaro che

(3) $$u^* = u + du;$$

indicando con $d_n u$ la componente normale alla V_n di du, si può scrivere:

(3') $$u^* = u + d_n u + d_v u,$$

e questa formula dà ciò che si potrebbe chiamare ***spostamento effettivo*** del vettore u lungo C.

Diremo invece che il vettore

(4) $$u_v = u + d_n u$$

dà il ***trasformato per parallelismo*** del vettore u lungo C.

Se è verificata la (1) allora le espressioni (3'), (4) coincidono, cioè lo spostamento per parallelismo coincide collo spostamento effettivo; in ogni altro caso i due spostamenti sono diversi.

Dalle (3'), (4) risulta ancora:

(5) $$u_v = u^* - d_v u.$$

Poichè u è unitario, cioè $u^2 = 1$, si ha $u \times du = 0$, quindi, limitandoci agli infinitesimi di 1° ordine, si ha dalla (3): $u^{*2} = 1$; similmente, essendo $u \times d_n u = 0$, si deduce dalla (4): $u_v{}^2 = 1$.

Ritornando alla condizione (1), si può domandare se ***esistono effettivamente dei vettori u tali da soddisfare alla*** (1). La risposta è affermativa, e per vedere questo stabiliamo intanto il seguente

Teorema I. - *Se un vettore u soddisfa alla* (1), *si ha necessariamente:*

(6) $$u^2 = \text{costante}.$$

Infatti, dalla (1) si ha: $u \times d_v u = 0$, cioè $d_v u^2 = 0$, ossia $du^2 = 0$, da cui segue la (6).

Ciò premesso, osserviamo che lungo la C il punto Q si può riguardare come funzione di una variabile numerica t

(ad es. l'arco), e quindi anche il vettore u risulta funzione di t, e la (1) risulta un'equazione differenziale (vettoriale) rispetto alla variabile t.

Ciò premesso, assegniamo ad arbitrio, in un punto iniziale Q_0 della C, il valore iniziale u_0 del vettore u, che dovrà soddisfare alla (6), nella quale la costante può supporsi eguale ad 1; poi integriamo la (1) colla condizione che inizialmente l'integrale $u(t)$ coincida con u_0. Essendo la (1) lineare rispetto ad u, si sa dalla teoria generale delle equazioni differenziali, che tale integrale è univocamente determinato e si mantiene regolare lungo tutta la curva C, soddisfacendo sempre alla (6). Perciò si ha il

Teorema II. - *Se in un punto iniziale Q_0 della curva* C *si assegna un vettore unitario u_0 (tangente alla* V_n*), la* (1) *verrà a determinare univocamente in ogni punto Q della curva* C *un vettore u (tangente alla* V_n*).*

In tal caso il vettore u_0 viene trasportato per parallelismo lungo la curva di trasporto C.

A giustificazione del nome di parallelismo adottato da Levi-Civita, esaminiamo il caso particolare che la varietà V_n sia *euclidea*. In tal caso i differenziali superficiali coincidono cogli ordinari, e la (1) diviene $du = 0$, onde $u =$ costante, in tutta la V_n; perciò qualunque vettore trasportato lungo un cammino *arbitrario* C, secondo la legge (1), rimane sempre parallelo a se stesso nel senso ordinario.

Si può dimostrare che *soltanto* nel caso di varietà euclidee la curva di trasporto non ha influenza sul trasporto per parallelismo, e la direzione finale del vettore trasportato dipende solo dalla direzione iniziale.

E infatti, affinchè ciò si verifichi, occorre che la (1) riguardata come equazione in Q sia completamente integrabile; e allora dalla (20) del Cap. III si trae che l'omografia di Riemann $\mathfrak{R}$ deve essere nulla e quindi lo spazio è euclideo.

Perciò in ogni spazio curvo il parallelismo di Levi-Civita è essenzialmente vincolato alla curva di trasporto, e il

Bianchi appunto lo chiama *parallelismo vincolato* nel senso di Levi-Civita.

2. Proprietà fondamentali del parallelismo.

Teorema I. - *Se i vettori unitari u, v (tangenti alla V_n in Q) si spostano per parallelismo lungo la curva C, il loro angolo si mantiene costante.*

Infatti, si ha, in virtù della (1):

$$d_v(u \times v) = u \times d_v v + v \times d_v u = 0,$$

perciò $d(u \times v) = 0$, ossia $u \times v =$ costante, quindi l'angolo di u con v è costante.

Teorema II. - *Se un vettore si sposta mantenendosi rigidamente collegato con altri vettori che si spostano per parallelismo lungo la curva C, allora si sposta esso pure per parallelismo lungo C.*

Infatti, sia w un vettore unitario, tangente alla V_n in Q, che sia rigidamente collegato coi vettori unitari u_1, u_2...., che si spostano per parallelismo lungo C. Si può porre:

$$w = m_1 u_1 + m_2 u_2 + ...,$$

ove m_1, m_2...., sono convenienti numeri reali, *costanti*, perchè nello spostamento per parallelismo l'angolo di due qualunque dei vettori unitari u_r è costante per il Teor. I. Prendendo il differenziale superficiale e ricordando la (1), si ha $d_v w = 0$, che dimostra il teorema.

Si può enunciare il teorema anche sotto la forma: *La stella di direzioni uscenti da Q (e tangenti alla V_n) viene trasportata per parallelismo, lungo la curva C, rigidamente.*

Teorema III. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la direzione della tangente ad una curva C della V_n si sposti per parallelismo lungo C è che questa curva sia una geodetica della V_n.*

Infatti, se la curva C è una geodetica, si ha [Cap. II, form. (20)] $d_v t = 0$, perciò la (1) è verificata dal vettore t; e viceversa.

TEOREMA IV. - *Se un vettore si sposta per parallelismo lungo una geodetica, l'angolo che esso forma colla geodetica rimane costante.*

Questa proprietà è una conseguenza immediata dei teoremi precedenti.

Ricerchiamo ora come varia l'angolo ψ d'inclinazione sulla curva C di trasporto, di un vettore u (unitario, tangente alla V_n in Q) che si trasporta per parallelismo lungo C. Si ha il seguente

TEOREMA V. - *Se ψ, χ sono gli angoli che il vettore u forma colla curva C e colla normale principale relativa a V_n della curva C, si ha:*

$$d \cos \psi = c_r \cdot \cos \chi \cdot ds, \tag{7}$$

ove c_r è la curvatura geodetica relativa a V_n della curva C in Q.

Infatti, si ha $\cos \psi = u \times t$, da cui, prendendo il differenziale superficiale:

$$d \cos \psi = d_v u \times t + u \times d_v t;$$

di qui, per la (1) e la (7) del Cap. V, segue $d \cos \psi = c_r u \times n_r ds$, che non differisce dalla (7).

Se, in particolare, la curva C è una geodetica della V_n, si ha $c_r = 0$, e quindi $\psi = \text{cost}$, e così ritroviamo il teorema IV.

Se nella V_n si considera una varietà subordinata V_m ad m dimensioni, con $1 < m < n$, e si prende sulla V_m una curva C, allora si ha:

TEOREMA VI. - *Se i vettori u lungo la curva C sono già paralleli, nel senso di Levi-Civita, rispetto allo spazio ambiente V_n, sono anche paralleli rispetto alla varietà subordinata V_m.*

E infatti, se i vettori u sono paralleli rispetto allo spazio ambiente V_n, il vettore du è normale alla V_n in Q, perciò è pure normale alla V_m.

3. Vettori associati di Bianchi.

Sia, al solito, u un vettore unitario, tangente alla V_n in Q; se esso non si sposta per parallelismo lungo la curva C, allora il vettore $d_v u$ non è nullo, e la sua direzione è chiamata dal BIANCHI [1] *direzione associata* di quella del vettore u lungo la curva C. Se si considera un vettore unitario v parallelo a $d_v u$, esso si chiama *vettore associato* di u lungo C.

Dal Teorema I del n. 1 risulta che *i vettori associati u, v sono fra loro perpendicolari.*

Il numero reale c tale che

$$cv\,ds = d_v u, \tag{8}$$

ove ds è l'elemento d'arco di C, si chiama *curvatura associata* della C rispetto al vettore u; se il vettore u si sposta per parallelismo, si ha $d_v u = 0$, quindi $c = 0$ e il vettore v associato di u risulta indeterminato.

Per la curvatura associata c si può assegnare una espressione notevole, introducendo l'angolo infinitesimo $d\omega$ compreso fra la direzione del vettore u^* relativo ad un punto qualunque $Q + dQ$ della curva C e la parallela u_v, nel senso di LEVI-CIVITA, alla direzione del vettore u relativo al punto Q di C infinitamente vicino al primo.

Precisamente, si ha il seguente

TEOREMA. - *Il valore assoluto della curvatura associata è espresso da:*

$$\operatorname{mod} c = d\omega / ds. \tag{9}$$

Infatti, considerando il vettore u relativo al punto Q di C, il vettore stesso relativo al punto infinitamente vicino $Q + dQ$ della C è il vettore u^* dato dalla (3'), mentre il vettore u_v parallelo, secondo LEVI-CIVITA, al vettore u, è quello espresso dalla (4); ora se costruiamo i punti

$$A = O + u^*, \quad B = O + u_v,$$

---

[1] BIANCHI: *Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita*, ecc. (« Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli »; vol. XXVIII, a. 1922). Oppure: BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, già citate, vol. II, pag. 799.

ove O è un punto arbitrario, e si considera il triangolo OAB, nel quale, per proprietà stabilite nel n. 1, si ha $OA = OB = 1$, l'angolo AOB vale $d\omega$, che può pure ritenersi eguale al segmento AB, cioè a $\mathrm{mod}\,(u^* - u_v)$; applicando la (5) si trae allora $d\omega = \mathrm{mod}\, d_v u$, e infine ricordando la (8) si conclude subito la (9).

Se, in particolare, come vettore u si prende il vettore unitario t tangente alla curva C in Q (non geodetica), allora, dalla (7) del Cap. V, risulta che v è diretto secondo la normale principale relativa a V_n della curva C, e c diventa la curvatura geodetica relativa a V_n della curva C.

Il teorema precedente fornisce allora, in particolare, una proprietà stabilita da LIPKA, per la curvatura geodetica relativa [1].

4. Congruenze geodetiche e normali.

Consideriamo una varietà V_n ad n dimensioni, e supponiamo che in ogni punto Q di essa sia fissata una direzione, determinata mediante un vettore unitario u (tangente alla V_n in Q).

Consideriamo poi quelle curve della V_n che sono in ogni loro punto tangenti alla direzione prefissata di u; esse sono definite dall'equazione differenziale:

$$dQ = u\,ds, \tag{10}$$

ove ds è un fattore infinitesimo di proporzionalità. Per ogni punto della V_n (o di una sua regione conveniente) passa una ed una sola, di tali curve.

Un tale sistema di curve si dice *congruenza di curve.*

---

(1) LIPKA: *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque.* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXXI, 1° sem. 1922). È opportuno notare che in questo articolo la dimostrazione della proprietà accennata richiede, coi metodi ordinari, ben *tre pagine,* piene di calcoli lunghi e complicati, mentre coi metodi del testo bastano poche righe di dimostrazione!

Se tutte le linee della congruenza sono geodetiche, si dice che esse formano una ***congruenza geodetica***; tali sono, ad es., le congruenze di rette dello spazio ordinario.

Per le congruenze geodetiche si ha il seguente

TEOREMA. - *Affinchè la congruenza* (10) *sia geodetica bisogna che il vettore u verifichi la condizione*

$$d_v u = 0. \tag{11}$$

Infatti, osserviamo che dalla (10) si ha: $ds = \mathrm{mod}\, dQ$, quindi si può considerare ds come elemento d'arco di una delle curve della congruenza, e allora si ha $dQ/ds = u$; ma per le geodetiche di V_n si ha [Cap. II, form. (20)] $d_v t = 0$, perciò ne segue la (11).

Un'altra particolarità notevole che può presentare una congruenza di curve è quella di essere *normale*, cioè di essere costituita dalle traiettorie ortogonali di una famiglia di ipersuperficie della V_n.

A questo proposito è utile osservare che, data una famiglia di ipersuperficie, esiste sempre una congruenza di curve che tagliano ad angolo retto tutte le ipersuperficie della famiglia, e che si chiamano ***traiettorie ortogonali*** di quelle ipersuperficie, mentre invece non sempre esiste una famiglia di ipersuperficie che taglino ad angolo retto tutte le curve di una congruenza.

E infatti, sia

$$f(Q) = \mathrm{cost}$$

l'equazione di una generica famiglia di ipersuperficie della V_n; allora se si prende in considerazione quella che passa per un punto regolare prefissato Q, sappiamo (Cap. II, n. 4) che in tale punto il vettore $\mathrm{grad}_v f$ è normale all'ipersuperficie considerata, e perciò il vettore unitario

$$u = \mathrm{grad}_v f / \mathrm{mod}\, \mathrm{grad}_v f \tag{12}$$

determina un'unica direzione normale all'ipersuperficie stessa; dopo di che la (10) dà la congruenza di linee che tagliano ortogonalmente le ipersuperficie della famiglia considerata.

Viceversa, data *a priori* una congruenza di linee per mezzo del vettore u, funzione di Q, affinchè le linee della congruenza si possano riguardare come traiettorie ortogonali di una famiglia di ipersuperficie $f(Q) = \text{cost}$, occorre che il gradiente superficiale della funzione $f(Q)$, *a priori* incognita, verifichi l'equazione $\text{grad}_v f = hu$, analoga alla (12), ove h è un fattore di proporzionalità non nullo, ma *a priori* indeterminato. Una tale funzione $f(Q)$ non sempre esiste; ad es., nel caso dello spazio ordinario, affinchè la f esista è necessario e sufficiente, com'è ben noto, (Vol. I di questa Collezione, pag. 251) che il vettore u verifichi la condizione $u \times \text{rot}\, u = 0$.

5. Ennuple di congruenze ortogonali.

Consideriamo, in una V_n generica, n congruenze di curve; in ogni punto Q di essa saranno allora dati n vettori unitari, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tangenti alla V_n in Q.

Supponiamo inoltre che questi vettori siano a due a due *ortogonali*, cioè:

$$(13) \qquad u_h \times u_k = 0, \quad \text{per} \quad h \neq k, \quad \text{ed} \quad u_h^2 = 1,$$

e allora avremo nella V_n una *ennupla di congruenze ortogonali.*

Un vettore qualunque v, tangente alla V_n in Q, è pienamente determinato dalle sue proiezioni ortogonali c_h sui vettori u_h, e si ha precisamente:

$$v = \Sigma_h c_h u_h, \quad \text{ove} \quad c_h = v \times u_h.$$

Se, in particolare, il vettore v è il gradiente superficiale di una funzione numerica $f(Q)$, cioè $v = \text{grad}_v f$, allora i coefficienti c_h non sono altro che le *derivate di f nelle direzioni della congruenza.* E infatti, chiamando s_h la lunghezza dell'arco della linea della congruenza tangente al vettore u_h in Q, contato da un'origine arbitraria, allora, dando al punto Q uno spostamento dQ lungo tale linea, si ha per l'incremento corrispondente di f:

$$(14) \qquad df = \text{grad}_v f \times dQ;$$

dividendo per ds_h, il primo membro ci dà, per definizione, la derivata $\partial f/\partial s_h$ di f nella direzione di u_h; perciò:

$$\frac{\partial f}{\partial s_h} = \mathrm{grad}_v f \times u_h , \tag{15}$$

che dimostra quanto abbiamo affermato.

Dalla (15) segue poi ovviamente:

$$\mathrm{grad}_v f = \sum\nolimits_h \frac{\partial f}{\partial s_h} u_h . \tag{16}$$

6. Coefficienti di rotazione di Ricci.

Nelle sue ricerche sugli spazi curvi, il Ricci si è servito spesso di certe quantità γ_{hkl}, con 3 indici, da lui chiamate *coefficienti di rotazione*; la loro espressione analitica, coi metodi comuni, è piuttosto complicata [1], e di non facile interpretazione geometrica.

Invece, essi sono suscettibili della seguente semplicissima definizione geometrica:

$$\gamma_{hkl} = \frac{\partial u_h}{\partial s_l} \times u_k , \tag{17}$$

dalla quale discendono subito tutte le loro proprietà.

Così, ad es., si ha la *relazione di emisimmetria* [2]:

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0, \quad (h,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots.,\ n). \tag{18}$$

Infatti, derivando le (13) nella direzione di u_l si ha:

$$\frac{\partial u_h}{\partial s_l} \times u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s_l} \times u_h = 0, \tag{18'}$$

la quale, in virtù della (17), equivale alle (18).

---

[1] Cfr. ad es. Levi-Civita, *Calcolo differenziale assoluto*, già citato, pag. 287.

[2] Levi-Civita: *Opera citata*, pag. 288.

Dalla (17) risulta che si può scrivere:

$$(19) \qquad \partial u_h/\partial s_l = \Sigma_k \gamma_{hkl} u_k + U,$$

ove U è un vettore normale alla V_n in Q.

Se si pone:

$$(20) \qquad \partial_v u_h/\partial s_l = \Sigma_k \gamma_{hkl} u_k,$$

è chiaro che il vettore $\partial_v u_h/\partial s_l$ non è altro che la proiezione ortogonale del vettore $\partial u_h/\partial s_l$ sullo spazio euclideo S_n tangente alla V_n in Q [1], cioè è la *componente tangenziale* di quest'ultimo vettore, ed è anche eguale al differenziale superficiale $d_v u_h$, corrispondente ad uno spostamento dQ lungo la linea della congruenza avente per tangente in Q il vettore u_l diviso per ds_l.

Risulta poi ovviamente:

$$(17') \quad \gamma_{hkl} = \frac{\partial_v u_h}{\partial s_l} \times u_k, \quad \gamma_{hkl} ds_l = d_v u_h \times u_k = du_h \times u_k.$$

Se $f(Q)$ è una funzione numerica di Q, e si considerano le due derivate seconde

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}, \quad \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k},$$

esse non sono, in generale, eguali come avviene negli spazi euclidei, ma si ha invece:

$$(21) \qquad \frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k} = \sum_l \frac{\partial f}{\partial s_l}(\gamma_{hlk} - \gamma_{klh}) \ [2].$$

Infatti, dalla (15), si ha:

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v f}{\partial s_k} \times u_h + \operatorname{grad}_v f \times \frac{\partial_v u_h}{\partial s_k},$$

---

[1] Più precisamente, essendo per la (18), $\gamma_{hhl} = 0$, si tratta della proiezione sullo spazio euclideo, ad $n-1$ dimensioni, determinato dai vettori $u_1, u_2, \ldots, u_{h-1}, u_{h+1}, \ldots, u_n$.

[2] Levi-Civita. *Op. cit.*, pag. 290.

od ancora, per la (16):

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}=\frac{d_v \operatorname{grad}_v f}{dQ}\, u_k \times u_h + \sum_l \frac{\partial f}{\partial s_l}\, u_l \times \frac{\partial_v u_h}{\partial s_k};$$

ora è facile vedere che l' omografia $d_v \operatorname{grad}_v f/dQ$ è una dilatazione, perciò il primo termine del 2° membro non si altera scambiando h con k, e allora la precedente relazione ci dà:

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}-\frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k}=\sum_l \frac{\partial f}{\partial s_l}\left(u_l \times \frac{\partial_v u_h}{\partial s_k} - u_l \times \frac{\partial_v u_k}{\partial s_h}\right),$$

la quale, in virtù della (17′), coincide colla (21).

7. Caso in cui una delle congruenze dell'ennupla è geodetica.

Supponiamo che una delle congruenze dell'ennupla sia *geodetica* (n. 4); si può evidentemente sempre supporre che questa sia la congruenza Γ_n determinata dal vettore u_n.

In tal caso questo vettore deve soddisfare alla condizione:

$$(22)\quad d_v u_n = 0, \qquad \text{da cui} \quad \frac{\partial_v u_n}{\partial s_n} \times u_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

queste due condizioni sono equivalenti, come si scorge subito. In virtù della (17′) si può scrivere: $\gamma_{nkn} = 0$.

In particolare, se lo spazio è euclideo, le (22) caratterizzano le *congruenze rettilinee.*

8. Curvatura geodetica di una delle congruenze dell'ennupla.

Tornando al caso che la congruenza Γ_n sia una congruenza generica, è facile trovare un notevole significato geometrico per i coefficienti γ_{nkn}.

Osserviamo infatti che dalla (7) del Cap. V, si ha:

$$d_v u_n = c_r \boldsymbol{n}_r ds_n,$$

ove c_r è la curvatura geodetica relativa alla V_n, della curva considerata della congruenza. Di qui, e dalla (20) risulta:

$$\gamma_{nkn} = c_r n_r \times u_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

la quale mostra che i coefficienti $\gamma_{n1n}, \gamma_{n2n}, \ldots$ sono le proiezioni sulle linee dell'ennupla del vettore $c_r n_r$, diretto secondo la normale principale relativa alla V_n di una curva della Γ_n e avente lunghezza eguale alla curvatura geodetica relativa.

9. Caso in cui una delle congruenze dell'ennupla è normale.

Supponiamo che la congruenza Γ_n sia normale. Allora deve esistere (n. 4) una funzione $f(Q)$ tale che:

$$u_n = h \operatorname{grad}_v f \tag{23}$$

ove h è un fattore numerico (funzione di Q). Avremo poi dalle (13):

$$\operatorname{grad}_v f \times u_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

che sono $n-1$ equazioni differenziali alle quali deve soddisfare la funzione $f(Q)$.

Prendendo la derivata della precedente nella direzione del vettore u_k, si ha:

$$\frac{\partial \operatorname{grad}_v f}{\partial s_k} \times u_i + \operatorname{grad}_v f \times \frac{\partial u_i}{\partial s_k} = 0,$$

cioè:

$$\frac{d \operatorname{grad}_v f}{dQ} u_k \times u_i + \operatorname{grad}_v f \times \frac{\partial u_i}{\partial s_k} = 0 .$$

Ora il primo termine non muta scambiando i con k, perchè l'omografia $d \operatorname{grad}_v f / dQ$ è una dilatazione, perciò si conclude:

$$\operatorname{grad}_v f \times \frac{\partial u_i}{\partial s_k} = \operatorname{grad}_v f \times \frac{\partial u_k}{\partial s_i}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ma qui, in virtù della (23), possiamo sostituire a $\operatorname{grad}_v f$

addirittura u_n, e allora ricordando la (18′) si ha:

$$\frac{\partial u_n}{\partial s_k} \times u_i = \frac{\partial u_n}{\partial s_i} \times u_k, \tag{23′}$$

od anche, in virtù della (17),

$$\gamma_{nik} = \gamma_{nki}.$$

Queste relazioni danno quindi le condizioni affinchè la congruenza Γ_n sia normale.

Se poi *tutte* le congruenze dell'ennupla sono normali (normalità completa), si deduce molto facilmente, da quanto precede, che *tutti i coefficienti* γ *con tre indici distinti devono essere nulli.*

10. Sistema canonico rispetto ad una congruenza data. Alcune volte avviene che fra i dati del problema che si studia figura direttamente, o è ad essi strettamente legata, una congruenza di curve. In tali casi è spesso utile associare alla data congruenza altre $n-1$ congruenze di curve, ortogonali fra loro e alla data, in guisa da poter considerare la congruenza data come la n^{esima} di una ennupla di congruenze ortogonali.

È chiaro che la scelta delle $n-1$ congruenze ausiliarie della ennupla considerata, è *a priori* arbitraria; ma giova sfruttare tale arbitrarietà per introdurre qualche semplificazione. Così, ad es., ora faremo vedere che, *data una congruenza* Γ_n *qualunque di curve, esiste sempre almeno un sistema di* $n-1$ *congruenze ortogonali fra loro e alla data, in modo che siano verificate le relazioni:*

$$\gamma_{nkl} + \gamma_{nlk} = 0, \qquad (k \neq l;\ k, l = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{24}$$

cioè, per le (17′),

$$\frac{\partial_v u_n}{\partial s_l} \times u_k + \frac{\partial_v u_n}{\partial s_k} \times u_l = 0. \tag{24′}$$

Infatti, la (24′) può scriversi:

$$\frac{d_v u_n}{dQ} u_l \times u_k + \frac{d_v u_n}{dQ} u_k \times u_l = 0,$$

cioè:

$$\left(\frac{d_v u_n}{dQ} + \mathrm{K}\frac{d_v u_n}{dQ}\right) u_l \times u_k = 0;$$

ora, il vettore $d_v u_n$ (che è normale ad u_n) appartiene all'S_{n-1} euclideo determinato dai vettori $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, perciò si può porre $d_v u_n = \alpha dQ$, ove α è una omografia che trasforma vettori dell'S_{n-1} in vettori dello stesso S_{n-1}.

Potremo dunque scrivere la precedente così:

$$(\alpha + \mathrm{K}\alpha)\, u_l \times u_k = 0;$$

dove l'omografia $\alpha + \mathrm{K}\alpha$ è ovviamente una dilatazione; talchè, operando in uno spazio ad $n-1$ dimensioni, essa ammette sempre, come sappiamo, almeno un sistema di $n-1$ direzioni unite a due a due ortogonali fra loro; orbene scegliendo i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ paralleli a tali direzioni, la relazione precedente risulta evidentemente verificata, il che prova il teorema.

Il sistema di $n-1$ congruenze soddisfacente alle (24) si chiama *sistema canonico* rispetto alla congruenza data, e le direzioni unite della dilatazione $\alpha + \mathrm{K}\alpha$ si chiamano *direzioni canoniche.*

11. Congruenze di rette nello spazio euclideo. Significato geometrico del sistema canonico.

Fra le congruenze hanno speciale importanza le congruenze di rette degli spazi euclidei, che sono anche, come ben si comprende, le più facili da studiare; nello spazio ordinario esse si presentano poi in modo del tutto naturale in varie questioni di *ottica geometrica*, giacchè i *raggi* di un fascio di luce, in un mezzo omogeneo, formano appunto una congruenza rettilinea.

Ora stabiliremo una notevole proprietà di tali congruenze, la quale ci condurrà ad una interpretazione geometrica assai semplice del sistema canonico di congruenze.

Sia r un raggio generico della congruenza appartenente allo spazio *euclideo* S_n; potremo individuarlo mediante un suo punto qualunque Q ed un vettore unitario u_n parallelo al raggio.

Diciamo poi Σ l'iperpiano di S_n normale in Q al raggio r, e sia dQ uno spostamento infinitesimo qualunque del punto Q sull'iperpiano; allora per il punto $Q_1 = Q + dQ$ di Σ passerà un certo raggio r_1 della congruenza, che, in generale, non incontrerà il raggio r.

Se però avviene che per un particolare spostamento dQ sopra Σ, il raggio r_1 incontra r (in un punto proprio o all'infinito), cioè, più precisamente, la minima distanza fra r ed r_1 è un infinitesimo d'ordine superiore rispetto alla distanza QQ_1, allora si dice che la direzione QQ_1 è una *direzione focale* della congruenza.

Si può stabilire facilmente che *esistono, in generale, al più $n-1$ direzioni focali (reali).*

Infatti, se QQ_1 è una direzione focale, e diciamo M il punto d'intersezione dei raggi r ed r_1, si può porre:

$$Q - M = xu_n,$$

ove x è quantità reale. Facciamo intanto vedere che $dx = 0$; basta osservare che:

$$dQ = Q_1 - Q = (Q_1 - M) - (Q - M) = d_v(xu_n),$$

perciò:

$$dQ = dx \cdot u_n + x d_v u_n,$$

moltiplicando scalarmente per u_n, ed osservando che essendo u_n unitario si ha: $u_n \times d_v u_n = 0$, risulta senz'altro: $dx = 0$.

Ne segue: $dQ = x d_v u_n$, od anche:

$$(a) \qquad d_v u_n = y dQ, \qquad (y = 1/x).$$

Poichè il vettore $d_v u_n$ giace sopra Σ, si può porre, qualunque sia lo spostamento dQ su Σ:

$$d_v u_n = \alpha dQ,$$

ove α è un'omografia che trasforma vettori di Σ in vettori pure di Σ, e avremo dalla (a):

$$\alpha dQ = y dQ;$$

vediamo così che *le direzioni focali non sono altro che le direzioni unite dell'omografia* α.

Si ha ancora $(\alpha - y)dQ = 0$, perciò l'omografia $\alpha - y$ è degenere, onde si ha:

$$\mathrm{I}_{n-1}(\alpha - y) = 0; \tag{25}$$

questa è, rispetto ad y, un'equazione di grado $n-1$, del tipo della cosidetta equazione secolare, ed ha quindi $n-1$ radici fra reali, immaginarie, multiple. Ad ogni radice corrisponde una direzione unita dQ, e quindi una direzione focale.

Giova notare che l'omografia α non è, in generale, una dilatazione, perciò le radici della (25), in generale, non sono tutte reali (anzi potrebbero esser tutte immaginarie), mentre se α è dilatazione, le radici, come ben sappiamo, sono necessariamente tutte reali.

12. Caso delle congruenze normali di raggi.

Dopo quanto precede si presenta naturale la questione di ricercare in quale caso la omografia α risulti una dilatazione.

Si vede subito che ciò avviene se la congruenza considerata, che indicheremo con Γ_n, è *normale*, e precisamente sussiste il seguente

Teorema I. - *Se la congruenza* Γ_n *è normale, le direzioni canoniche coincidono colle direzioni focali.*

Infatti, associando alla Γ_n $n-1$ congruenze ortogonali ad essa e fra loro, sussistono le (23′), che possiamo anche scrivere così:

$$(26)\quad \frac{d_v u_n}{dQ} u_k \times u_i = \frac{d_v u_n}{dQ} u_i \times u_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

le quali mostrano precisamente che l'omografia $\alpha = d_v u_n / dQ$, considerata nell'iperpiano Σ, è una dilatazione, e quindi $\alpha + K\alpha = 2\alpha$; perciò, da quanto si è detto in fine del n. 10, si conclude il teorema.

Abbiamo così l'interpretazione geometrica delle direzioni canoniche, e inoltre vediamo che, nel caso in esame, le direzioni focali sono sempre reali, in generale ben determinate, e *mutuamente ortogonali.*

Osserviamo ancora che, essendo la Γ_n una congruenza normale, esiste (per definizione) una famiglia di ipersuperficie $f(Q) = \text{cost}$, che sono tagliate ortogonalmente dalle rette della congruenza. Queste rette sono pertanto le normali comuni a tutte le ipersuperficie della famiglia.

Chiamando Σ una di queste ipersuperficie, si può stabilire il seguente

TEOREMA II. - *Le direzioni focali passanti per ogni punto Q dell'ipersuperficie Σ non sono altro che le direzioni tangenti alle linee di curvatura di Σ passanti per Q.*

Infatti, se si considerano, per ogni punto Q di Σ, le $n-1$ direzioni focali, ne risultano definite sulla Σ altrettante congruenze di curve mutuamente ortogonali. Tali curve non sono altro che le *linee di curvatura* dell'ipersuperficie Σ, perchè il vettore u_n è identico al vettore unitario $\boldsymbol{N}$ normale a Σ, perciò l'omografia α coincide coll'omografia fondamentale $\sigma = d_v \boldsymbol{N}/dQ$ delle ipersuperficie, le cui direzioni unite sono appunto tangenti alle linee di curvatura (Cap. V, n. 6).

Se invece la congruenza Γ_n non è normale, le direzioni focali in un punto generico Q di un raggio r sono, come abbiamo visto, in generale distinte dalle direzioni canoniche.

13. I simboli a quattro indici di Ricci.

Per mezzo dei coefficienti di rotazione γ_{ijh}, che abbiamo considerato nel n. 6, il Ricci ha introdotto dei simboli a quattro indici $\gamma_{ij,\,hk}$, che sono legati ai coefficienti di rotazione da certe relazioni differenziali, assai complicate (1).

Noi qui introdurremo, senza farne uso, questi simboli a quattro indici per tutt'altra via, e in modo estremamente semplice, ricorrendo all'omografia di RIEMANN.

Siano perciò, come nel n. 5, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vettori unitari, tangenti alla V_n in Q, e a due a due ortogonali; allora definiremo *i simboli di Ricci a quattro indici ponendo:*

$$(27) \qquad \gamma_{ij,\,hk} = \mathfrak{R} u_i u_j u_h \times u_k, \quad (i, j, h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

ovvero, per la (25):

$$(27') \qquad \gamma_{ij,\,hk} = \left(\frac{d_v{}^2 u_h}{dQ^2} u_j u_i - \frac{d_v{}^2 u_h}{dQ^2} u_i u_j\right) \times u_k .$$

Di qui, e dalle proprietà dell'omografia $\mathfrak{R}$ stabilite nel n. 6 del Cap. III, si trae subito:

$$\gamma_{ij,\,hk} = -\gamma_{ji,\,hk}, \quad \gamma_{ij,\,hk} = -\gamma_{ij,\,kh},$$
$$\gamma_{ij,\,hk} + \gamma_{ih,\,kj} + \gamma_{ik,\,jh} = 0, \quad \gamma_{ij,\,hk} = \gamma_{hk,\,ij}.$$

L'identità di BIANCHI relativa alla $\mathfrak{R}$ (Cap. III, n. 7) fornisce una relazione, che non stiamo a scrivere, fra le derivate dei simboli a quattro indici di RICCI.

Considerando il vettore dell'omografia $\mathfrak{R}$, cioè l'omografia $\psi = \mathrm{v}\mathfrak{R}$, che è una dilatazione (Cap. III, n. 8), si trova subito che

$$\psi u_i \times u_j = \sum_1^n{}_r \gamma_{ir,\,rj}, \qquad I_1\psi = \Sigma_i \Sigma_r \gamma_{ir,\,ri},$$

e considerando l'omografia di gravitazione $\theta = \psi - I_1\psi/2$ (Cap. III, n. 10), le formule ora trovate danno immediatamente il valore di $\theta u_i \times u_j$ mediante le γ a 4 indici.

---

(1) Cfr. ad es. RICCI: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* (« Memorie R. Accademia Lincei », a. 1896).
LEVI CIVITA: *Calcolo differenziale assoluto,* pag. 295.

Un'altra proprietà molto notevole dei simboli γ è la seguente:

Teorema. - *La curvatura riemanniana della* V_n *in* Q *secondo la giacitura determinata dai vettori* u_i, u_j *vale* $\gamma_{ij,ij}$.

Infatti, applicando la (7) del Cap. IV si conclude che la curvatura ora considerata vale semplicemente (essendo u_i, u_j unitari e ortogonali) $\mathfrak{R} u_i u_j u_i \times u_j$, cioè, per la (27), $\gamma_{ij,ij}$.

Questa proprietà fornisce un'interpretazione geometrica molto semplice dei simboli $\gamma_{ij,ij}$.

Facciamo ora vedere come dalla (27) si ricavi facilmente l'espressione assunta dal Ricci come definizione di $\gamma_{ij,hk}$.

La (17') può scriversi:

$$\gamma_{ijh} = \frac{d_v u_i}{dQ} u_h \times u_j, \tag{28}$$

da cui, prendendo il differenziale superficiale:

$$d\gamma_{ijh} = \left(d_v \frac{d_v u_i}{dQ}\right) u_h \times u_j + \frac{d_v u_i}{dQ} d_v u_h \times u_j + \frac{d_v u_i}{dQ} u_h \times d_v u_j.$$

Supponiamo ora che il differenziale superficiale considerato sia quello che corrisponde ad uno spostamento dQ parallelo al vettore u_k, e poniamo $ds_k = \text{mod}\, dQ$; avremo così, ricordando la seconda delle (17'):

$$d_v u_h = \sum_1^n {}_l d_v u_h \times u_l \cdot u_l = \Sigma_l \gamma_{hlk} u_l ds_k,$$

ne segue:

$$\frac{d_v u_i}{dQ} d_v u_h \times u_j = \sum_l \gamma_{hlk} \frac{d_v u_i}{dQ} u_l \times u_j ds_k = \sum_l \gamma_{hlk} \gamma_{ijl} ds_k,$$

$$\frac{d_v u_i}{dQ} u_h \times d_v u_j = \sum_l \gamma_{jlk} \frac{d_v u_i}{dQ} u_h \times u_l ds_k = \sum_l \gamma_{jlk} \gamma_{ilh} ds_k$$

e sostituendo:

$$d\gamma_{ijh} = \left(d_v \frac{d_v u_i}{dQ}\right) u_h \times u_j + \sum_l (\gamma_{hlk}\gamma_{ijl} + \gamma_{jlk}\gamma_{ilh}) ds_k,$$

da cui:

$$\frac{d_v^2 u_i}{dQ^2} u_k u_h \times u_j = \frac{\partial \gamma_{ijh}}{\partial s_k} - \sum_l (\gamma_{hlk}\gamma_{ijl} + \gamma_{jlk}\gamma_{ilh});$$

scambiando h con k risulta:

$$\frac{d_v^2 u_i}{dQ^2} u_h u_k \times u_j = \frac{\partial \gamma_{ijk}}{\partial s_h} - \sum_l (\gamma_{klh}\gamma_{ijl} + \gamma_{jlh}\gamma_{ilk});$$

sottraendo dalla precedente e ricordando le (27′), (18) si ottiene:

$$\gamma_{hk,\,ij} = \frac{\partial \gamma_{ijh}}{\partial s_k} - \frac{\partial \gamma_{ijk}}{\partial s_h} + \sum_l \{\gamma_{ijl}(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\gamma_{ljk}\}, \tag{29}$$

e poichè, come si osservò, $\gamma_{hk,\,ij} = \gamma_{ij,\,hk}$, questa espressione coincide colla definizione del Ricci.

14. L'omografia di rotazione.

I coefficienti di rotazione γ_{hkl} di Ricci, ove h, k, l assumono i valori 1, 2, ..., n, determinano ciò che, colle trattazioni comuni cartesiane, si chiama *tensore triplo*, e che corrisponde alle nostre *omografie di 2° ordine*. Ora vogliamo esaminare brevemente la natura di questa omografia.

Sia Q_0 un punto della V_n e diciamo $a_1, a_2, ..., a_n$ dei vettori unitari e a due a due ortogonali, tangenti alle linee della ennupla di congruenze ortogonali passanti per Q_0. Esisterà allora un'isomeria vettoriale λ tale che:

$$u_h = \lambda a_h, \qquad (h = 1, 2, ..., n); \tag{30}$$

tenendo Q_0 fisso sulla V_n e Q variabile, saranno fissi pure i vettori a_h, quindi l'isomeria λ risulterà funzione di Q. Ne segue:

$$d_v u_h = d_v\lambda \cdot a_h,$$

ma, essendo λ isomeria, si ha $K\lambda \cdot \lambda = \lambda K \lambda = 1$, perciò dalla (30) risulta: $a_h = K\lambda u_h$, e sostituendo:

$$d_v u_h = d_v\lambda \cdot K\lambda u_h;$$

siccome

(31) $$d_v\lambda \cdot \mathrm{K}\lambda = -\lambda d_v \mathrm{K}\lambda,$$

ponendo

(32) $$\Omega_2 = -\lambda d_v \mathrm{K}\lambda / dQ,$$

si ha

(33) $$d_v u_h = \Omega_2 dQ u_h.$$

Supponendo $dQ = u_l ds_l$ ne segue:

$$\partial_v u_h / \partial s_l = \Omega_2 u_l u_h,$$

da cui, ricordando la (17'):

(34) $$\gamma_{hkl} = \Omega_2 u_l u_h \times u_k.$$

Vediamo così che i coefficienti di rotazione provengono dalla omografia di 2° ordine Ω_2 definita dalla (32), che può perciò chiamarsi ***omografia di rotazione.***

Essa gode della proprietà

$$\mathrm{K}\Omega_2 = -\Omega_2,$$

che è immediata conseguenza della (18'), od anche della (31).

Se si pone:

$$c = \mathrm{v}\Omega_2,$$

è chiaro che c è un vettore ben determinato, e le sue proiezioni sui vettori u_h tangenti alle linee della ennupla di congruenze si possono interpretare come curvature medie [1].

L'omografia di Riemann può esprimersi mediante la λ, o la Ω_2, colle formule:

$$\mathcal{R} = -(\mathrm{k}^* - 1)\lambda \frac{d_v{}^2 \mathrm{K}\lambda}{dQ^2},$$

$$\mathcal{R} = (\mathrm{k}^* - 1)\left\{ \frac{d_v \Omega_2}{dQ} + \mathrm{k}(\mathrm{k}\Omega_2 \cdot \Omega_2) \right\},$$

---

[1] Levi-Civita: *Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen.* (Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, a. 1929).

delle quali non abbiamo occasione di valerci, e la cui dimostrazione lasciamo al lettore. La seconda di queste, equivale alle formule (29).

15. Spazio euclideo rappresentativo.

Consideriamo, oltre alla solita varietà V_n descritta dal punto $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, il luogo dei punti P di uno spazio euclideo S_n, definiti da

$$P = O + q_1\boldsymbol{i}_1 + q_2\boldsymbol{i}_2 + \ldots + q_n\boldsymbol{i}_n, \tag{35}$$

ove O è un punto fisso di S_n ed $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ sono vettori di un sistema unitario ortogonale di riferimento in S_n.

È chiaro che ad ogni punto Q della V_n la (35) fa corrispondere un punto P di S_n, e alla V_n corrisponde una certa regione E_n di S_n; supporremo inoltre che, viceversa, ad ogni punto di E_n corrisponda un determinato punto della V_n, in guisa dunque che si avrà una corrispondenza biunivoca fra i punti Q della V_n ed i punti P di E_n.

Diremo allora che E_n è lo *spazio euclideo rappresentativo* della varietà V_n.

Ad ogni spostamento dQ del punto Q sulla V_n corrisponde uno spostamento dP del punto P in S_n, e viceversa.

Poichè il punto Q si può riguardare come funzione di P, è chiaro che l'omografia β che risulta definita ponendo:

$$dQ = \beta dP, \quad \text{cioè} \quad \beta = dQ/dP, \tag{36}$$

è pure una funzione ben determinata di P.

Dalle (35), (36) segue ovviamente:

$$\partial P/\partial q_r = \boldsymbol{i}_r, \quad \beta\boldsymbol{i}_r = \partial Q/\partial q_r, \quad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{37}$$

perciò dalla (8′) del Cap. I si trae:

$$I_n\beta = \mathrm{am}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}, \frac{\partial Q}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial Q}{\partial q_n}\right),$$

e poichè il secondo membro non è nullo (Cap. II, n. 1) ne segue che l'omografia β non è degenere, quindi è *invertibile*.

L'elemento lineare ds della V_n si calcola mediante la

$$ds^2 = dQ \times dQ = \sum_{rs} \frac{\partial Q}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s} dq_r\, dq_s .$$

la quale, ponendo

$$a_{rs} = \frac{\partial Q}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s}, \tag{38}$$

si scrive:

$$ds^2 = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dq_r\, dq_s . \tag{39}$$

In virtù della (36) si ha ancora:

$$ds^2 = \beta dP \times \beta dP = dP \times \mathrm{K}\beta \cdot \beta dP = dP \times \alpha dP, \tag{39'}$$

ove si è posto:

$$\alpha = \mathrm{K}\beta \cdot \beta. \text{ [1]} \tag{40}$$

L'omografia α è evidentemente una dilatazione, ed è un'omografia non degenere, perchè dalle (16), (23') del Cap. I si ha: $\mathrm{I}_n\alpha = (\mathrm{I}_n\beta)^2 \neq 0$. Inoltre, ricordando le (37), (40), la (38) porge subito:

$$a_{rs} = i_r \times \alpha i_s , \tag{38'}$$

quindi la matrice della dilatazione α ha per elementi i coefficienti a_{rs} della forma differenziale quadratica (39). E siccome, coi metodi ordinari, si dice che i coefficienti a_{rs} determinano la *metrica* della V_n, vediamo che tale metrica è pienamente determinata dalla dilatazione α.

Risulta pure che di metriche siffatte ve ne sono infinite, perchè ve ne è una per ogni scelta delle variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_n$, cioè per ciascuna β, ossia per ogni corrispondenza fra la varietà V_n e le regioni dello spazio euclideo S_n.

---

[1] Nell'opera *Espaces courbes* le precedenti formule (36), (40) rappresentano il punto di partenza della rappresentazione euclidea della varietà considerata. Giova rilevare che il procedimento adoperato in tale opera è del tutto assoluto.

Coi metodi ordinari si considerano, oltre agli elementi a_{rs}, i loro complementi algebrici nella matrice di α, divisi per il valore del determinante di α, quantità che si indicano con a^{rs}, e che non sono altro che gli elementi della matrice della dilatazione α^{-1}, perciò si ha:

$$a^{rs} = \boldsymbol{i}_r \times \alpha^{-1}\boldsymbol{i}_s = \boldsymbol{i}_r \times \beta^{-1}\mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_s = \mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_r \times \mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_s .$$

Ora si ha, da formule note e dalla (35):

$$\text{(41)} \quad \mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_r = \mathrm{K}\frac{dP}{dQ}\boldsymbol{i}_r = \mathrm{grad}_v[(P-O)\times \boldsymbol{i}_r] = \mathrm{grad}_v\, q_r,$$

quindi in definitiva:

$$\text{(42)} \qquad a^{rs} = \mathrm{grad}_v\, q_r \times \mathrm{grad}_v\, q_s .$$

Il vettore $\mathrm{grad}_v q_r$ si può esprimere mediante i vettori $\partial Q/\partial q_1$, $\partial Q/\partial q_2$, ... ed è facile vedere che si ha ad es.:

$$\text{(43)} \quad \mathrm{grad}_v\, q_1 = \mathrm{E}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_2}, \frac{\partial Q}{\partial q_3}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial q_n}\right) / \operatorname{am}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}, \frac{\partial Q}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial q_n}\right);$$

basta, infatti, moltiplicare scalarmente i due membri per $\partial Q/\partial q_r$, ove $r = 1, 2, \ldots, n$.

Analogamente, si verifica subito che si ha, ad es.:

$$\text{(43')} \qquad \frac{\partial Q}{\partial q_1} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{grad}_v\, q_2, \mathrm{grad}_v\, q_3, \ldots, \mathrm{grad}_v\, q_n)}{\operatorname{am}(\mathrm{grad}_v\, q_1, \mathrm{grad}_v\, q_2, \ldots, \mathrm{grad}_v\, q_n)};$$

basta, infatti, moltiplicare scalarmente i due membri per $\mathrm{grad}_v\, q_r$, ove $r = 1, 2, \ldots, n$.

16. L'omografia di Christoffel.

La derivata $d\beta/dP$ è un'omografia di 2° ordine, funzione di P, e ponendo:

$$\text{(44)} \qquad \lambda_2 = \beta^{-1} d\beta/dP,$$

la λ_2 è pure un'omografia di 2° ordine, che riassume i simboli di CHRISTOFFEL a 3 indici, di seconda specie; si ha infatti (*Espaces*, pag. 101):

$$\left\{\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix}\right\} = \lambda_2 \boldsymbol{i}_r . \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_t, \tag{45}$$

ove $\left\{\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix}\right\}$ è, colle notazioni abituali, un simbolo di CHRISTOFFEL a 3 indici di seconda specie.

L'omografia di 2° ordine λ_2 verrà chiamata ***omografia di Christoffel.***

La proprietà $k\lambda_2 = \lambda_2$, che si deduce subito dalla (44) (*Espaces*, pag. 62), equivale alla proprietà ordinaria

$$\left\{\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} s\ r \\ t \end{matrix}\right\}.$$

Per i simboli di CHRISTOFFEL a 3 indici, di prima specie, si ha invece:

$$\left[\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix}\right] = \alpha\lambda_2 \boldsymbol{i}_r . \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_t . \tag{45'}$$

Come ben si vede la (45) ha forma del tutto analoga alla (33).

Possiamo porre le (45'), (45) sotto una forma notevole, che fornisce un'interpretazione geometrica molto semplice dei simboli di CHRISTOFFEL a 3 indici.

Ricordando le (40), (44) si può scrivere la (45') così:

$$\left[\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix}\right] = \mathrm{K}\beta \cdot \beta\lambda_2 \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_t = \frac{d\beta}{dP} \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \times \beta \boldsymbol{i}_t =$$

$$= \frac{\partial\beta}{\partial q_r} \boldsymbol{i}_s \times \beta \boldsymbol{i}_t = \frac{\partial_v(\beta \boldsymbol{i}_s)}{\partial q_r} \times \beta \boldsymbol{i}_t ,$$

cioè, per la (37):

$$\left[\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix}\right] = \frac{\partial_v{}^2 Q}{\partial q_r \partial q_s} \times \frac{\partial Q}{\partial q_t} . \tag{45'$_1$}$$

Analogamente, si ha dalla (45):

$$\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix} \right\} = \lambda_2 \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_t = \beta\lambda_2 \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \times \mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_t =$$
$$= \frac{d\beta}{dP} \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \times \mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_t = \frac{\partial_v(\beta \boldsymbol{i}_s)}{\partial q_r} \times \mathrm{K}\beta^{-1}\boldsymbol{i}_t,$$

od ancora, per le (37), (41):

$$\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix} \right\} = \frac{\partial_v{}^2 Q}{\partial q_r \partial q_s} \times \mathrm{grad}_v\, q_t. \tag{45$_1$}$$

Le (45$'_1$), (45$_1$) mostrano (cfr. il seguente n. 18) che i simboli $\left[\begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix} \right]$, $\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix} \right\}$ non sono altro che le componenti covarianti e contravarianti della derivata superficiale $\dfrac{\partial_v{}^2 Q}{\partial q_r \partial q_s}$.

17. L'omografia di Riemann dello spazio rappresentativo. Se si considera l'omografia di 3° ordine λ_3 definita da:

$$\lambda_3 = \beta^{-1}(d\lambda_2 / dP),$$

allora i simboli di Riemann a 4 indici, di seconda specie e di prima specie, si possono esprimere rispettivamente così (*Espaces*, pag. 102):

$$\left\{ \begin{aligned} \{hk,\ rs\} &= (\mathrm{k}^* - 1)\ \lambda_3 \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_h \times \boldsymbol{i}_k, \\ (hk,\ rs) &= (\mathrm{k}^* - 1)\alpha\lambda_3 \boldsymbol{i}_r \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{i}_h \times \boldsymbol{i}_k. \end{aligned} \right. \tag{46}$$

Considerando poi tre spostamenti dQ, δQ, $d'Q$ del punto Q sulla V_n, e i corrispondenti spostamenti dP, δP, $d'P$ nello spazio rappresentativo, si ha (*Espaces*, pag. 70):

$$\delta d d'Q - d\delta d'Q = \beta(\mathrm{k}^* - 1)\lambda_3 dP\delta P d'P,$$

in cui il primo membro vale $\mathfrak{R} dQ\delta Q d'Q$. Ne segue tosto (*Espaces*, pag. 71):

$$\mathfrak{R} dQ\delta Q d'Q \times \delta' Q = (\mathrm{k}^* - 1)\alpha\lambda_3 dP\delta P d'P \times \delta' P,$$

e se si pone

$$\mathfrak{R}_S = (k^* - 1)\alpha\lambda_3\,, \tag{47}$$

la $\mathfrak{R}_S$ può chiamarsi *omografia di Riemann dello spazio rappresentativo* S_n, e si ha:

$$\mathfrak{R}dQ\delta Qd'Q \times \delta'Q = \mathfrak{R}_S dP\delta Pd'P \times \delta'P. \tag{48}$$

Di qui risulta che tutte le proprietà stabilite nel Cap. III per l'omografia $\mathfrak{R}$ valgono pure per la $\mathfrak{R}_S$.

Dalle (46), (47) si deduce poi:

$$(ij, hk) = \mathfrak{R}_S\, \boldsymbol{i}_h\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j = \mathfrak{R}_S \boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_h \times \boldsymbol{i}_k\,, \tag{49}$$

la quale formula è del tutto analoga alla (27) relativa ai simboli di Ricci a 4 indici.

Occorre però rilevare che, mentre i simboli di Ricci sono indipendenti dalla metrica della V_n, e quindi sono, in sostanza, elementi intrinseci della V_n, i simboli di Riemann, invece, dipendono essenzialmente dalla metrica della V_n, e perciò non sono simboli intrinseci della V_n.

Ciò risulta anche dalle seguenti considerazioni. La (48), tenendo conto della prima delle (37), può scriversi:

$$\mathfrak{R}\frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{\partial Q}{\partial q_j}\frac{\partial Q}{\partial q_h} \times \frac{\partial Q}{\partial q_k} = \mathfrak{R}_S \boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_h \times \boldsymbol{i}_k\,, \tag{48'}$$

e ponendo, in generale:

$$\partial Q/\partial q_i = \boldsymbol{v}_i\,, \tag{50}$$

si ha dalle (49), (48'):

$$(ij, hk) = \mathfrak{R}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_h \times \boldsymbol{v}_k\,, \tag{51}$$

che ha la stessa forma della (27) relativa a $\gamma_{ij,\,hk}$, salvo che nella (27) i vettori $\boldsymbol{u}$ sono unitari e a due a due ortogonali, mentre invece nella (51) i vettori $\boldsymbol{v}$ non sono in generale nè unitari, nè ortogonali, come risulta dalle (50); questi vettori $\boldsymbol{v}$ dipendono dalla scelta delle variabili indipendenti q, mentre i vettori $\boldsymbol{u}$ non ne dipendono affatto.

18. Componenti covarianti e contravarianti di un vettore. Derivate covarianti.

Sia u un vettore tangente alla V_n in Q; si chiamano *componenti covarianti* del vettore u certe espressioni u_i che ridotte a forma vettoriale possono esprimersi così:

$$(52) \qquad u_i = u \times \partial Q/\partial q_i ,$$

e si chiamano invece *componenti contravarianti* di u le espressioni:

$$(53) \qquad u^i = u \times \mathrm{grad}_v\, q_i .$$

Da queste relazioni si trae tosto:

$$(53') \qquad u = \Sigma_i u_i\, \mathrm{grad}_v\, q_i = \Sigma_i u^i\, \partial Q/\partial q_i ,$$

come si riconosce moltiplicando scalarmente per $\partial Q/\partial q_r$, ovvero per $\mathrm{grad}_v\, q_r$.

Come ben si vede, queste componenti covarianti e contravarianti sono del tutto inutili, perchè in una trattazione veramente assoluta degli spazi curvi si può operare direttamente sul vettore u, e non sulle sue componenti, come è ampiamente dimostrato dagli sviluppi esposti nei capitoli precedenti.

Considerando le componenti covarianti u_i del vettore u, il suo *sistema derivato covariante*, che si indica con $u_{i|k}$ è definito da [1]

$$(54) \qquad u_{i|k} = \frac{\partial u_i}{\partial q_k} - \sum_j \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix} \right\} u_j ;$$

cerchiamo l'espressione vettoriale di $u_{i|k}$; dalle (52), (45_1) risulta:

$$u_{i|k} = \frac{\partial_v}{\partial q_k}\left(u \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}\right) - \sum_j \frac{\partial_v^2 Q}{\partial q_i \partial q_k} \times \mathrm{grad}_v\, q_j \cdot u_j ,$$

---

[1] Levi-Civita: *Calcolo differenziale assoluto*, pag. 168.

ma applicando la (53′) si vede che quest'ultima Σ vale

$$\frac{\partial_v{}^2 Q}{\partial q_i \partial q_k} \times u,$$

perciò si ha semplicemente:

$$u_{i|k} = \frac{\partial_v u}{\partial q_k} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}, \tag{55}$$

e confrontando colla (52) si conclude che *la derivata covariante della componente covariante u_i del vettore u non è altro che la componente covariante del vettore $\partial_v u/\partial q_k$ (che è la derivata superficiale di u rispetto alla variabile q_k).*

Si vede, ovviamente, che l'espressione vettoriale (55) è assai più semplice ed espressiva che non la (54); essa si può immaginare ottenuta derivando la (52) rispetto a q_k e riguardando $\partial Q/\partial q_i$ come costante.

Dalla (55) si ha ancora:

$$u_{i|k} = \frac{d_v u}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_k} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}, \tag{55′}$$

la quale mostra che le derivate covarianti di u_i sono tutte date dalla omografia ordinaria $d_v u/dQ$.

Analogamente, considerando le componenti contravarianti u^i del vettore u, il suo sistema derivato covariante, che si indica con $u^i{}_{|k}$ è definito da

$$u^i{}_{|k} = \frac{\partial u^i}{\partial q_k} + \sum_j \left\{ \begin{matrix} j\ k \\ i \end{matrix} \right\} u^j; \tag{56}$$

cerchiamo l'espressione vettoriale di $u^i{}_{|k}$; dalle (53), (45$_1$) risulta

$$u^i{}_{|k} = \frac{\partial_v}{\partial q_k}(u \times \operatorname{grad}_v q_i) + \sum_j \frac{\partial_v{}^2 Q}{\partial q_j \partial q_k} \times \operatorname{grad}_v q_i \cdot u^j,$$

ma è chiaro che

$$\frac{\partial_v{}^2 Q}{\partial q_j \partial q_k} \times \operatorname{grad}_v q_i = \frac{\partial_v}{\partial q_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_j} \times \operatorname{grad}_v q_i\right) - \frac{\partial Q}{\partial q_j} \times \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v q_i}{\partial q_k} =$$

$$= - \frac{\partial Q}{\partial q_j} \times \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v q_i}{\partial q_k},$$

quindi, ricordando la (53′), si ha:

$$u^i{}_{|k} = \frac{\partial_v(u \times \operatorname{grad}_v q_i)}{\partial q_k} - u \times \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v q_i}{\partial q_k},$$

cioè, più semplicemente:

$$u^i{}_{|k} = \frac{\partial_v u}{\partial q_k} \times \operatorname{grad}_v q_i, \tag{57}$$

e confrontando colla (53) si conclude che ***la derivata covariante della componente contravariante*** u^i ***del vettore*** u ***non è altro che la componente contravariante del vettore*** $\partial_v u/\partial q_k$.

Anche qui si vede che l'espressione vettoriale (57) è assai più semplice ed espressiva che non la (56); essa si può immaginare ottenuta dalla (53) derivando rispetto a q_k e riguardando $\operatorname{grad}_v q_i$ come costante.

Dalla (57) si ha ancora:

$$u^i{}_{|k} = \frac{d_v u}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_k} \times \operatorname{grad}_v q_i, \tag{57′}$$

la quale mostra che le derivate covarianti di u^i sono tutte date dalla omografia ordinaria $d_v u/dQ$, che già si presenta nella (55′).

Dalle (55), (57) risulta che se il vettore u si sposta per parallelismo lungo una curva della V_n per la quale tutte le q, tranne la k^{esima}, sono costanti, le derivate covarianti di u_i e di u^i sono nulle, perchè lungo tale curva si ha (n. 1) $d_v u = 0$.

Oltre alle derivate covarianti definite dalle (54), (56), si considerano, coi metodi ordinari, le derivate contravarianti [1] degli stessi enti u_i, u^i, le quali si riducono a forma vettoriale assoluta collo stesso procedimento dianzi adoperato per le (54) e (56); ma di questo però facciamo grazia al lettore intelligente, il quale, dall'esame delle (55′), (57′) può

[1] Cfr. Levi-Civita: *Opera citata*, pag. 170.

già concludere per la completa inutilità delle derivate covarianti e contravarianti (già dimostrata, del resto, in *Espaces*, pag. 76-106), perchè invece di esse basta considerare, più semplicemente, la derivata superficiale $d_v u/dQ$ del vettore tangenziale u.

In particolare, se f è una funzione numerica del punto Q della V_n, e si pone $u = \operatorname{grad}_v f$, le derivate seconde covarianti f_{ik} si calcolano mediante le (55), (55') e si ha:

$$f_{ik} = \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v f}{\partial q_k} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} = \frac{d_v \operatorname{grad}_v f}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_k} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i};$$

di qui è facile dedurre che $f_{ik} = f_{ki}$ e inoltre che

$$\Sigma_{ik} f_{ik}\, dq_i\, dq_k = d_v \operatorname{grad}_v f \times dQ,$$

perciò l'omografia che determina le f_{ik} è la $d_v \operatorname{grad}_v f/dQ$, la quale è una dilatazione.

19. Derivate covarianti e contravarianti delle componenti di un'omografia.

Per comodità di confronto cogli ordinari metodi, daremo il risultato della riduzione a forma vettoriale delle derivate covarianti e contravarianti delle componenti covarianti, contravarianti e miste di un'omografia ordinaria ξ, che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q, in vettori pure tangenti alla V_n in Q.

Le componenti covarianti, contravarianti e miste dell'omografia ξ sono espresse da:

$$\xi_{ik} = \xi \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_k}, \quad \xi^{ik} = \xi \operatorname{grad}_v q_i \times \operatorname{grad}_v q_k,$$

$$\xi_i^{k} = \xi \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \operatorname{grad}_v q_k,$$

ove, come ben si vede, ad ogni indice r in basso della ξ nel primo membro, corrisponde nel secondo membro il vettore $\partial Q/\partial q_r$, mentre ad ogni indice r in alto corrisponde nel secondo membro il vettore $\operatorname{grad}_v q_r$.

Per le derivate covarianti e contravarianti delle precedenti espressioni si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_{ik|l} &= \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial q_l} - \sum_j \left\{ {i\,l \atop j} \right\} \xi_{jk} - \sum_j \left\{ {k\,l \atop j} \right\} \xi_{ij}, \\ \xi_{ik|l} &= \frac{d_v \xi}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_l} \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_k}. \end{aligned}\right.$$

$$\xi_{ik}{}^{|l} = \sum_h a^{hl} \xi_{ik|h} = \frac{d_v \xi}{dQ} \operatorname{grad}_v q_l \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_k}.$$

$$\left\{\begin{aligned} \xi^{ik}{}_{|l} &= \frac{\partial \xi^{ik}}{\partial q_l} + \sum_j \left\{ {j\,l \atop i} \right\} \xi^{jk} + \sum_j \left\{ {j\,l \atop k} \right\} \xi^{ij}, \\ \xi^{ik}{}_{|l} &= \frac{d_v \xi}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_l} \operatorname{grad}_v q_i \times \operatorname{grad}_v q_k. \end{aligned}\right.$$

$$\xi^{ik|l} = \sum_h a^{hl} \xi^{ik}{}_{|h} = \frac{d_v \xi}{dQ} \operatorname{grad}_v q_l \operatorname{grad}_v q_i \times \operatorname{grad}_v q_k.$$

$$\left\{\begin{aligned} \xi_i{}^k{}_{|l} &= \frac{\partial \xi_i{}^k}{\partial q_l} - \sum_j \left\{ {i\,l \atop j} \right\} \xi_j{}^k + \sum_j \left\{ {j\,l \atop k} \right\} \xi_i{}^j, \\ \xi_i{}^k{}_{|l} &= \frac{d_v \xi}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_l} \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \operatorname{grad}_v q_k. \end{aligned}\right.$$

$$\xi_i{}^{k|l} = \sum_h a^{hl} \xi_i{}^k{}_{|h} = \frac{d_v \xi}{dQ} \operatorname{grad}_v q_l \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \operatorname{grad}_v q_k.$$

Queste formule mostrano, all'evidenza, la maggiore semplicità e simmetria delle forme vettoriali rispetto a quelle colle coordinate. Da esse risulta poi che ad ogni indice r in basso, o in alto, della ξ nel primo membro, corrisponde nell'espressione vettoriale il vettore $\partial Q/\partial q_r$, oppure il vettore $\operatorname{grad}_v q_r$.

Questa semplicissima osservazione permette di scrivere senz'altro tutte le derivate covarianti e contravarianti delle varie componenti dell'omografia ξ. Queste varie derivate sono, in sostanza tutte riassunte dall'omografia di 2° ordine $d_v\xi/dQ$, che, una volta conosciuta, fornisce immediatamente tutte le derivate covarianti e controvarianti considerate.

Se, in particolare, l'omografia ξ è l'identità, le formule vettoriali precedenti mostrano ovviamente che le derivate covarianti e contravarianti delle ξ_{ik} e ξ^{ik} sono identicamente nulle; ma in virtù delle (38), (42) le ξ_{ik} e ξ^{ik} non sono altro che le a_{ik} ed a^{ik}, perciò si ottengono, senza alcun calcolo, i noti *lemmi di* RICCI.

Si sogliono anche considerare le derivate covarianti e contravarianti delle componenti di una iperomografia, ma data la loro inutilità non ce ne occupiamo affatto.

Piuttosto termineremo col dare ancora alcune importanti formule, di facile dimostrazione.

Se ξ e μ_2 sono, rispettivamente, un'omografia ordinaria e un'omografia di 2° ordine, che trasformano vettori, o coppie di vettori, tangenti alla V_n in Q, in vettori tangenti alla V_n in Q, si ha:

$$I_1 \xi = \sum_i \xi \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \operatorname{grad}_v q_i ,$$

$$V \mu_2 = \sum_i \mu_2 \frac{\partial Q}{\partial q_i} \operatorname{grad}_v q_i ,$$

dalle quali, supposto $\xi = d_v u/dQ$, e $\mu_2 = d_v \xi/dQ$, ove u è un vettore tangente alla V_n in Q, risulta:

$$\operatorname{div}_v u = \sum_i \frac{\partial_v u}{\partial q_i} \times \operatorname{grad}_v q_i ,$$

$$\operatorname{grad}_v \xi = \sum_i \frac{\partial_v \xi}{\partial q_i} \operatorname{grad}_v q_i ;$$

se infine si pone $u = \operatorname{grad}_v f$, ove f è una funzione numerica di Q, ne segue:

$$\operatorname{div}_v \operatorname{grad}_v f = \sum_i \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v f}{\partial q_i} \times \operatorname{grad}_v q_i ;$$

il 1° membro, che si indica anche con $\Delta_2 f$, si chiama *parametro differenziale secondo* di f, sulla varietà V_n.

PARTE III

FONDAMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE

A CURA DEL PROF. C. BURALI-FORTI

CAPITOLO I.

Sistemi lineari di formazioni geometriche.

1. Sistemi lineari ad una dimensione (1).

I sistemi lineari ad *una dimensione* sono i seguenti:

Le $\mathbf{F}_1$, non nulle, aventi per *posizione* uno stesso *punto proiettivo;*

Le $\mathbf{F}_2$, non nulle, ad *invariante* nullo (cioè le $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1$, vale a dire i prodotti alternati di due $\mathbf{F}_1$), aventi per *posizione* una stessa *retta proiettiva;*

Le $\mathbf{F}_3$, non nulle, aventi per *posizione* uno stesso *piano proiettivo* (2).

Se a è un elemento, non nullo, di un sistema lineare ad una dimensione, allora: *tutti* e *soli* gli elementi del sistema sono dati da ma, ove m varia in **tutto** *il campo dei numeri reali relativi.*

Se a, b sono elementi di un sistema lineare ad una dimensione e $a \neq 0$, allora: esiste *un solo* numero reale relativo m tale che $b = ma$. Questo numero m può essere indicato, come in Algebra, con la notazione b/a, ovvero $\frac{b}{a}$. In altri termini le due relazioni

$$b = ma, \qquad b/a = m$$

---

(1) Cfr. Prefazione (parte terza) per ciò che riguarda le *formazioni geometriche*, e il Vol. I di A. V. G. (Introduzione) per i *sistemi lineari*

(2) In particolare; per le $\mathbf{F}_1$ i *vettori* di data *direzione*, cioè i *vettori paralleli ad una retta proiettiva con punti propri;* per le $\mathbf{F}_2$ i *bivettori* di data *giacitura*, cioè i *bivettori paralleli ad un piano proiettivo con punti propri;* per le $\mathbf{F}_3$ i *trivettori*, ciascuno dei quali ha per posizione il *piano all' infinito.*

esprimono, sotto forma diversa, la stessa cosa. Da ciò che precede risulta che b/a è *un numero reale relativo univocamente determinato* [1].

2. Sistemi lineari a quattro dimensioni.

Le $\mathbf{F}_1$ e le $\mathbf{F}_3$ formano i soli due sistemi lineari di $\mathbf{F}$ a *quattro dimensioni*.

Siano A_r, A_s, A_t, A_u, rispettivamente, delle $\mathbf{F}$ di specie r, s, t, u con $r, s, t, u = 1, 2, 3$.

Per il prodotto *alternato* (progressivo o regressivo) di *due* $\mathbf{F}$ si ha:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_r A_s \text{ è una } \mathbf{F}_{r+s} \text{ o una } \mathbf{F}_{r+s-4}, \text{ secondochè } r+s \overline{\leqq} 4, \text{ o } r+s > 4; \\ A_r A_s = (-1)^{rs} A_s A_r; \\ \text{valgono le ordinarie proprietà algebriche, ecc.} \end{array} \right.$$

Per il prodotto alternato di *tre* $\mathbf{F}$ (A_r, A_s, A_t) vale la proprietà *associativa* solo per $r+s+t = 3, 4, 8, 9$; negli altri casi *no*. Si ha:

$$(2)\quad \text{Per } r+s+t = 3, 4, 8, 9, \qquad A_r A_s \cdot A_t = A_r \cdot A_s A_t = A_r A_s A_t$$

$$(3)\quad \text{Per } r+s+t = 5, 7, \qquad A_r A_s \cdot A_t = (-1)^{r+st} A_r A_t \cdot A_s - (-1)^{s+1} A_s A_t \cdot A_r$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Per } r+s+t = 6 \\ \text{purchè } non \text{ sia } r = s = t \end{array} \right., \qquad A_r A_s \cdot A_t = A_r A_t \cdot A_s - (-1)^t A_s A_t \cdot A_r$$

Per il prodotto alternato di quattro $\mathbf{F}$ si applicano

---

[1] In particolare, per i *trivettori*, ci sarà utile, per le questioni *metriche*, indicare con Ω il *trivettore unitario* e porre ancora $\omega = 6\Omega$ e quindi, per P *punto proprio* si ha:

$$P\Omega = 1/6, \qquad P\omega = 1.$$

Si noti quanto segue. Se S, s, σ sono, rispettivamente, delle $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, allora:

$$S\omega, \quad s\omega, \quad \sigma\omega$$

(prodotti alternati, *progressivo* il primo, *regressivi* gli altri due), dànno, la *massa* di S, il *vettore* di s, il *bivettore* di σ. La *posizione* di S è *punto proprio* o *punto all'infinito*, secondochè $S\omega \neq 0$, o $S\omega = 0$; se $ss = 0$ la *posizione* di s è *retta con punti propri*, o *retta all'infinito* secondochè $s\omega \neq 0$, o $s\omega = 0$; la *posizione* di σ è un *piano con punti propri*, o il *piano all'infinito* secondo che $\sigma\omega \neq 0$, o $\sigma\omega = 0$.

le (2), (3), (4) secondo la scomposizione in fattori. La proprietà *associativa* si ha per $r+s+t+u=4{,}12$ e in tal caso $A_r A_s A_t A_u$ è una $\mathbf{F}_4$, cioè un *numero reale relativo.*

In particolare si noti che: i prodotti abc, variando a, b, c nel campo delle $\mathbf{F}_1$, od $\mathbf{F}_3$, dànno il completo sistema lineare delle $\mathbf{F}_3$, od $\mathbf{F}_1$.

Vale la *legge di dualità nello spazio* per le $\mathbf{F}$. *Da ogni proprietà delle* $\mathbf{F}$ *che si possa esprimere legando queste con le* **sole** *operazioni* **somma, prodotto per un numero, prodotto alternato,** *se ne ottiene un' altra cambiando le* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, *rispettivamente, nelle* $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_4$. Per le *posizioni* delle $\mathbf{F}$ si ha l'ordinario *principio di dualità nello spazio per gli enti proiettivi* (si cambia *punto* in *piano*, *piano* in *punto*, *retta* in *retta*) (1).

3. Sistemi lineari a tre dimensioni.

Se σ è una $\mathbf{F}_3$, non nulla, chiamiamo: **strato** *di* $\mathbf{F}_1$, avente σ per *sostegno*, il sistema delle $\mathbf{F}_1$, A, tali che $A\sigma=0$; **strato** *di* $\mathbf{F}_2$, avente σ per *sostegno*, il sistema delle $\mathbf{F}_2$, a, tali che $a\sigma=0$ (2).

Se S è una $\mathbf{F}_1$, non nulla, chiamiamo: **stella** *di* $\mathbf{F}_3$, avente S per *sostegno*, il sistema delle $\mathbf{F}_3$, α, tali che $\alpha S=0$; **stella** *di* $\mathbf{F}_2$, avente S per *sostegno*, il sistema delle $\mathbf{F}_2$, a, tali che $aS=0$.

Gli *strati* di $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_2$, e le *stelle* di $\mathbf{F}_3$, o $\mathbf{F}_2$, dànno *tutti* e *soli* i **sistemi lineari a tre dimensioni** *di* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ad

---

(1) Come casi particolari delle (1)-(4) sono praticamente utili le seguenti, nelle quali $A, B\ C$ sono $\mathbf{F}_1$, α, β, γ sono $\mathbf{F}_3$, a è una $\mathbf{F}_2$ (le formule a destra corrispondono per dualità a quelle a sinistra):

ABC è una $\mathbf{F}_3$,	$\alpha\beta\gamma$ è una $\mathbf{F}_1$
$AB\cdot\alpha=A\alpha\cdot B-B\alpha\cdot A$,	$\alpha\beta\cdot A=\alpha A\cdot\beta-\beta A\cdot\alpha$
$ABC\cdot a=BCa\cdot A+CAa\cdot B+ABa\cdot C$,	$\alpha\beta\gamma\cdot a=\beta\gamma a\cdot\alpha+\gamma\alpha a\cdot\beta+\alpha\beta a\cdot\gamma$
$ABC\cdot\alpha=A\alpha\cdot BC+B\alpha\cdot CA+C\alpha\cdot AB$,	$\alpha\beta\gamma\cdot A=\alpha A\cdot\beta\gamma+\beta A\cdot\gamma\alpha+\gamma A\cdot\alpha\beta$.

(2) Tanto a sinistra quanto a destra è inutile porre la condizione $aa=0$ (a è ad invariante nullo), perchè, ad es., $a\sigma\cdot a=aa\cdot\sigma-\sigma a\cdot a$, cioè $2a\sigma\cdot a=aa\cdot\sigma$ e quindi da $a\sigma=0$ segue $aa=0$, perchè $\sigma\neq 0$.

invariante nullo, $\mathbf{F}_3$; strati e stelle si corrispondono nel principio di dualità generale nello spazio [1].

a) La $\mathbf{F}_3$, σ, è sostegno di *due strati*, uno di $\mathbf{F}_1$ e l'altro di $\mathbf{F}_2$; strati sovrapposti.

L'ordinario prodotto alternato (progressivo) di due $\mathbf{F}_1$ dello strato σ è una $\mathbf{F}_2$ dello strato σ; il prodotto di una $\mathbf{F}_1$ per una $\mathbf{F}_2$ dello strato σ è un multiplo di σ.

La $\mathbf{F}_1$, S, è sostegno di *due stelle*, una di $\mathbf{F}_3$ e l'altra di $\mathbf{F}_2$; stelle sovrapposte.

L'ordinario prodotto alternato (regressivo) di due $\mathbf{F}_3$ della stella S è una $\mathbf{F}_2$ della stella S; il prodotto di una $\mathbf{F}_3$ per una $\mathbf{F}_2$ della stella S è un multiplo di S.

Il prodotto alternato progressivo di due $\mathbf{F}_2$ *a*, *b*, *di uno* **strato** *o di una* **stella** *è sempre nullo.*

È importante definire un nuovo *prodotto alternato regressivo* di *a* per *b*, tanto nello *strato* quanto nella *stella*, che indicheremo brevemente con *ab* (senza pericolo di equivoci finchè si opera unicamente sullo strato o stella) in modo che:

ab sia una $\mathbf{F}_1$ giacente tanto in *a* quanto in *b*, cioè avente per posizione il *punto proiettivo* che sta sulle *rette a*, *b*.

Raggiungiamo tale scopo ponendo:

$$(1) \qquad ab = \frac{1}{M\sigma} Ma \cdot b$$

ove M è una $\mathbf{F}_1$ arbitraria ma tale che $M\sigma \neq 0$.

ab sia una $\mathbf{F}_3$ che passa tanto per *a* quanto per *b*, cioè avente per posizione il *piano proiettivo* che *contiene* le *rette a*, *b*.

Raggiungiamo tale scopo ponendo:

$$(1) \qquad ab = \frac{1}{\mu S} \mu a \cdot b$$

ove μ è una $\mathbf{F}_3$ arbitraria ma tale che $\mu S \neq 0$ [2].

---

(1) Le *posizioni* delle $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_2$ dello *strato* di *sostegno* σ, sono i *punti proiettivi*, o le *rette proiettive* del piano posit σ. Dualmente per le *stelle*. La parola *strato* sta al posto dell'ordinario, *piano punteggiato*, o *piano rigato*.

Si noti che le $\mathbf{F}_2$ generali dello spazio formano un sistema lineare a *sei* dimensioni (rappresentano sistemi di forze applicate ad un corpo rigido); quelle ad invariante nullo *non* formano un sistema lineare, salvo il caso che appartengano ad uno strato o ad una stella.

(2) Si ha (a sinistra) che $Ma \cdot b$ ha per posizione il punto comune al piano Ma e alla retta b, cioè il punto comune alle rette a, b, che è

Giova osservare che:

se A, B *sono* $\mathbf{F}_1$ *ed* a *è una* $\mathbf{F}_2$ *degli* **strati** σ, allora:	*se* α, β *sono* $\mathbf{F}_3$ *ed* a *è una* $\mathbf{F}_2$ *delle* **stelle** S, allora:
(2) $AB \cdot a = \frac{Aa}{\sigma} B - \frac{Ba}{\sigma} A$	(2) $\alpha\beta \cdot a = \frac{\alpha a}{S} \beta - \frac{\beta a}{S} \alpha$ (1).

Si noti pure che, tanto per lo ***strato*** quanto per la ***stella***, si ha:

(3) $$ab = -ba$$ [cfr. la (6) più generale] (2).

Quando si operi soltanto in uno ***strato*** σ di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, e in una ***stella*** S di $\mathbf{F}_3$ e $\mathbf{F}_2$, allora si può **sottintendere, ma non sopprimere,** il divisore σ, o S, nelle (2) e scriverle semplicemente:

(2′) $AB \cdot a = Aa \cdot B - Ba \cdot A$, (2′) $\alpha\beta \cdot a = \alpha a \cdot \beta - \beta a \cdot \alpha$.

Quando si considera lo ***strato*** avente per sostegno il ***piano all'infinito***, allora come forma σ conviene scegliere il trivettore unitario Ω.

b) In tutto ciò che segue A_r, A_s, A_t, sono, rispettivamente delle $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{F}_s$, $\mathbf{F}_t$ di uno ***strato*** ($r, s, t = 1, 2$) o di una ***stella*** ($r, s, t = 3, 2$).

I prodotti di due $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_2$ di uno ***strato***, dànno ***tutte*** le $\mathbf{F}_2$, o $\mathbf{F}_1$, dello strato,	I prodotti di due $\mathbf{F}_3$, o $\mathbf{F}_2$, di una ***stella***, dànno ***tutte*** le $\mathbf{F}_2$, o $\mathbf{F}_3$, della stella,

---

indipendente da M. Vedremo [cfr. (2)] che il coefficiente $1/(M\sigma)$ rende ***indipendente da M*** anche la $\mathbf{F}_1 ab$. Per dualità la posizione (1) a destra.

(1) Infatti. Posto (a sinistra) $k = 1/(M\sigma)$ e ricordando che $(Aa)/\sigma, \ldots$ sono numeri reali, si ha [cfr. la (1) e n. 2]:

$$AB \cdot a = kMAB \cdot a = k\,(MAa \cdot B - MBa \cdot A) =$$
$$= k \left\{ M\left(\frac{Aa}{\sigma}\sigma\right) \cdot B - M\left(\frac{Ba}{\sigma}\sigma\right) \cdot A \right\} = kM\sigma\left(\frac{Aa}{\sigma} B - \frac{Ba}{\sigma} A\right) = \text{ecc.};$$

c. d. d.

(2) Dalla (1), ad es. a sinistra, si ha:

$$ab = kMa \cdot b = -kMb \cdot a + kab \cdot M = -kMb \cdot a = -ba,$$

poichè in $ab \cdot M$, ab è prodotto ordinario alternato e vale quindi zero.

poichè [cfr. *a*)], a ***sinistra*** per lo ***strato***, a ***destra*** per la ***stella***:
quando **non** *è* $r = s = 2$

(4) $A_r A_s$ *è una* $\mathbf{F}_{r+s}$ (4) $A_r A_s$ *è una* $\mathbf{F}_{r+s-4}$;

quando è $r = s = 2$

(5) $A_r A_s$ *è una* $\mathbf{F}_1$ (una $\mathbf{F}_{r+s-3}$) (5) $A_r A_s$ *è una* $\mathbf{F}_3$ (una $\mathbf{F}_{r+s-1}$).

Sia per lo ***strato*** che per la ***stella*** si ha:

(6) $$A_r A_s = (-1)^{r+s+1} A_s A_r.$$

Vale la ***proprietà distributiva*** del ***prodotto*** rispetto alla ***somma***.

Per il prodotto di tre fattori si ha che:

è associativo *per* $r + s + t = 3, 6$ *nello* **strato**;
per $r + s + t = 9, 6$ *nella* **stella**,

(7) $$A_r A_s \cdot A_t = A_r \cdot A_s A_t = A_r A_s A_t;$$

non è associativo *per* $r + s + t = 4, 5$ *nello* **strato**;
per $r + s + t = 8, 7$ *nella* **stella**,

(8) $$A_r A_s \cdot A_t = A_r A_t \cdot A_s - (-1)^{r+s} A_s A_t \cdot A_r.$$

c) Tanto nello ***strato*** di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, quanto nella ***stella*** di $\mathbf{F}_3$ e $\mathbf{F}_2$, vale un ***principio di dualità*** che si enuncia come quello generale, salvo che: nello ***strato*** si scambiano tra loro le $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ e nella ***stella*** le $\mathbf{F}_3$ ed $\mathbf{F}_2$; nello ***strato*** le $\mathbf{F}_3$ (multiple di σ) e nella ***stella*** le $\mathbf{F}_1$ (multiple di S) funzionano come i numeri (le $\mathbf{F}_4$) nel principio di dualità generale nello spazio.

4. Sistemi lineari a due dimensioni.

Sia s una $\mathbf{F}_2$ non nulla ad invariante nullo ($ss = 0$). Chiameremo **fascio** di $\mathbf{F}_1$, o di $\mathbf{F}_3$, aventi s per *sostegno*, il sistema formato dalle $\mathbf{F}_1$, A, o dalle $\mathbf{F}_3$, α, tali che $As = 0$, o $\alpha s = 0$ (cioè le $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_3$, giacenti in s o passanti per s).

Sia S una $\mathbf{F}_1$, σ una $\mathbf{F}_3$ non nulla uscente da S (cioè $S\sigma = 0$). Chiameremo **fascio** *di* $\mathbf{F}_2$, aventi S per *centro* e σ per *sostegno*, il sistema delle $\mathbf{F}_2$, a, tali che $Sa = 0$, $\sigma a = 0$ (cioè le $\mathbf{F}_2$ passanti per S e giacenti in σ).

I *fasci* di $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ dànno *tutti i sistemi lineari di* $\mathbf{F}$ *a due dimensioni.*

I *fasci* di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_3$ si corrispondono nella legge generale di dualità, ecc.

Il prodotto alternato di due elementi di un fascio di $\mathbf{F}_1$ o $\mathbf{F}_3$, è un multiplo di s; il prodotto alternato (regressivo; cfr. n. 3) di due elementi di un fascio di $\mathbf{F}_2$ è un multiplo di S (centro del fascio).

Sia a_1, a_2, a_3, a_4, una *successione* di elementi di un *fascio.* Definiamo il **birapporto,** o **rapporto** *della successione*, ponendo:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rapp}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_1 a_3}{a_2 a_3} \cdot \frac{a_2 a_4}{a_1 a_4},$$

per $a_2 a_3 \neq 0$ e $a_1 a_4 \neq 0$, ed in caso contrario attribuendogli il valore ∞.

Poichè il prodotto per un numero (non nullo) *non altera* la **posizione** *di una* $\mathbf{F}$ risulta subito dalla (1) che il $\operatorname{rapp}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ *è una funzione della successione formata con le* **posizioni** *delle* a. Resta così definito, in una sola volta, il birapporto di una successione di quattro *elementi proiettivi* di un fascio, ecc.

5. Trasformazioni lineari (omografie).

Chiameremo **omografia** *tra* $\mathbf{F}_r$ *e* $\mathbf{F}_s$ $(r, s = 1, 2, 3)$ ogni *operatore lineare* che trasforma le $\mathbf{F}_r$ *di un sistema lineare ad* n *dimensioni* $(n = 4, 3, 2)$ nelle $\mathbf{F}_s$ di un *sistema lineare pure ad* n *dimensioni* (i due sistemi avendo campi, o sostegni, distinti o coincidenti) [1]. In particolare in luogo di

---

[1] Le *omografie vettoriali* studiate nel Vol. I di A. V. G. sono omografie tra $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_1$ giacenti nel *piano all'infinito*, cioè omografie tra *vettori* e *vettori*.

omografia, termine generico, possiamo dire **collineazione**, o **correlazione** secondo che $r = s$, ovvero $r \neq s$.

Se λ *è omografia tra* $\mathbf{F}_r$ e $\mathbf{F}_s$ e μ *è omografia tra* $\mathbf{F}_s$ *e* $\mathbf{F}_t$, entrambe per sistemi ad n dimensioni, allora: $\mu\lambda$ *è omografia tra* $\mathbf{F}_r$ *e* $\mathbf{F}_t$, mentre $\lambda\mu$ può esser privo di significato. Le proprietà generali degli *operatori lineari* si intendono note [cfr. A. V. G., Vol. I, Intr. II].

Esponiamo alcune proprietà delle omografie [1], avendo λ, μ il significato già stabilito ed essendo m numero reale.

a) Consideriamo i campi di $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ a quattro dimensioni (r, s, $t = 1, 2, 3$).

(1) *È univocamente determinato un numero reale, funzione soltanto di* λ, *che indicheremo con* $\mathfrak{D}\lambda$, *e chiameremo* **determinante** *di* λ, *tale che*

$$\lambda a_1 \cdot \lambda a_2 \cdot \lambda a_3 \cdot \lambda a_4 = \mathfrak{D}\lambda \cdot a_1 a_2 a_3 a_4$$

qualunque *siano le* $\mathbf{F}_r$, a_1, a_2, a_3, a_4, *sulle quali opera* λ.

(2) $\mathfrak{D}\lambda \neq 0$ *è la condizione*, **necessaria** *e* **sufficiente,** *affinchè* λ sia **invertibile,** *cioè* λ^{-1} *sia omografia tra* $\mathbf{F}_s$ *e* $\mathbf{F}_r$.

(3) $\mathfrak{D}(\mu\lambda) = \mathfrak{D}\mu \cdot \mathfrak{D}\lambda$.

(4) *È univocamente determinata una omografia, funzione soltanto di* λ, *tra* $\mathbf{F}_{4-r}$ *e* $\mathbf{F}_{4-s}$, *e che indicheremo con* $\mathfrak{R}\lambda$, *tale che*

$$\lambda a_1 \cdot \lambda a_2 \cdot \lambda a_3 = \mathfrak{R}\lambda(a_1 a_2 a_3)$$

qualunque *siano le* $\mathbf{F}_r$, a_1, a_2, a_3, *sulle quali opera* λ.

(5) $\mathfrak{D}m = m^4$, $\quad \mathfrak{R}m = m^3$.

---

[1] Le otteniamo sotto forma *assoluta*, cioè indipendente da coordinate. Per chi senta il bisogno di valersi di coordinate, basta che osservi che λ è individuata da

$$\lambda a_i = x_{i1} a_1' + x_{i2} a_2' + \dots + x_{in} a_n', \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove le a_i sono $\mathbf{F}_r$, date, linearmente indipendenti (cioè $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$) e le a_i' sono delle $\mathbf{F}_s$, pure date, e le x sono numeri reali. Se poi questa forma mista si trova ancora troppo assoluta si considera soltanto la *matrice* formata con le x; il che si fa sempre mancando gli elementi assoluti.

(6) Se a è una $\mathbf{F}_r$ e b è una $\mathbf{F}_{4-r}$ si ha:

$$\lambda a \cdot \mathfrak{R}\lambda b = \mathfrak{D}\lambda \cdot ab.$$

(7) $\mathfrak{R}(\mu\lambda) = \mathfrak{R}\mu \cdot \mathfrak{R}\lambda$.

(8) $\mathfrak{R}\mathfrak{R}\lambda = (\mathfrak{D}\lambda)^2\lambda$.

(9) $\mathfrak{D}\mathfrak{R}\lambda = (\mathfrak{D}\lambda)^3$.

(10) *L'equazione, rispetto alla omografia incognita* ξ, *essendo data* λ *invertibile, cioè essendo* $\mathfrak{D}\lambda \neq 0$,

$$\mathfrak{R}\xi = \lambda,$$

ha per unica soluzione

$$\xi = (\mathfrak{R}\lambda)/(\mathfrak{D}\lambda)^{2/3}.$$

(11) *Se* $r + s = 4$ *allora* λ *è* **correlazione** *che è* **polarità,** *ovvero è* **sistema nullo,** *secondochè*

$$a \cdot \lambda b - b \cdot \lambda a = 0, \quad \textit{ovvero} \quad a \cdot \lambda b + b \cdot \lambda a = 0$$

qualunque siano le **F**, a, b. — *Nel caso della* **polarità** *le* $\mathbf{F}_1$, *od* $\mathbf{F}_3$, **unite** *dànno le* **quadriche** *come* **luogo di punti** ($r = 1$), *o come* **inviluppo di piani** ($r = 3$). — *Nel sistema nullo* **tutte** *le* **F** *sono* **unite.** — *Le quadriche si ottengono anche come luogo di elementi uniti di una correlazione che non è sistema nullo; anzi questo è il caso più generale.*

Dimostriamo ora le (1)-(11).

Dim. (1). Il primo membro della formula del teorema (1) è un *numero* funzione *lineare alternata* delle a e quindi [cfr. A. V. G., Vol. I] è vero il teorema.

Dim. (2). Per $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$ si ha $\mathfrak{D}\lambda = 0$ solamente quando le λa non sono linearmente indipendenti; ecc.

Dim. (3). $\mathfrak{D}(\mu\lambda) \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 = \mu\lambda a_1 \cdot \mu\lambda a_2 \cdot \mu\lambda a_3 \cdot \mu\lambda a_4 =$
$= \mathfrak{D}\mu \cdot (\lambda a_1 \cdot \lambda a_2 \cdot \lambda a_3 \cdot \lambda a_4) = \mathfrak{D}\mu \cdot \mathfrak{D}\lambda(a_1 a_2 a_3 a_4)$; c. d. d.

Dim. (4). Come per la (1).

Dim. (5). Immediatamente da (1) e (4).

Dim. (6). Si può porre $b = c_1 c_2 c_3$, ove le c sono delle $\mathbf{F}_r$. Allora: $\lambda a \cdot \mathfrak{R}\lambda b = \lambda a \cdot \lambda c_1 \cdot \lambda c_2 \cdot \lambda c_3 = \mathfrak{D}\lambda \cdot a c_1 c_2 c_3 = \mathfrak{D}\lambda \cdot ab$; c.d.d.

DIM. (7). $\mathfrak{R}(\mu\lambda)(a_1\, a_2\, a_3) = \mu\lambda a_1 \cdot \mu\lambda a_2 \cdot \mu\lambda a_3 =$
$= \mathfrak{R}\mu(\lambda a_1 \cdot \lambda a_2 \cdot \lambda a_3) = \mathfrak{R}\mu \cdot \mathfrak{R}\lambda(a_1\, a_2\, a_3)$; c. d. d.

DIM. (8). Se a_1, a_2, a_3 sono $\mathbf{F}_{4-r}$ arbitrarie, allora $a_1\, a_2\, a_3$ è una generica $\mathbf{F}_r$. Ora si può porre

$$a_1 = pbc, \quad a_2 = pca, \quad a_3 = pab, \quad \text{con} \quad p, a, b, c \ \text{delle} \ \mathbf{F}_r$$

e si ha subito $a_1\, a_2\, a_3 = (pabc)^2 p$; in conseguenza

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}\lambda(a_1\, a_2\, a_3) = \mathfrak{R}\lambda a_1 \cdot \mathfrak{R}\lambda a_2 \cdot \mathfrak{R}\lambda a_3 = (\lambda p \cdot \lambda b \cdot \lambda c)(\lambda p \cdot \lambda c \cdot \lambda a)(\lambda p \cdot \lambda a \cdot \lambda b) =$$
$$= (\lambda p \cdot \lambda a \cdot \lambda b \cdot \lambda c)^2 \lambda p = (\mathfrak{D}\lambda)^2 \cdot (pabc)^2 \cdot \lambda p = (\mathfrak{D}\lambda)^2 \cdot \lambda(a_1\, a_2\, a_3); \ \text{c. d. d.}$$

DIM. (9). Siano a_i delle $\mathbf{F}_r$ e b_i delle $\mathbf{F}_{4-r}$, per $i = 1, 2, 3, 4$. Da (6) si ha:

$$\lambda a_i \cdot \mathfrak{R}\lambda b_i = \mathfrak{D}\lambda \cdot a_i b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

dal prodotto di queste, mediante i soliti prodotti alternati, si ha subito:

$$\mathfrak{D}\lambda \cdot a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{R}\lambda \cdot b_1\, b_2\, b_3\, b_4 = (\mathfrak{D}\lambda)^4 \cdot a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \cdot b_1\, b_2\, b_3\, b_4,$$

che dimostra la (9) per $\mathfrak{D}\lambda \neq 0$ e, a causa della continuità, anche per $\mathfrak{D}\lambda = 0$.

DIM. (10). Dalla (9), applicando $\mathfrak{D}$ ai due membri della equazione data si ha $(\mathfrak{D}\xi)^3 = \mathfrak{D}\lambda$; applicando invece $\mathfrak{R}$ si ha dalla (8) $(\mathfrak{D}\xi)^2 \xi = \mathfrak{R}\lambda$; eliminando il $\mathfrak{D}\xi$ si ha, appunto, la formula risolutiva indicata [1].

a') Valgano ancora le ipotesi *a*). Se a, b sono delle $\mathbf{F}_r$, allora $\lambda a \cdot \lambda b$ è una funzione di ab [2]. In conseguenza,

---

[1] Per la (11) cfr. C. BURALI-FORTI, *Lezioni di Geometria metrico-proiettiva* (Torino, Bocca, 1904). Notiamo soltanto questo. Dalla seconda condizione (11) si ricava $a \cdot \lambda a = 0$ il che esprime che ogni $\mathbf{F}_r$ è unità; non così dalla prima. Una correlazione λ è sempre riduttibile, in un sol modo, alla *somma* di una *polarità* con un *sistema nullo*.

[2] Basta dimostrare che da $ab = cd$ segue $\lambda a \cdot \lambda b = \lambda c \cdot \lambda d$. Infatti. Se $ab = 0$, a è multiplo di b; anche λa è multiplo di λb, vale a dire $\lambda a \cdot \lambda b = 0$. Se $ab \neq 0$ e $ab = cd$, allora $c = xa + yb$, $d = x'a + y'd$ da cui

$$cd = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} ab, \ \text{con} \ \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = 1 \ \text{e} \ \lambda c \cdot \lambda d = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \lambda a \cdot \lambda b = \lambda a \cdot \lambda b; \quad \text{c. d. d.}$$

poichè $\lambda a \cdot \lambda b$ è una funzione lineare alternata di a e di b: *esiste un operatore* $\mathfrak{R}'\lambda$, *funzione di* λ *soltanto e tale che*

$$(12) \qquad \lambda a \cdot \lambda b = \mathfrak{R}'\lambda(ab)$$

qualunque siano le $\mathbf{F}_r$, a, b.

L'operatore $\mathfrak{R}'\lambda$ è *commutabile* col *prodotto per un numero*, ma *non è lineare* perchè le ab sono $\mathbf{F}_2$ ad *invariante nullo* e, in generale, non formano un sistema lineare. Quindi $\mathfrak{R}'\lambda$ *non è, in generale, una omografia.*

Peraltro se le a, b appartengono ad uno stesso *strato* o ad una stessa *stella*, allora i prodotti ab formano un sistema lineare e quindi, in tali campi, $\mathfrak{R}'\lambda$ è certamente una omografia [cfr. b)].

b) Operando su di uno *strato* σ di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, o su di una *stella* S di $\mathbf{F}_3$ e $\mathbf{F}_2$ si possono introdurre, come in a), gli operatori $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{R}$ [notando che l'$\mathfrak{R}'$ definito dalla (12) viene a coincidere con l'$\mathfrak{R}$ definito dalla (4)] e si ottengono formule analoghe a quelle indicate in a), però in un campo a tre dimensioni.

Le condizioni (11) dànno ancora le condizioni, necessarie e sufficienti, affinchè λ sia *polarità* o *sistema nullo* [cfr. l. c. nella Dim. (11)].

c) Operando in un *fascio*, gli operatori $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{R}$ divengono inutili.

Le condizioni (11) esprimono, rispettivamente, che λ è una *involuzione* ovvero si riduce ad un *numero*.

6. Coordinate in un sistema lineare di F.

Sia U un sistema lineare ad n dimensioni ($n = 2, 3, 4$) di $\mathbf{F}$ e siano u_1, u_2, ..., u_n elementi linearmente indipendenti di U, cioè tali che

$$u_1 u_2 \ldots u_n \neq 0.$$

Fissato, ad arbitrio, un elemento u di U sono univocamente determinati [cfr. A. V. G., Vol. I] i numeri reali x_i tali che

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots x_n u_n.$$

È facile verificare che i numeri x sono le ***coordinate omogenee proiettive*** (dette di FIEDLER) della ***posizione*** di u rispetto alle ***posizioni*** delle u_i, essendo la ***posizione*** di $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ l'***elemento unità.***

Resta così evidente che il calcolo con le **F** (che non ha, del resto, bisogno di far uso di coordinate) semplifica notevolmente gli ordinari procedimenti analitico-proiettivi, anche quando si vogliano introdurre le coordinate omogenee proiettive.

Capitolo II.

Alcune nozioni fondamentali.

1. Generalità.

a) Sia p una **F** non nulla, avente posizione (cioè una $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_3$), funzione continua, derivabile ecc. di un *numero complesso h di ordine n* i cui elementi (numeri reali) $h_1, h_2, \ldots, h_n$, varino, indipendentemente l'uno dall'altro, in intervalli dati. La *posizione di p*, posit p, è pure una funzione di h che, per *tutti* i valori di h nel campo considerato, costituisce una *classe di* **figure proiettive,** i cui elementi sono *punti, rette, piani proiettivi,* o sono classi di tali elementi. Sono appunto queste *figure proiettive* che intendiamo studiare, ottenendole dalle posizioni delle **F** mediante il *calcolo geometrico* del quale abbiamo indicati i fondamenti nel Cap. I.

Esaminiamo rapidamente alcune figure proiettive fondamentali.

1°. Sia p funzione del numero reale relativo u.

Se p è una $\mathbf{F}_1$, *o* $\mathbf{F}_2$, *di uno* **strato** *allora, col variare di u, la* posit p *descrive, o una* **classe di punti (linea piana)** *o una* **classe di rette (inviluppo piano).**

Se p è una $\mathbf{F}_3$, *o* $\mathbf{F}_2$ *di una* **stella** *allora, col variare di u la* posit p *descrive, o una* **classe di piani (inviluppo conico),** *o una* **classe di rette (cono)** [1].

Se p è una $\mathbf{F}_2$, *ad invariante nullo, dello spazio generale*

---

[1] *Linee* ed *inviluppi* si corrispondono nella *dualità* sullo *strato*; *inviluppo conico* e cono, idem sulla *stella*. Le figure a sinistra e a destra si corrispondono nel principio generale di dualità nello spazio.

allora, col variare di u, *la* posit p *descrive una* **classe di rette (superficie rigata).**

Se p *è una* $\mathbf{F}_1$, *od* $\mathbf{F}_3$, *dello spazio generale allora, col variare di* u, *la* posit p *descrive, o una* **classe di punti (linea),** *o una* **classe di piani (inviluppo di piani).** Figure corrispondenti nel principio generale di dualità.

2°. Sia p funzione dei numeri reali u, v variabili indipendenti.

Se p *è una* $\mathbf{F}_2$, *ad invariante nullo allora, col variare di* u, v, *la* posit p *descrive una* **classe** ∞^2 **di rette** (*una* **congruenza di rette).**

Se p *è una* $\mathbf{F}_1$, *o* $\mathbf{F}_3$ *allora, col variare di* u, v, *la* posit p *descrive, o una* **classe** ∞^2 **di punti** (*una* **superficie**), *o una* **classe** ∞^2 **di piani** (*un* **inviluppo di piani**). Figure corrispondenti nel principio generale di dualità.

3°. Analogamente per p funzione di tre o più variabili indipendenti e allora si ottengono dei sistemi di figure proiettive.

b) Se p è funzione dei numeri $u, v, w, \ldots$, distinti o pur no, variabili indipendenti, allora con le notazioni

$$p_u, \quad p_{uv}, \quad p_{uvw}, \ldots$$

indichiamo, rispettivamente: la *derivata parziale prima* di p rispetto ad u; la *derivata parziale seconda* di p rispetto ad u e v; la *derivata parziale terza* di p rispetto ad u, v, w; ecc.

Intendiamo sempre che: *p sia funzione continua di $u, v, w, \ldots$, che ammetta le derivate parziali di qualsiasi ordine, e che tali derivate siano commutabili.*

In particolare se p è funzione di una sola variabile u, preferiamo indicare, come d'uso, le derivate (in tal caso *totali*) di p con gli apici.

c) Per i *differenziali* e *derivate* di p valgono, come è noto [cfr. A. V. G., Vol. I], le ordinarie leggi del calcolo differenziale, più quelle dovute alle particolari proprietà delle **F**.

Ad es.; se p è funzione di u e v e queste sono funzioni di x e y, variabili numeriche pure indipendenti, allora si ha

$$dp = p_u du + p_v dv = p_x dx + p_y dy\,,$$
$$\delta p = p_u \delta u + p_v \delta v = p_x \delta_x + p_y \delta_y\,;$$

e se p è $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_3$, o $\mathbf{F}_2$ variabile in uno strato o in una stella, allora

$$dp \cdot \delta p = \begin{vmatrix} du & dv \\ \delta u & \delta v \end{vmatrix} p_u p_v = \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix} p_x p_y$$

perchè $p_u p_u = 0$ ecc.; e risulta che: *la posizione di* $p_u p_v$ *è* **identica** *alla posizione di* $p_x p_y$ cioè che: *la posizione di* $p_u p_v$ *è* **indipendente** *dalle variabili numeriche* u, v.

Nelle stesse ipotesi si ha, ed es.,

$$p_{xy} = u_x u_y p_{uu} + (u_x v_y + u_y v_x) p_{uv} + v_x v_y p_{vv}$$

dalla quale si trae facilmente

$$p_{xx} p_{xy} p_{yy} = \begin{vmatrix} u_x v_x \\ u_y v_y \end{vmatrix}^3 p_{uu} p_{uv} p_{vv}$$

la quale prova che: ***la posizione di*** $p_{uu} p_{uv} p_{vv}$ *è* **indipendente** *da* u *e* v.

d) Tornando a considerare p funzione del *numero complesso* h, e indicando con p_1 il valore che assume p quando la variabile h diviene $h + dh$ si ha la formula di Taylor [cfr. A. V. G., Vol. I]

(1) $$p_1 = p + dp + \frac{1}{2!} d^2 p + \ldots + \frac{1}{n!} d^n p + \varepsilon$$

ove ε è una **F**, della stessa specie di p, ed è tale che

(1′) $$\lim_{dh \to 0} \{ \varepsilon / (\bmod\, dh)^n \} = 0.$$

Se p è funzione della sola variabile numerica u, e p_1 corrisponde ad $u + k$, allora alla formula di Taylor si può dare la forma

$$(2) \qquad p_1 = p + kp' + \frac{k^2}{2!} p'' + \dots + \frac{k^n}{n!} (p^{(n)} + \eta)$$

ove η è funzione di u e di k tale che

$$(2') \qquad \lim_{k \to 0} \eta = 0.$$

2. Enti e proprietà geometriche proiettive intrinseche, o assolute, di una figura proiettiva.

Sia Σ una *figura proiettiva* costituita da un sistema ∞^1, o ∞^2 (e si può anche considerare un sistema ∞^n) continuo di *elementi proiettivi, punto, retta, piano*; cioè Σ sia, o una *linea*, o una *superficie*, o un *inviluppo di rette o di piani.*

Per ottenere enti geometrici collegati con Σ, o per studiare le proprietà proiettive di questi enti e di Σ, noi dobbiamo considerare una **F**, non nulla, p, funzione, o di *un* numero u, o di *due* numeri u, v (variabili indipendenti) tale che: variando u, v in dati intervalli, la *posizione* di p, posit p, dia *tutti* e *soli* gli elementi proiettivi di Σ. Le *trasformazioni proiettive* di Σ e degli enti collegati con Σ, le otteniamo operando con *omografie* [cfr. Cap. 1, n. 5] λ da applicarsi alle **F** rappresentative p; omografie generiche *costanti*, fatta eccezione per quelle che si riducono al prodotto per un numero m che può anche essere funzione di p.

Gli enti proiettivi collegati con Σ e le proprietà proiettive di tali enti e di Σ, sono *funzioni* **soltanto** *di* Σ, sebbene espresse mediante p, u, v, λ quali elementi ausiliari, e si diranno **intrinseci, o assoluti,** quando:

a) *Non variano cambiando p in mp, ove m è numero reale, non nullo, anche funzione di p* (1);

(1) È ben noto che *il prodotto per un numero non altera la posizione di una* **F**. Ne segue che la figura Σ individuata dalle *posizioni* delle p è *identica* alla figura individuata dalle *posizioni* delle mp. Quando si opera con *coordinate proiettive omogenee* ciò equivale a moltiplicare tali coordinate per un numero.

b) ***Sono indipendenti da u, v***; vale a dire: ***non variano esprimendo u, e quindi anche p, in funzione di una nuova variabile x, ovvero esprimendo u e v in funzione di due nuove variabili, indipendenti, x, y;***

c) ***Non cambiano di specie, o si trasformano per dualità, cambiando p in λp, ove λ è omografia generica*** (**costante**, ***salvo il caso***, [cfr. *a*)], ***che si riduca ad un numero***).

Illustriamo con alcuni esempi.

Esempio 1°. Sia p una $\mathbf{F}_1$ funzione di u, v, cioè Σ sia una *superficie*. Vedremo [cfr. n. 5] che pp_up_v è la ***forma tangente*** in p, e se non è nulla, la sua *posizione* è precisamente il ***piano tangente a Σ in p***.

Ora si ha:

$$(mp)(mp)_u(mp)_v = (mp)(m_up + mp_u)(m_vp + mp_v) = m^3 \cdot pp_up_v,$$

$$pp_xp_y = p(u_xp_u + v_xp_v)(u_yp_u + v_yp_v) = \begin{vmatrix} u_x v_x \\ u_y v_y \end{vmatrix} \cdot pp_up_v$$

e quindi la *forma tangente* ha posizione indipendente da m, u, v, cioè, per le *a*), *b*) il ***piano tangente*** a Σ in p è ***elemento intrinseco***.

Se λ è omografia *costante*, allora $(\lambda p)_u = \lambda p_u$, ecc., e quindi [cfr. Cap. I, n. 5, (4)]

$$(\lambda p)(\lambda p)_u(\lambda p)_v = \mathfrak{R}\lambda(pp_up_v)$$

vale a dire: una trasformazione proiettiva λ cambia il ***piano tangente*** nel ***piano tangente*** (se λ è ***collineazione***), il ***piano tangente*** nel ***punto dell'inviluppo*** (se λ è ***correlazione***); cioè sussiste la proprietà *c*). Se, invece, λ *non* è costante, allora $(\lambda p)_u = \lambda_u p + \lambda p_u$ e la *c*) non vale eccettuato il caso che λ sia un numero.

Esempio 2°. Valendo per p le ipotesi dell'Esempio 1°, si consideri la *retta* posizione di p_up_v. Questa retta, giacente sul piano tangente a Σ in p, è ***indipendente da u, v***, perchè

$$p_xp_y = \begin{vmatrix} u_x v_x \\ u_y v_y \end{vmatrix} p_up_v,$$

ma *non* è indipendente da m, perchè

$$(mp)_u(mp)_v = (m_u p + m p_u)(m_v p + m p_v) = m^2 p_u p_v + m p (m_u p_v - m_v p_u)$$

è retta che, pur giacendo nel piano tangente, è *diversa* dalla retta $p_u p_v$ poichè, per m, m_u, $p p_u p_v$ non nulli si ha subito

$$p_u (mp)_u (mp)_v = - m m_u \cdot p p_u p_v \neq 0.$$

Per λ costante si ha $(\lambda p)_u(\lambda p)_v = \mathfrak{R}' \lambda (p_u p_v)$ e si conserva la proprietà proiettiva della retta $p_u p_v$.

Dunque per la retta $p_u p_v$ valgono le proprietà b), c) ma *non* vale la a) e quindi la retta $p_u p_v$ **non** *è elemento intrinseco di* Σ (e se lo fosse sarebbe ben strano).

Analogamente, posto $\pi = p p_u p_v$, la retta $\pi_u \pi_v$ (uscente da p e situata fuori del piano tangente) **non** *è elemento intrinseco di* Σ (1).

Esempio 3°. Valendo le precedenti ipotesi e posto $\pi = k \cdot p p_u p_v$ si può determinare il numero k, funzione di p, in modo che sia soddisfatta una particolare proprietà di *dualità* tra p e π [cfr. n. 5, (7)]. Anche per tale valore di k la retta $\pi_u \pi_v$ non è intrinseca. Può avvenire [cfr. n. 5 Osser.] che una proprietà *non intrinseca* per k arbitrario divenga *intrinseca* per quel valore particolare di k. Tale proprietà è realmente intrinseca, nel significato a), b), c), perchè π è *definito* come multiplo di $p p_u p_v$, il che *non* cambia la posizione del piano tangente, e cambiando p in mp anche π si cambia in un suo multiplo.

Giova peraltro notare che, ammessa anche la possibilità di determinare m in un modo particolare, la retta $\pi_u \pi_v$, anche col valore speciale sopra indicato di k, **non** *può essere elemento intrinseco.*

---

(1) Se la *massa*, $p\omega$, di p non è nulla, allora $P = p/(p\omega)$ è *punto proprio* che descrive, col variare di u, v, la Σ, eccettuati i suoi punti all'infinito. Ecco perchè, come in a), si deve considerare m quale funzione di p. Si noti che le rette $P_u P_v$, $\pi_u \pi_v$ dànno, rispettivamente, la *retta all'infinito* del piano tangente a Σ in P e la *normale* a Σ in P. La c) vale ancora pur non conservandosi il carattere di *retta all'infinito* e di *normale* che *non* sono caratteri proiettivi.

3. Linee, coni, inviluppi in uno strato o stella.

Sia p una **F** funzione (continua, derivabile, ecc.) del numero reale u e precisamente:

A) una $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_2$, di uno *strato* σ; una $\mathbf{F}_3$, o $\mathbf{F}_2$, di una *stella* S;

B) una $\mathbf{F}_1$, o $\mathbf{F}_3$, dello *spazio generale*.

Inoltre sia Σ la figura proiettiva luogo delle posizioni di p per u variabile in un dato intervallo.

Indichiamo con p_1, p_2, ... ciò che diviene p quando u assume i valori particolari u_1, u_2, ... nel campo di variazione di u.

a) ***Se r è l'ordine della prima delle derivate di p per le quali $pp^{(r)} \neq 0$, allora la posizione limite di pp_1, col tendere di u_1 ad u, è la posizione di $pp^{(r)}$.***

Se s, con $s > r$ è l'ordine della prima delle derivate di p per la quale $pp^{(r)}p^{(s)} \neq 0$, allora la posizione limite di $pp^{(r)}p_1$, col tendere di u_1 ad u, è la posizione di $pp^{(r)}p^{(s)}$ (¹).

Nelle ipotesi fatte, $pp^{(r)}$, $pp^{(r)}p^{(s)}$ diconsi, rispettivamente, ***forma tangente*** e ***forma osculatrice*** in p.

In tutto ciò che segue supponiamo $pp'p'' \neq 0$, cioè $r=1$ e $s=2$; quindi le forme ***tangenti*** e ***osculatrici*** sono rispettivamente pp', $pp'p''$.

Queste forme hanno posizioni che sono elementi **intrinseci** *e* **proiettivi** di Σ [cfr. n. 2, e n. 1]. Il significato geometrico di queste forme è ovvio poichè hanno come posizioni le posizioni limiti di pp_1, $pp'p_1$ con posit p_1 comunque variabile in Σ e tendente a posit p.

a') Se anche le derivate di p sono *continue*, allora la ***forma tangente*** e la ***forma osculatrice***, per $pp'p'' \neq 0$, si può ottenere osservando che:

$$(1)\ \lim \frac{p_1p_2}{u_1-u_2} = pp', \quad \lim \frac{p_1p_2p_3}{(u_2-u_1)(u_3-u_1)(u_3-u_2)} = pp'p''$$

(¹) **Sviluppando p_1 con la formula di Taylor, e arrestandosi a $p^{(r)}$, ovvero a $p^{(s)}$, si ha subito, per le ipotesi fatte:**

$$pp_1 = \{(u_1-u)^r/r!\}\, pp^{(r)} + p\varepsilon, \quad pp^{(r)}p_1 = \{(u_1-u)^s/s!\}\, pp^{(r)}p^{(s)} + pp^{(r)}\varepsilon'$$

ove ε, ε' sono infinitesimi di ordine superiore ad r e s col tendere di u_1 ad u; il che dimostra quanto abbiamo affermato.

il limite intendendosi preso per u_1, u_2, u_3 variabili comunque nel campo di variazione di u e tendenti ad u (1). Il significato geometrico di p_1p_2, $p_1p_2p_3$ è ovvio e alquanto diverso da quello di pp_1, $pp'p_1$ considerato in a).

b) Nel caso A) la *forma osculatrice* $pp'p''$ ha a comune col sostegno σ, o S, la posizione. Invece per la *forma tangente* si hanno significati geometrici (*intrinseci, proiettivi*) importanti.

Se p è una $\mathbf{F}_1$ di σ, allora posit(pp') è la *retta tangente* a Σ in p; se p è una $\mathbf{F}_2$ di σ, allora posit(pp') è *il punto di p che descrive la linea inviluppata dalle p*. Osservando che [cfr. Cap. 1, n. 3, (2)]

$$(pp')(pp')' = (pp')(pp'') = (pp'p''/\sigma)p$$

risulta che: *la linea descritta da p è l'inviluppo delle sue tangenti;* e dualmente per le $\mathbf{F}_2$ di σ.

Col principio di dualità nello spazio generale si passa dallo *strato* σ alla *stella* S e si hanno *coni* e *inviluppi di piani* (uscenti da S) con i relativi *piani tangenti* e *retta caratteristica nel piano*; ecc.

---

(1) Infatti. Dalla formula di TAYLOR si ha, ad es.,

$$(a) \qquad p_2 - p_1 = (u_2 - u_1)p_2' + \varepsilon_2, \quad p_3 - p_1 = (u_3 - u_1)p_3' + \varepsilon_3$$

con ε_2, ε_3 infinitesimi di ordine superiore al primo. Osservando che

$$p_1p_2 = p_1(p_2 - p_1) = p_1 \{ (p_2 - p) - (p_1 - p) \}$$

dalle (a) si deduce subito la prima delle (1).

Si ha identicamente, per le (a):

$$\frac{p_1p_2p_3}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)} = p_1 \frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1} \left\{ \frac{p_3 - p_1}{u_3 - u_1} - \frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1} \right\} = p_1 \frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1}(p_3' - p_2') + \varepsilon$$

con ε infinitesimo di ordine superiore al terzo. In conseguenza

$$\frac{p_1p_2p_3}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} = p_1 \frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1} \frac{p_3' - p_2'}{u_3 - u_2} + \frac{\varepsilon}{u_3 - u_2}$$

che al limite, per le (a), dà appunto la seconda delle (1).

c) Nel caso *B*), e supposto che Σ non appartenga ad uno strato o ad una stella [cfr. *b*)], allora le posizioni di pp', $pp'p''$ dànno:

se p è una $\mathbf{F}_1$, la ***retta tangente*** e il ***piano osculatore*** in p;
se p è una $\mathbf{F}_3$, la ***caratteristica*** e il ***punto di regresso*** in p;

tutti elementi ***intrinseci*** e ***proiettivi*** [cfr. n. 2].

Se p è, ad es., una $\mathbf{F}_1$, allora $pp'p''$ dà un ***inviluppo di piani***, e poichè

$$(pp'p'')(pp'p'')'(pp'p'')'' = (pp'p'')(pp'p''')(pp''p''' + pp'p^{IV}) =$$
$$= (pp'p''p''' \cdot pp') \cdot (pp''p''' + pp'p^{IV}) = (pp'p''p''')^2 p,$$

risulta che, per $pp'p''p''' \neq 0$; ***la linea Σ è l'inviluppo dei suoi piani osculatori.*** Dualmente per una $\mathbf{F}_3$. Proprietà ***intrinseche, proiettive.***

4. Superficie rigate.

Sia p una $\mathbf{F}_2$ ad ***invariante nullo*** ($pp = 0$), funzione di u e p vari nello spazio generale. Il luogo Σ delle posizioni di p, per i valori u, è una ***superficie rigata*** della quale posit p è la ***generatrice generica.*** Lo studio delle superficie rigate, date da una $\mathbf{F}_2$, è già fatto nei libri citati nella prefazione (2ª nota) e non stiamo a ripeterlo, dovendo riserbare il poco spazio disponibile ad altre questioni non ancora trattate sotto forma assoluta.

5. Superficie in generale.

Sia P una $\mathbf{F}_1$, non nulla, funzione di u, v, variabili indipendenti. Il luogo Σ delle posizioni di P è una ***superficie.*** Per dualità si ha un ***inviluppo di piani.*** In entrambi i casi sistemi ∞^2. Noi consideriamo il caso delle $\mathbf{F}_1$ lasciando al lettore la cura di ottenere, per dualità, il caso delle $\mathbf{F}_3$.

a) *Se PP_uP_v è una $\mathbf{F}_3$ non nulla, la sua posizione è il* **piano tangente** *a Σ in P;* cioè: *la posizione limite del piano PP_1P_2 quando, P_1, P_2 variano comunque in Σ e tendono a P. Elemento intrinseco e proiettivo.*

Infatti. Se P_1, P_2 corrispondono ai valori $u+h_1$, $v+k_1$ e $u+h_2$, $v+k_2$ di u, v, si ha per la formula di TAYLOR

$$P_1 = P + h_1 P_u + k_1 P_v + \varepsilon_1, \quad P_2 = P + h_2 P_u + k_2 P_v + \varepsilon_2$$

con ε_1, ε_2 infinitesimi di ordine superiore al primo. Ma si ha:

$$PP_1P_2 = P(P_1 - P)(P_2 - P) = \begin{vmatrix} h_1 k_1 \\ h_2 k_2 \end{vmatrix} PP_uP_v + \varepsilon,$$

con ε infinitesimo di ordine superiore al secondo; ecc.; c. d. d. (¹).

b) Poniamo, per mezzo delle derivate parziali di P,

$$(1) \qquad \Delta = PP_uP_vP_{uu} \cdot PP_uP_vP_{vv} - (PP_uP_vP_{uv})^2.$$

Se $\Delta \neq 0$, il che implica $PP_uP_v \neq 0$, per tutti i valori di u, v, allora il piano PP_uP_v inviluppa la superficie Σ descritta da P.

Infatti. Dal duale del teorema *a*) e dai soliti prodotti alternati, si ha:

$$\begin{aligned}
&(PP_uP_v)(PP_uP_v)_u(PP_uP_v)_v = \\
&= (PP_uP_v)(PP_{uu}P_v + PP_uP_{uv})(PP_{uv}P_v + PP_uP_{vv}) = \\
&= (P_uPP_{uu}P_v \cdot P_vP + P_vPP_uP_{uv} \cdot PP_u)(PP_{uv}P_v + PP_uP_{vv}) = \\
&= PP_uP_vP_{uu} \cdot P_vPP_uP_{vv} \cdot P - PP_uP_vP_{uv} \cdot P_uPP_{uv}P_v \cdot P = \Delta \cdot P;
\end{aligned}$$

c. d. d.

c) Come $\mathbf{F}_3$ tangente a Σ in P si può assumere π comunque multiplo di $P \cdot dP \cdot \delta P$ essendo d, δ simboli di differenziali qualunque con $P \cdot dP \cdot \delta P \neq 0$. Le proprietà seguenti sono indipendenti, anche formalmente, da u, v.

(2) $\pi P = 0$, $\pi \cdot dP = 0$, $d\pi \cdot P = 0$, $(dP \cdot \delta P)\pi = 0$, $(d\pi \cdot \delta\pi)P = 0$

le quali esprimono rispettivamente che: *π passa per P; π passa per dP, cioè dP giace in π; $d\pi$ passa per P; la retta $dP \cdot \delta P$ giace in π; la retta $d\pi \cdot \delta\pi$ passa per P.*

(¹) Il piano tangente a Σ in P è anche la posizione limite del piano $P_1P_2P_3$ quando, variando comunque P_1, P_2, P_3 in Σ tendono a P.

$$(3)\quad \begin{cases} d\pi\cdot\delta P=\delta\pi\cdot dP=-\pi\cdot d\delta P=-d\delta\pi\cdot P, \text{ e in particolare}\\ \pi\cdot d^2P=d^2\pi\cdot P=-d\pi\cdot dP\end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \pi\cdot d^3P-d^3\pi\cdot P=d^2\pi\cdot dP-d\pi\cdot d^2P,\\ \pi\cdot d^4P-d^4\pi\cdot P=2(d^3\pi\cdot dP-d\pi\cdot d^3P), \text{ ecc.}\end{cases}$$

DIM. (2). La 1ª e 2ª sono immediate conseguenze dell'essere π un multiplo di $P\cdot dP\cdot\delta P$. Differenziando la 1ª e tenendo conto della 2ª si ha la 3ª. La 4ª e 5ª risultano geometricamente dalla 2ª e 3ª (scritte anche per δ) oppure osservando (prodotto regressivo) che

$$(dP\cdot\delta P)\pi=(dP\cdot\pi)\delta P-(\delta P\cdot\pi)dP=0-0=0.$$

DIM. (3). Operando con δ nella 3ª e 2ª delle (2), poichè d, δ sono commutabili, si ha

$$d\pi\cdot\delta P+d\delta\pi\cdot P=0,\quad \delta\pi\cdot dP+\pi\cdot d\delta P=0;$$

queste valgono scambiando tra loro d, δ e quindi sono vere le (3).

DIM. (4). Basta operare con d nelle forme particolari (3)([1]).

d) Se, essendo k un numero non nullo funzione di u e v, si pone

$$(5)\qquad \pi=k\cdot PP_uP_v,$$

([1]) Per l'ordinaria forma differenziale quadratica F_2 si ha, qualunque sia π multiplo di PP_uP_v,

$$F_2=\pi\cdot d^2P=d^2\pi\cdot P=-d\pi\cdot dP$$

e in conseguenza, dalle (3),

$$dF_2=\pi\cdot d^3P+d\pi\cdot d^2P=d^2\pi\cdot dP+d^3\pi\cdot P=d^2P\cdot d\pi+dP\cdot d^2\pi,$$

$$F_2{}^2=\pi\cdot d^2P\cdot(d^2\pi\cdot P)=-\{(P\cdot d^2\pi)\pi\}d^2P=(d^2\pi\cdot\pi)\cdot(P\cdot d^2P)=-P\cdot d^2P\cdot\pi\cdot d^2\pi.$$

L'ordinaria forma differenziale cubica F_3 vale $^1/_2$ del 1° membro della 1ª delle (4), ma per π multiplo particolare [cfr. n. 6] di PP_uP_v. La F_2 è intrinseca e proiettiva; la F_3 sempre proiettiva ma è intrinseca soltanto per il particolare π ora indicato [cfr. n. 2, Esempio 3°].

allora si ha [cfr. (1)]

(6) $\pi\pi_u\pi_v = k^3\Delta\cdot P = k\{\pi P_{uu}\cdot\pi P_{vv} - (\pi P_{uv})^2\}\cdot P = k(P_uP_v\cdot\pi_u\pi_v)\cdot P.$

Dim. La 1ª forma della (6) è immediata conseguenza della formula ottenuta nella dimostrazione *b*), poichè se $\pi' = PP_uP_v$ si ha in modo ovvio che

$$\pi\pi_u\pi_v = (k\pi')(k\pi')_u(k\pi')_v = k^3\pi'\pi_u'\pi_v'.$$

La 2ª forma si ottiene subito dalla 1ª e dalla (5).
Dalle (3) si ottiene subito

$$\pi P_{uu} = -\pi_u P_u,\quad \pi P_{vv} = -\pi_v P_v,\quad \pi P_{uv} = -\pi_u P_v = -\pi_v P_u;$$

da queste dalla 2ª forma (6) e con i noti prodotti alternati si ha:

$$\pi\pi_u\pi_v = k\{\pi_uP_u\cdot\pi_vP_v - \pi_uP_v\cdot\pi_vP_u\}\cdot P = k\{P_u\pi_u\cdot P_v - P_v\pi_u\cdot P_u\}\pi_v\cdot P =$$
$$= k\{(P_uP_v\cdot\pi_u)\pi_v\}\cdot P = k(P_uP_v\cdot\pi_u\pi_v)\cdot P; \qquad \text{c. d. d.}$$

e) *Se si vuole che*

(7) *da* $\pi = k\cdot PP_uP_v$ *segua* $P = \varepsilon k\cdot\pi\pi_u\pi_v$, *con* ε *segno* $+$ 0 $-$,

è necessario e basta che sia

(8) $k^4 = \varepsilon/\Delta$, *con* ε *segno di* Δ (*sempre* $\Delta \neq 0$);

e se valgono le (7), (8) *allora, comunque si fissi il numero reale m non nullo, anche funzione di P, se si cambia P in mP ne segue che* π *si cambia in* $m\pi$, *ovvero in* $-m\pi$, *secondochè k è la radice positiva o negativa della* (8).

Dim. Dalla 1ª forma (6) e dalla 2ª delle (7) si ha

$$\pi\pi_u\pi_v = k^3\Delta\cdot\varepsilon k\cdot\pi\pi_u\pi_v = \varepsilon k^4\Delta\cdot\pi\pi_u\pi_v$$

che, per $\Delta \neq 0$, dà $1 = \varepsilon k^4\Delta$ che dimostra la (8).

Cambiando P in mP il Δ diviene [cfr. (1)] $m^8\Delta$ e quindi il segno ε della (8) non cambia. Allora col cambiamento indicato, il π dato dalla prima delle (7) diviene

$$\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{m^8\Delta}}\cdot m^3 PP_uP_v = m\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\Delta}}\cdot\frac{\pi}{k},$$

cioè, per la (8), diviene $\pm m\pi$; c. d. d.

f) Per una superficie rigata basta porre

$$P = A + vB, \text{ o, dualmente, } \pi = \alpha + v\beta$$

con A, B delle $\mathbf{F}_1$ e α, β delle $\mathbf{F}_3$ funzioni soltanto di u.

Osservazioni. 1ª. Nelle formule *c)* il π è un multiplo *qualunque* di PP_uP_v *non necessariamente* soddisfacente alle condizioni (7), (8); cambiando P in mP il π diviene $m'\pi$ con m', in generale diverso da $\pm m$.

2ª. Le forme differenziali *c)*, di qualunque ordine, sono sempre *proiettive*, perchè, se λ è omografia costante si ha [cfr. Cap. 1, n. 5, (6)]

$$\mathfrak{R}\lambda\pi\cdot d^n(\lambda P) = \mathfrak{D}\lambda\cdot\pi\cdot d^nP.$$

3ª. La forma differenziale quadratica $d\pi\cdot dP$ [cfr. (3)] è *intrinseca* [cfr. Oss. 1ª] perchè

$$d(m'\pi)\cdot d(mP) = (dm'\pi + m'd\pi)(dmP + mdP) = m'm\cdot d\pi\cdot dP.$$

4ª. Per la forma differenziale cubica [cfr. (4)] si ha facilmente [cfr. (2) e (3)]:

$$m'\pi\cdot d^3(mP) - d^3(m'\pi)\cdot(mP) = mm'\{\pi\cdot d^3P - d^3\pi\cdot P\} + 3\begin{vmatrix} m & m' \\ dm & dm' \end{vmatrix} d\pi\cdot dP$$

tale forma risulta intrinseca quando il determinante è nullo, cioè $m' = cm$ con c costante; e poichè ciò si verifica per π soddisfacente alle (7) si può concludere [cfr. n. 2, Esempio 3°] che *la forma differenziale cubica è intrinseca*, con π non multiplo arbitrario di PP_uP_v ma soddisfacente alle (7), (8).

Si possono esaminare forme differenziali di 4ª, 5°, ... ordine.

6. Alcune proprietà metriche.

Valgano le notazioni del n. 5. Supposto che P sia *punto proprio*, cioè $P\omega = 1$, ed osservando che P_u, P_v sono, in tal caso, dei *vettori*, si ponga

$$(1) \qquad \begin{cases} h = \mathrm{mod}\,(P_u \wedge P_v), & n = (P_u \wedge P_v)/h. \text{ da cui} \\ h = P_u \wedge P_v \times n, & \pi = hk \cdot P|n. \end{cases}$$

Inoltre si introducano le notazioni seguenti:

$\mathcal{K}$ è la *curvatura totale* (di Gauss) di Σ in P;

$\mathcal{N}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{T}$ indicano, rispettivamente, la *curvatura normale*, la *curvatura geodetica*, la *torsione geodetica* in P nella direzione dP;

$\sigma = dn/dP$ (omografia che è *dilatazione*, cioè $\sigma = \mathrm{K}\sigma$).

a) *Le relazioni tra* Δ, h, k, $\mathcal{K}$ (*per* $\mathcal{K} \neq 0$) *sono le seguenti:*

$$(2) \qquad 36\Delta = h^4\mathcal{K}, \quad k^4 = 36/(h^4 \cdot \varepsilon\mathcal{K}), \quad (hk)^4 = 36/(\varepsilon\mathcal{K}),$$

essendo $\mathcal{K}$ *elemento* **intrinseco** *ma* **non proiettivo.** *Risulta che* ε *è il segno di* $\mathcal{K}$.

Dim. Per il numero Δ si ha [cfr. n. 5, (1)]

$$\begin{aligned} 36\Delta &= \frac{P_uP_vP_{uu}}{\Omega} \cdot \frac{P_uP_vP_{vv}}{\Omega} - \left(\frac{P_uP_vP_{uv}}{\Omega}\right)^2 = \\ &= h^2\{n \times P_{uu} \cdot n \times P_{vv} - (n \times P_{uv})^2\} = \\ &= h^2\{P_u \times n_u \cdot P_v \times n_v - P_u \times n_v \cdot P_v \times n_u\} = \\ &= h^2\{(P_u \wedge P_v) \times (n_u \wedge n_v)\} = \\ &= h^3 \cdot n \times n_u \wedge n_v = h^4\mathcal{K}, \end{aligned}$$

il che dimostra la 1ª delle (2) e che ε è il segno di $\mathcal{K}$. Da questa e dalla (8) del n. 5 risultano subito le altre due.

b) *Per la forma differenziale quadratica e cubica* [cfr. n. 5, (3), (4)] *si ha:*

$$(3) \qquad 6\pi \cdot d^2P = -hk \cdot dP \times \sigma dP$$

$$(4) \quad 6(d^2\pi \cdot dP - d\pi \cdot d^2P) = hk \cdot dP \times d\sigma dP + 3d(hk) \cdot dP \times \sigma dP,$$

che eguagliati a zero dànno le equazioni differenziali metriche delle **linee assintotiche** [cfr. Cap. 3, n. 2] *e delle* **linee di Darboux** [1] [cfr. Cap. 3, n. 3].

Dim. Osservando che

$$\pi\omega = hk|n, \quad d^2P \times n = -dP \times dn \quad (\text{perchè } dP \times n = 0)$$

e sviluppando due prodotti alternati [cfr. Cap. 1, n. 2, (3)], per $r=3$, $s=1$, $t=3$], si ha:

$$\begin{aligned} 6(d^2\pi \cdot dP - d\pi \cdot d^2P)\omega &= 6(d^2\pi\omega \cdot dP - d\pi\omega \cdot d^2P) = \\ &= 6[\{hk|d^2n + 2d(hk)|dn + d^2(hk)|n\}dP - \{hk|dn + d(hk)|n\}d^2P] = \\ &= [hk\{dP \times d^2n - d^2P \times dn\} + 3d(hk)dP \times dn]\omega = \\ &= [hk\{dP \times d\sigma dP + dP \times \sigma d^2P - d^2P \times \sigma dP\} + 3d(hk)dP \times \sigma dP]\omega, \end{aligned}$$

che dimostra la (4) poichè, essendo $K\sigma = \sigma$, si ha $dP \times \sigma d^2P = d^2P \times \sigma dP$. In modo analogo si dimostra la (3).

c) *Indicando, come d'uso, con ds l'elemento lineare in P nella direzione dP, cioè ponendo*

$$(5) \qquad \begin{cases} ds^2 = dP^2, \text{ da cui risulta, operando con } d, \\ ds \cdot ds = dP \times d^2P, \end{cases}$$

allora introducendo i numeri $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}$ si ha:

$$(6) \qquad \begin{cases} dP \times \sigma dP = ds^2 \cdot \mathfrak{N}, \\ dP \times d\sigma dP = ds^2 \cdot d\mathfrak{N} + 2ds^3 \cdot \mathfrak{G}\mathfrak{T}. \end{cases}$$

Dim. Per formule note [cfr. Parte I] si ha:

$$(a) \qquad ds^2 \cdot \mathfrak{N} = dP \times \sigma dP, \quad ds^3 \cdot \mathfrak{G} = n \times d^2P \wedge dP, \quad ds^2 \cdot \mathfrak{T} = n \times dP \wedge \sigma dP;$$

ma $dP \wedge \sigma dP$ è parallelo ad n e quindi, dalla 3ª delle (a),

$$ds^2 \cdot \mathfrak{T}n = dP \wedge \sigma dP;$$

---

(1) Che per $\mathfrak{K}$ costante si riduce a $dP \times d\sigma dP = 0$.

in conseguenza, dalle (a),

$$(b)\quad \begin{cases} ds^3\cdot\mathcal{G}\mathcal{T}=\{(dP\wedge\sigma dP)\times(d^2P\wedge dP)\}/ds^2=dP\times d^2P\cdot\mathcal{N}-d^2P\times\sigma dP, \\ d^2P\times\sigma dP=dP\times\sigma d^2P=dP\times d^2P\cdot\mathcal{N}-ds^3\cdot\mathcal{G}\mathcal{T}. \end{cases}$$

La 1ª delle (6) risulta subito dalla 1ª delle (a). La 2ª si ottiene da (a), (b), (5) osservando che:

$$\begin{aligned} dP\times d\sigma dP &= d(dP\times\sigma dP)-2dP\times\sigma d^2P= \\ &= d(ds^2\cdot\mathcal{N})-2dP\times d^2P\cdot\mathcal{N}+2ds^3\cdot\mathcal{G}\mathcal{T}= \\ &= ds^2\cdot d\mathcal{N}+2dP\times d^2P\cdot\mathcal{N}-2dP\times d^2P\cdot\mathcal{N}+2ds^3\cdot\mathcal{G}\mathcal{T}= \\ &= ds^2\cdot d\mathcal{N}+2ds^3\cdot\mathcal{G}\mathcal{T}\ ([1]). \end{aligned}$$

d) Si noti che il rapporto tra le forme differenziali (4), (3) è ***una funzione lineare*** di ds; ma, in generale, non vale ds.

e) Se P è una $\mathbf{F}_1$ qualunque, ed escludiamo da Σ i punti all'infinito, cioè supponiamo $P\omega \neq 0$, allora per introdurre $\mathcal{K}$ ecc. basta in *a)*-*d)* porre $P/P\omega$ al posto di P. Il lettore può ottenere h, k ecc.

([1]) Abbiamo sviluppati tutti i calcoli perchè il lettore possa fare il confronto con i metodi ordinari.

Capitolo III.

Proprietà generali delle superficie.

1. Direzioni coniugate.

In tutto questo Cap. 3 valgono per P, π, Σ, ... le ipotesi e posizioni fatte nel Cap. 2, n. 5; in particolare, salvo avvertenza in contrario, per π vale la posizione c).

a) Le due rette $P \cdot dP$, $\pi \cdot \delta\pi$ *giacciono in* π [cfr. Cap. 2, n. 5, (2)]; *per il loro prodotto alternato (regressivo) sul piano* π, *e prendendo* π *come* $\mathbf{F}_3$ *unitaria* [cfr. Cap. 1, n. 3], *si ha:*

$$(1)\quad PdP \cdot \pi\delta\pi = (\delta\pi \cdot dP)P = (d\pi \cdot \delta P)P = -(\pi \cdot d\delta P)P = -(d\delta\pi \cdot P)P.$$

Dim. Sviluppando in π il prodotto regressivo considerato [cfr. Cap. 1, n. 3], poi il prodotto $(\pi \cdot \delta\pi)P$ nello spazio [cfr. Cap. 1, n. 2] e ricordando [cfr. Cap. 2, n. 5, (2)] che i prodotti $P(\pi \cdot \delta\pi)$, $\pi \cdot dP$ sono nulli si ha:

$$(P \cdot dP)(\pi \cdot \delta\pi) = -\frac{dP(\pi \cdot \delta\pi)}{\pi} P = -\frac{(\pi \cdot \delta\pi)dP}{\pi} P =$$
$$= \frac{(\delta\pi \cdot dP)\pi}{\pi} P = (\delta\pi \cdot dP)P$$

che per formule note [cfr. Cap. 2, n. 5, (3)] dimostra le (1).

b) Variando comunque il differenziale d, *si hanno in* π *due* **fasci di rette** *di centro* P, *i fasci* $P \cdot dP$, $\pi \cdot d\pi$. *L'operatore* σ *che trasforma* $P \cdot dP$ *in* $\pi \cdot d\pi$ *è una* **involuzione** *e si può quindi porre, del tutto in generale, per* d, δ *qualunque,*

$$(2)\qquad \sigma = \begin{pmatrix} \pi d\pi, & \pi\delta\pi \\ PdP, & P\delta P \end{pmatrix}.$$

DIM. L'operatore σ è *lineare* perchè $dP = P_u du + P_v dv$, ecc.. È una *involuzione* perchè, da (1), scambiando tra loro d e δ si ha

$$(P \cdot dP)(\pi \cdot \delta\pi) = (P \cdot \delta P)(\pi \cdot d\pi) \qquad \text{[cfr. Cap. 1, n. 5, } c)].$$

c) È evidente che: *l'involuzione* σ, *funzione di* P, *è* **intrinseca** *e* **proiettiva** *per* Σ.

Le rette $P \cdot dP$, $\pi \cdot d\pi$, e anche le loro direzioni, diconsi *coniugate*.

Quando la posizione di P, posit P, è un *punto proprio*, la involuzione σ si può assumere come *involuzione dei diametri coniugati* di una *conica* di π avente P per *centro*. Fissato, ad arbitrio, su π, un punto della conica questa è determinata ed è una delle *coniche indicatrici* (di DUPIN) *di* Σ *in* P.

Queste coniche indicatrici sono elementi *intrinseci e proiettivi* per Σ.

OSSERVAZIONI. Vedremo tra poco che se σ ammette *elementi uniti*, questi dànno le *rette assintotiche* in P che sono pure elementi *intrinseci* e *proiettivi*.

La σ ammette sempre due rette coniugate *ortogonali* che sono quelle *principali* in P, tangenti alle *linee di curvatura*; elementi *intrinseci* ma *non proiettivi*. Segue subito dalla (2) che la equazione differenziale delle *linee di curvatura* è

$$(PdP \cdot \omega) \times (\pi d\pi \cdot \omega) = 0 \tag{3}$$

equazione *intrinseca* ma *non proiettiva* [1].

---

[1] Riprendendo le notazioni del Cap. 2, n. 6, per k *qualunque*, e, più particolarmente, per $\pi = P|n$, si ha subito:

$$PdP \cdot \omega = dP, \quad \pi d\pi \cdot \omega = (P|n)\,|\,dn;$$

ma il piano $P|n = \pi$ e il bivettore $|dn$ hanno a comune il punto all'infinito posizione di $|(dn \cdot n)$, cioè posizione di $n \wedge dn$; in conseguenza la (3) diviene

$$dP \times n \wedge dn = 0$$

che è appunto l'ordinaria equazione metrica (vettoriale) delle linee di curvatura.

2. Linee assintotiche.

Una linea di Σ chiamasi *assintotica* quando: il *piano osculatore* nel suo punto generico P *coincide* col *piano tangente* a Σ in P.

L'equazione differenziale delle **assintotiche** di Σ è

$$(1) \quad \begin{cases} d^2P \cdot \pi = 0, \text{ o anche, il che equivale [cfr. Cap. 2, n. 5, (3)]} \\ P \cdot d^2\pi = 0, \text{ o ancora } dP \cdot d\pi = 0; \end{cases}$$

e quindi: le rette assintotiche in P (se esistono, cioè sono reali) sono le rette unite della involuzione σ considerata nel n. 1.

Dim. Se $P \cdot dP$ è la tangente in P alla linea, allora $P \cdot dP \cdot d^2P$ è il piano osculatore, che coincide con π solamente quando

$$(P \cdot dP \cdot d^2P)\pi = (d^2P \cdot \pi)(P \cdot dP) = 0;$$

condizione che, per essere $P \cdot dP \neq 0$, dà la 1ª delle (1) e anche le altre. Da (1) del n. 1 e dalle (1) ora dimostrate risulta che (prodotto regressivo in π)

$$(P \cdot dP)(\pi \cdot d\pi) = (d\pi \cdot dP)P = 0$$

il che dimostra l'ultima parte del teorema.

Osservazioni. 1ª. È evidente che le assintotiche, se esistono, sono elementi intrinseci e proiettivi di Σ.

2ª. Introducendo le coordinate u, v su Σ, la 1ª delle (1) assume la forma

$$(2) \qquad \pi P_{uu} \cdot du^2 + 2\pi P_{uv} \cdot dudv + \pi P_{vv} \cdot dv^2 = 0$$

che dà, per du/dv, soluzioni reali quando

$$(\pi P_{uv})^2 - \pi P_{uu} \cdot \pi P_{vv} \overline{\gtrless} 0$$

cioè [cfr. Cap. 2, n. 5] $\Delta < 0$, escludendo i punti (parabolici) di Σ per i quali si ha $\Delta = 0$.

3. Linee di Darboux e di Segre.

Le solite forme P, π corrispondano ai valori u, v e si indichino con P_1, π_1, le forme corrispondenti ai valori $u+du$, $v+dv$ di u e v corrispondenti al differenziale d.

I numeri πP_1, $\pi_1 P$ sono infinitesimi dello stesso ordine, rispetto (sempre sottinteso) all'infinitesimo $\sqrt{du^2+dv^2}$.

DIM. Si ha $P_1 = P + A$, $\pi_1 = \pi + \alpha$, con A, α infinitesimi. Quindi, poichè $P\pi = 0$, $P_1\pi_1 = 0$, si avrà (prodotto alternato) $P\alpha - \pi A = \alpha A$. Ma αA è infinitesimo di ordine superiore a $P\alpha$ e πA e quindi $\pi P_1 = \pi A$, $P\pi_1 = P\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine; c. d. d.

Le equazioni differenziali seguenti:

$$\frac{1}{2!}\pi\cdot d^2P+\frac{1}{3!}\pi\cdot d^3P+\ldots+\frac{1}{n!}\pi\cdot d^nP=0, \tag{1}$$

con πP_1 infinitesimo di ordine $n+1$

$$\frac{1}{2!}P\cdot d^2\pi+\frac{1}{3!}P\cdot d^3\pi+\ldots+\frac{1}{n!}P\cdot d^n\pi=0, \tag{2}$$

con $P\pi_1$ infinitesimo di ordine $n+1$

sono l'una conseguenza dell'altra (si corrispondono per dualità). Esse esprimono geometricamente che: a meno di un infinitesimo di ordine superiore ad n, π passa per P_1 (cioè $\pi P_1 = 0$ a meno ecc.) e π_1 passa per P (cioè $P\pi_1 = 0$ a meno ecc.).

DIM. Sviluppiamo P_1 e π_1 con la formula di TAYLOR e ricordiamo che

$$\pi P = \pi dP = P d\pi = 0.$$

La (1) esprime che $\pi P_1 = \pi\varepsilon'_{n+1}$ è infinitesimo di ordine $n+1$. La (2), ove si ponga m al posto di n, esprime che $P\pi_1 = P\varepsilon''_{m+1}$ è infinitesimo di ordine $m+1$. Ma per il teorema precedente πP_1, $P\pi_1$ sono infinitesimi dello stesso ordine e quindi si ha che $m=n$; c. d. d.

Si ha pure, sotto le ipotesi del teorema ora dimostrato, che

$$\frac{1}{3!}(\pi\cdot d^3P-d^3\pi\cdot P)+\ldots+\frac{1}{n!}(\pi\cdot d^nP-d^n\pi\cdot P)=0. \tag{3}$$

Dim. Basta sommare le (1), (2) e ricordare che

$$\pi \cdot d^2 P = d^2 \pi \cdot P.$$

Osservazioni. 1ª. Per le (1), (2), con le condizioni relative all'ordine di πP_1 e di $P\pi_1$, la π può essere un multiplo qualunque di $PP_u P_v$. Se invece π soddisfa alle (7), (8) del Cap. 2, n. 5, allora dalla (1) segue la (2), e viceversa, indipendentemente dalle condizioni ora indicate.

2ª. La (1) è soddisfatta da n (tra reali e immaginari) spostamenti dP che dànno n punti P_1 infinitamente prossimi a P e giacenti in π. Vale a dire la (1) è l'equazione differenziale di n linee uscenti da P che hanno con π un contatto di ordine superiore ad n. Questa proprietà è *proiettiva* perchè è conservata applicando a Σ una *collineazione costante* (dualmente per una *correlazione*), ma, in generale, *non è intrinseca* perchè la equazione (1) cambia sostituendo a P un multiplo di P. Analogamente per (2) e (3).

Esaminiamo ora altre proprietà delle linee di equazioni (1), (2), (3).

a) Per $n = 2$ le (1), (3) dànno le *linee assintotiche*.

b) Supponiamo $n = 3$. Le (1), (2) dànno in P, tre direzioni che, in generale, non coincidono con le direzioni date dalla (3). La (3) dà le direzioni di Darboux, le cui direzioni coniugate sono le direzioni di Segre.

Le linee di Darboux *e di* Segre, *oltre essere elementi* **proiettivi** *(come si è già visto per n qualunque) sono anche* **intrinseche,** come risulta subito dalla Osserv. 4ª del Cap. 2, n. 5.

c) *Affinchè la superficie Σ sia rigata è* **necessario** *e* **sufficiente** *che le forme differenziali*

$$(4) \qquad \pi \cdot d^2 P, \qquad\qquad (4') \quad \pi \cdot d^3 P - d^3 \pi \cdot P$$

abbiano a comune un fattore lineare.

Infatti. Se il fattore lineare A è comune alle due forme, allora $A = 0$ è, per la (4), l'equazione di una *assintotica* e per la (4′) una linea di Darboux; quindi il piano π è *osculatore* e *iperosculatore* in P, vale a dire la linea $A = 0$

è una retta di Σ, cioè Σ è *rigata*. Viceversa: se Σ è *rigata* la (4) deve decomporsi in due fattori lineari; uno di questi, A, dà come equazione della generatrice $A=0$; ma la generatrice è pure linea di DARBOUX e quindi A è anche fattore della (4').

4. Quadriche osculatrici.

Valgano ancora per P, π, ... le ipotesi precedenti. Inoltre siano A, B, C delle $\mathbf{F}_1$, α, β, γ delle $\mathbf{F}_3$ funzioni (finite o differenziali) di P e si abbia $PABC \neq 0$.

La correlazione, non sistema nullo [cfr. Cap. 1, n. 5, (11)] *tra* $\mathbf{F}_1$ *e* $\mathbf{F}_3$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \pi, & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ P, & A, & B, & C, \end{pmatrix} \tag{1}$$

ammette P *come* $\mathbf{F}_1$ *unita* (*perchè* $P \cdot \sigma P = P\pi = 0$) *e quindi esiste una* **quadrica** *luogo delle posizioni delle* $\mathbf{F}_1$ *unite rispetto a* σ *e che passa per* P. *Questa quadrica*, Φ, *è tangente a* π *in* P **solamente quando:**

$$P\alpha/A\pi = P\beta/B\pi = P\gamma/C\pi, \tag{2}$$

intesa la forma di scrittura (2) *nel modo solito, cioè: se un numeratore (denominatore) di uno dei rapporti* (2) *è nullo allora: o il corrispondente denominatore (numeratore) è pure nullo* [*e quel rapporto resta escluso dalle* (2)], *ovvero non è nullo e sono nulli gli altri due numeratori (denominatori).*

Si noti che, valendo le (2), *la* (1) *si comporta*, **rispetto** *a* P *e* π, *come una* **polarità.**

DIM. Per una $\mathbf{F}_3$, ρ, tangente a Φ in P si può porre

$$\rho = (P\alpha + A\pi)BCP + (P\beta + B\pi)CAP + (P\gamma + C\pi)ABP\text{ (1)};$$

---

(1) Perchè nel punto $R = tP + xA + yB + zC$ di Φ il piano tangente è

$$(R \cdot \sigma R)_t ABC - (R \cdot \sigma R)_x BCP + (R \cdot \sigma R)_y CPA - (R \cdot \sigma R)_z PAB.$$

ora essendo $BCP \cdot \pi = B\pi \cdot CP + C\pi \cdot PB$, ecc., si ha, dopo semplici riduzioni, che la condizione $\rho\pi = 0$ equivale alla condizione

$$(a) \qquad (P\beta \cdot C\pi - P\gamma \cdot B\pi)PA + (P\gamma \cdot A\pi - P\alpha \cdot C\pi)PB + \\ + (P\alpha \cdot B\pi - P\beta \cdot A\pi)PC = 0;$$

moltiplicando (prodotto alternato) per BC, CA, AB, e ricordando che $PABC \neq 0$, i coefficienti della (a) risultano nulli e quindi valgono le (2).

a) Essendo d, δ simboli di differenziali qualunque in Σ si può porre

$$(3) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \pi, & \alpha, & d\delta\pi, & \delta^2\pi, \\ P, & A, & d\delta P, & \delta^2 P, \end{pmatrix}, \text{ con } P\alpha = A\pi$$

e allora le condizioni (2) sono soddisfatte [cfr. Cap. 2, n. 5].

Si può limitare l'arbitrarietà di d, δ ponendo come condizione che le rette $P \cdot dP$, $P \cdot \delta P$ (e quindi anche le rette $\pi \cdot d\pi$, $\pi \cdot \delta\pi$) siano *coniugate* per il che basta che sia soddisfatta una qualunque delle condizioni

$$(4) \qquad dP \cdot \delta\pi = 0, \; \delta P \cdot d\pi = 0, \; P \cdot d\delta\pi = 0, \; \pi \cdot d\delta P = 0$$

e in tal caso: *l'involuzione delle rette coniugate di Σ in P coincide con la involuzione delle rette coniugate di Φ in P.*

b) Avendo P_1, π_1 il significato stabilito nel n. 3 si dia a σ la forma

$$(5) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \pi, & \pi_1, & \beta, & \gamma \\ P, & P_1, & B, & C \end{pmatrix}, \text{ con le condizioni (2) per } P, B, C.$$

Poichè [cfr. n. 3] $P\pi_1$, $P_1\pi$ sono infinitesimi dello stesso ordine, la quadrica Φ, individuata dalla (5), passa per P_1 (poichè $P_1\pi_1 = 0$) e taglia Σ lungo linee che, nei dintorni di P, hanno contatti di ordine dipendente dall'ordine di infinitesimo di $P\pi_1$; vale a dire Φ è una *quadrica osculatrice* di Σ in P.

Di queste quadriche osculatrici ne abbiamo un gruppo dato da

$$(6) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \pi, & \pi_1, & d\delta\pi, & \delta^2\pi \\ P, & P_1, & d\delta P, & \delta^2 P \end{pmatrix},$$

ad es., con d, δ che dànno direzioni coniugate di Σ in P [cfr. *a*)].

c) Se il differenziale d soddisfa alla (1) del n. 3, allora Σ e Φ hanno a comune una linea che ha in P un punto n-uplo. Per $n=2$ la quadrica Φ dà, in P, le rette assintotiche.

d) Se per $n=3$ è soddisfatta la (3) del n. 3, allora posto

$$(7) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \pi, & d^3\pi, & \beta, & \gamma \\ P, & d^3P, & B, & C \end{pmatrix}$$

la quadrica Φ dà in P le direzioni di DARBOUX. Alle forme B, C, β, γ [naturalmente soddisfacenti alle (2)] si possono sostituire $d\delta P$, $\delta^2 P$, ... anche con d, δ che dànno direzioni coniugate di Σ in P [cfr. *a*)], e in tal caso la quadrica Φ dà le direzioni di DARBOUX e di SEGRE.

e) Le quadriche Φ, comunque ottenute [cfr. *a*)-*d*)], sono elementi *proiettivi* ma, in generale, *non intrinseci*.

f) Quanto si è fatto per le quadriche Φ relative a Σ può esser ripetuto, *sempre sotto le stesse forme geometriche* **assolute**, per i *coni* e le *coniche osculatrici* in un punto P di una linea; ecc. Al lettore la cura di sviluppare queste questioni, insieme a molte altre che noi non possiamo trattare per mancanza di spazio.

NOMI D'AUTORI

INDICE

PARTE I. - CURVE E SUPERFICIE (P. BURGATTI).

Capitolo I. — *Teorie delle curve gobbe.*

Capitolo II. — *Teoria delle superficie.*

Capitolo III. — *Linee geodetiche.*

Capitolo IV. — *Superficie rigate.*

Capitolo V. — *Rappresentazione delle superficie e superficie applicabili.*

Capitolo VI. — *Congruenze di rette.*

Capitolo VII. — *Sistemi tripli ortogonali.*

Parte II. - SPAZI CURVI A PIÙ DIMENSIONI (T. Boggio).

Capitolo I. — *Vettori e omografie in spazi euclidei.*

Capitolo II. — *Spazi curvi e loro geodetiche.*

Capitolo II. — *Omografia di Riemann.*

Capitolo IV. — *Curvatura di Riemann.*

Capitolo V. — *Curve ed ipersuperficie degli spazi curvi.*

Capitolo VI. — *Curvatura delle ipersuperficie degli spazi curvi.*

Capitolo VII. — *Applicazioni.*

Parte III. - FONDAMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE (C. Burali-Forti).

Capitolo I. — *Sistemi lineari di formazioni geometriche*

Capitolo II. — *Alcune nozioni fondamentali.*

Capitolo III. — *Proprietà generali delle superficie.*

Finito di stampare
il giorno 10 Marzo 1930
nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi
in Bologna