ANALISI
VETTORIALE
GENERALE
I

C. BURALI-FORTI
R. MARCOLONGO

TRASFORMAZIONI LINEARI

ANALISI VETTORIALE GENERALE VOL. I

C. BURALI-FORTI E R. MARCOLONGO

TRASFORMAZIONI LINEARI

ANALISI
VETTORIALE
GENERALE
I

C. BURALI-FORTI
R. MARCOLONGO

TRASFORMA-
ZIONI LINEARI

ANALISI VETTO

C. BURALI-FORT

TRASFORMA

ANALISI VETTORIALE GENERALE E APPLICAZIONI

Volume I. - *Trasformazioni lineari* a cura di C. Burali-Forti e R. Marcolongo.

Volume II. - *Fondamenti di Geometria differenziale* (linee, superficie, spazi curvi, geometria proiettiva differenziale) a cura di P. Burgatti, T. Boggio e C. Burali-Forti.

Volome III. - *Teoria matematica della elasticità* a cura di P. Burgatti.

Volume IV. - *Idrodinamica* a cura di T. Boggio.

Volume V. - *Elettricità e magnetisno* a cura di R. Marcolongo.

ANALISI
VETTORIALE GENERALE
E APPLICAZIONI

VOLUME PRIMO

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO

TRASFORMAZIONI LINEARI

Seconda edizione interamente rifatta

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXIX

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi - I-1929

PREFAZIONE

La prima nostra pubblicazione sui metodi delle omografie vettoriali risale al 1903 [1]. *Le svariate applicazioni fatte da noi stessi e da nostri valorosi collaboratori, lo sviluppo, i complementi e le semplificazioni del metodo stesso ci indussero, tre anni dopo, a intraprendere la esposizione dei vecchi e dei nuovi lavori in un piano più ampio, e ne nacquero i due primi volumi di* « Analyse vectorielle générale »: *il primo dedicato alla teoria generale delle trasformazioni lineari ed il secondo alle più notevoli applicazioni alla meccanica ed alla fisica-matematica* [2]. *Degli altri volumi che avrebbero dovuto far seguito a questi due primi, per cause assolutamente estranee alla nostra volontà, non vide la luce che quello sulla* Astatica *del compianto prof. Bottasso* [3]. *Intanto tali metodi andavano diffondendosi e popolarizzandosi, sia per opera di un maggior numero di studiosi che estesero e perfezionarono la nostra opera, sia perchè costituirono e costituiscono tuttora argomenti di corsi superiori universitari; e ciò nonostante che contemporaneamente si sviluppassero altri metodi certamente non assoluti e completamente diversi dai nostri, sull'esame critico dei quali non è qui il momento di intrattenerci.*

Esauriti da alcuni anni i due volumi di Analyse, *la coraggiosa e benemerita Casa Editrice Zanichelli si offerse di*

---

(1) *Omografie vettoriali con applicazione alle derivate rispetto ad un punto ed alla fisica-matematica.* Torino, G. B. Petrini, 1909.

(2) *Analyse vectorielle générale.* - I. *Transformations linéaires.* Pavia, Mattei, 1912. II. *Applications à la mécanique et à la physique.* Ibid., 1913.

(3) M. Bottasso: *Astatique.* Ibid., 1915.

riprendere la pubblicazione della « Analisi vettoriale generale ». *Alla benemerita Casa Editrice, che tanto contribuisce alla affermazione e alla diffusione dell'alta cultura scientifica italiana nel mondo, porgiamo i nostri più vivi ringraziamenti.*

I criteri, dopo circa venti anni di lotte, di studi e di un lavoro condotto con fede e con costanza, non sono diversi da quelli coi quali iniziammo i nostri studi nel 1909: cioè **trattazione assoluta di tutte le questioni fisico-meccaniche-geometriche, indipendentemente da qualsiasi sistema di coordinate.**

Questo primo, dei volumi di cui consterà la nuova serie, tratta ancora delle trasformazioni lineari, ma in modo più sistematico, più ampio e completo che nella trattazione del 1912.

I professori Boggio e Burgatti vollero prodigarci i loro consigli e suggerimenti e dividere con noi la fatica della revisione della stampa: di ciò noi siamo loro pubblicamente gratissimi.

E noi, dopo un quarto circa di secolo di comune lavoro, giunti quasi al termine delle nostre fatiche, presentando al pubblico matematico la sintesi dei nostri studi, proviamo un senso intimo di soddisfazione per l'opera compiuta che, ci auguriamo, non sia stata del tutto inutile per la scienza.

C. Burali-Forti
(R. Accademia Militare di Torino)
R. Marcolongo
(R. Università di Napoli)

INTRODUZIONE

I. Eguaglianza; coppie, terne,...; operatori; operazioni.

1. Eguaglianza, o identità.

La *relazione* di *eguaglianza*, o *identità*, tra un elemento x ed un elemento y, la esprimeremo con la notazione $x = y$ che deve essere intesa *esclusivamente* nel senso preciso che ora indichiamo:

[1] $x = y$ solamente quando: « *qualsiasi proprietà di x è, altresì, una proprietà di y* »,

e il segno $=$ si legge *è uguale ad*, ovvero *è identico ad*.

Una proprietà di x si può sempre esprimere sotto la forma: *x è un elemento della* classe U. Allora, alla [1] si può sostituire

[1′] $x = y$ solamente quando: « *se U è una classe che ha x per un suo elemento, allora si ha, e qualunque sia U, che anche y è un elemento di U* » (1).

Dalla [1], o dalla [1′], segue in modo ovvio, qualunque siano gli elementi x, y, z, che:

[2] $x = x$, proprietà *riflessiva*,
[3] da $x = y$ segue $y = x$, proprietà *simmetrica*,
[4] da $x = y$ e $y = z$ segue $x = z$, proprietà *transitiva*.

È in virtù della [3] che è lecito dire « *x e y* sono *eguali, o identici* » in luogo di dire $x = y$, ovvero $y = x$.

---

(1) Per ulteriori schiarimenti sui concetti *logici* che esponiamo in questa Introduzione, cfr. C. Burali-Forti, *Logica matematica*, 2ª ediz., 1919, (Manuali Hoepli). Citeremo questo libro con la abbreviazione L. M.

Il fatto, « *non è vero che x e y sono eguali* », ovvero « *x non è eguale ad y* », ovvero « *x è diverso da y* », lo esprimiamo scrivendo $x \neq y$, e quindi dalla [1] od [1′] si ha:

[1″] $\left\{\right.$ $x \neq y$ solamente quando: « *esiste, almeno, una proprietà di x che non è proprietà di y* », ovvero, « *esiste, almeno, una classe U che contiene x e non contiene y* ».

Le proprietà [2], [3], [4], *riflessiva, simmetrica, transitiva*, della *identità*, appartengono pure ad infinite altre *relazioni*, che possono esser chiamate *relazioni equabili*; ad es., le relazioni che si esprimono ordinariamente con le frasi « *è parallelo a* », « *è equivalente a* », « *è simile a* ».

Delle infinite *relazioni equabili*, una soltanto gode della proprietà [1] e questa è l'*eguaglianza* o *identità*, alla quale intendiamo *riservato esclusivamente* il segno $=$. E si tenga ben presente che dalla condizione [1] (Thomae Aquinatis e Leibniz) seguono le [2], [3], [4], ma che da queste *non* segue necessariamente la [1].

È dunque erroneo dire, come si fa usualmente, che l'*identità* è *caratterizzata* dalle [2], [3], [4], cioè che queste sono le *proprietà caratteristiche* della *identità* (o *eguaglianza*); esse *caratterizzano* la vasta classe delle *relazioni equabili*, ma la speciale relazione equabile *identità* è caratterizzata soltanto dalla [1].

Osservazioni. *a*) Che dalle [2], [3], [4] non segua necessariamente la [1] si dimostra facilmente. Siano $a, b, c, \ldots$ delle rette e con la notazione $a \parallel b$ si esprima che « a è parallela a b ». Allora, ammesso, con la *definizione* di parallelismo, che una retta sia parallela a se stessa, valgono le [2], [3], [4], cioè:

$$a \parallel a, \text{ da } a \parallel b \text{ segue } b \parallel a, \text{ da } a \parallel b \text{ e } b \parallel c \text{ segue } a \parallel c,$$

cioè la relazione $\parallel$ è *equabile*. Ora: se $a \parallel b$ e a gode della proprietà *di passare per un punto A*, non è vero che, necessariamente, anche b debba godere della proprietà *di passare per il punto A*; vale a dire per la relazione *equabile* $\parallel$ non vale la [1], cioè la relazione $\parallel$ *non coincide* con la relazione $=$, *identità* o *eguaglianza*. In modo analogo per le relazioni di *equivalenza*, *similitudine*, ecc., che sono pure relazioni *equabili* ma diverse dalla *identità*.

b) Siano F, F' *figure geometriche*, o *classi di punti*, e sia possibile stabilire tra i punti di F e quelli di F' una *corrispondenza univoca e reciproca* [cfr. questa Introduzione, I, n. 3] tale che: qualunque siano i punti P, Q di F, ed essendo P', Q' i punti di F' corrispondenti ai punti P, Q di F, si abbia sempre che: *la* **distanza** *di* P *da* Q *è* **identica** *alla* **distanza** *di* P' *da* Q'. Tale corrispondenza è *una relazione equabile,* ma *non è l'identità,* almeno in generale, perchè altrimenti, per la [1], dovrebbe essere $P' = P$, qualunque sia il punto P di F. La corrispondenza sopra indicata si chiama talvolta *eguaglianza geometrica* (frase assai dubbia), quasi sempre semplicemente *eguaglianza* (frase erronea se si stabilisce, ed è necessario farlo, che la *eguaglianza* sia caratterizzata dalla [1]). È preferibile, come noi faremo sempre, dire che le figure F, F', nelle condizioni sopra indicate, sono *congruenti*.

c) Una relazione equabile per gli elementi di una classe U, conduce sempre ad una classe V, che ha con U e con la relazione considerata uno stretto legame. Giova portare alcuni esempi.

La relazione *sovrapponibilità* per la classe U dei *segmenti* dà la classe V delle *lunghezze*. Se a è un segmento, la « lunghezza di a », brevemente lung a, è un nuovo elemento geometrico dipendente da a e che non varia col variare di a nella classe dei segmenti sovrapponibili ad a; vale a dire

« lung $a =$ lung b » solamente quando, « a, b sono *sovrapponibili* ».

La relazione *equivalenza* tra *poligoni piani,* o tra *poliedri,* dà le due classi delle *aree* e dei *volumi*. Anche in questo caso, secondo che a, b sono *poligoni piani* o *poliedri* si ha

« area $a =$ area b »
« volume $a =$ volume b », solamente quando, a è *equivalente* a b ».

Il *parallelismo* delle rette dà le *direzioni* o *punti proiettivi all'infinito*. Se a, b sono rette

« dir $a =$ dir b » solamente quando, « a, b sono *parallele* ».

E così di seguito. — Si deve notare, del tutto in generale, che la *relazione equabile* per gli U viene *trasformata* in *identità* per i V, ed è appunto questo fatto che costituisce la grande importanza pratica e teorica della classe V ottenuta da U e da una relazione equabile per gli U.

Non è necessario riportare qui la definizione regolare e logicamente precisa della classe V [cfr. L. M., Cap. IV, §§ 1, 2] mediante *operatori*; è peraltro utile ricordare che le ordinarie forme di definizione della V *per astrazione* o *per classi* [cfr L. M., Cap. IV, § 5] sono logicamente errate.

d) Alcuni credono potere infirmare la definizione generale [1] della *identità*, introducendo le così dette *pseudo-classi*, ma che sono, realmente, delle classi *vuote* e provengono da concetti erronei (¹), come ad es.: *numeratore e denominatore di un razionale: origine e estremo di un vettore; monomio, binomio, trinomio,....* Ma crediamo inutile insistere su argomenti che sono stati completamente analizzati e discussi; basta l'averli ricordati al lettore.

2. Coppie, terne, ...

Definite le *coppie* $(x;y)$, le *terne* $(x;y;z)$, ... come *operatori* nel campo logico [L. M.; Cap. II, § 3 (²)], risulta subito che:

$$[1]\quad \left\{\begin{array}{lll} (x;y)=(a;b) & \text{solamente quando,} & x=a \text{ e } y=b \\ (x;y;z)=(a;b;c) & \text{»} & x=a \text{ e } y=b \text{ e } z=c \\ \ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

e ciò dipendentemente dalla definizione, [1] del n. 1, dell'identità.

È importante porre in evidenza, e tener ben presente, il seguente carattere delle *coppie, terne,* ... che risulta dalle condizioni [1] *necessarie* e *sufficienti* per l'*identità. Se m è una coppia, allora esistono due elementi x, y, e questi due soltanto, tali che* $m=(x;y)$; cioè: *data una coppia* (m) *ne*

(¹) C. Burali-Forti, *Sulla definizione di eguaglianza.* (« Il Bollettino di Matematica », 1923, pp. 110-113).

(²) Per una modificazione a tale definizione, cfr. C. Burali-Forti, *Sui numeri reali e le grandezze.* (R. Acc. Lincei, vol. XXX, 1921; Nota I, pp. 175-177, 1° sem.; Nota II, pp. 26-28, 2° sem.).

è determinato in un sol modo il primo elemento (x) *e il secondo elemento* (y). In modo analogo per le terne, ...

Segue ancora che una n-upla generica individua una *successione di* n *elementi*, e quindi le varie specie di *complessi dell'ordine* n [L. M.; Cap. II, § 3, n. 7 e § 9, n. 6; Cap. V, §§ 5, 7].

Se A, B, C, D sono punti il *vettore* $B - A$ [1] *non* può essere *identificato alla coppia* $(A; B)$, poichè si ha $B - A = D - C$ *senza che debba essere necessariamente* $(A; B) = (C; D)$. Lo stesso si ha, ad es., per il razionale $2/3$; esso *non è la coppia* $(2; 3)$, poichè, mentre $2/3 = 4/6$ si ha che $(2; 3) \neq (4; 6)$. Il vettore $B - A$ è semplicemente una *funzione* della coppia $(A; B)$, ma *non la coppia*; il razionale $2/3$ è una *funzione* della coppia $(2; 3)$, ma *non la coppia*.

Vi è appena bisogno di far notare che dalle condizioni [1] di *eguaglianza* di due n-uple risultano subito le seguenti condizioni di *diseguaglianza*:

$$[2]\quad \left\{\begin{array}{lll} (x;y) \neq (a;b) & \text{solamente quando,} & x \neq a, \text{ ovvero } y \neq b \\ (x;y;z) \neq (a;b;c) & \text{»} & x \neq a, \text{ ovvero } y \neq b, \\ & & \text{ovvero } z \neq c \\ \dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Si ha, ad es., $(x; y) \neq (y; x)$ salvo il caso che sia $x = y$.

3. Corrispondenza univoca.

Siano U, V delle classi contenenti elementi, cioè non vuote.

Si consideri una classe W sodisfacente alle condizioni seguenti:

a) W *è una classe di coppie* $(x; y)$ *di ciascuna delle quali il primo elemento è un* U *e il secondo elemento è un* V;

---

[1] Per tutto ciò che riguarda la teoria generale dei *vettori, formazioni geometriche* e *quaternioni*, ci riferiamo agli *Elementi di Calcolo vettoriale*, 2ª ediz. (N. Zanichelli, Bologna) di C. Burali-Forti e R. Marcolongo. Citeremo questo libro con la abbreviazione E. C. V.

b) qualunque sia l'elemento x di U esiste un elemento y di V, **ed uno solo,** *tale che $(x;y)$ è un W; o, in altri termini, se x è un U, non importa quale, e y, z sono dei V tali che le coppie $(x;y)$, $(x;z)$ sono elementi di W, deve essere $y=z$.*

Sotto altra forma: *W è una classe della quale* **tutti** *gli elementi si ottengono dalla coppia $(x;y)$ facendo variare x in* **tutta** *la classe U e, contemporaneamente, facendo variare y nella classe V,* **tutta** *o parte di essa, con la sola condizione che ad uno stesso x di U* **non** *possano essere accoppiati, separatamente, due elementi distinti di V.*

Così, ad es., se x_1, x_2, x_3 sono i *soli* elementi che formano la classe U, gli elementi di W sono:

$$(x_1;\ y_1),\quad (x_2;\ y_2),\quad (x_3;\ y_3)$$

ove y_1, y_2, y_3, sono elementi di V, che possono essere scelti ad arbitrio e che una volta scelti individuano la classe W.

Salvo il caso che V contenga *un solo elemento*, delle classi W sodisfacenti alle condizioni (a), (b) ne esistono più di una; anche infinite se almeno una delle classi U, V contiene infiniti elementi (è *classe infinita*).

Una qualunque, fissata ad arbitrio, delle classi W, sodisfacente alle condizioni (a), (b), individua ciò che comunemente chiamasi una

corrispondenza univoca tra gli U e i V,

poichè: **accoppia** *ad ogni elemento x di U,* **nessuno eccettuato,** *un* **determinato** *elemento y di V e ne accoppia* **uno solo,** *non essendo possibile che $(x;y)$, $(x;z)$, con $y \neq z$, siano entrambi elementi di W.*

Data la classe W ed essendo $(x;y)$ un suo elemento, generico, si dice che:

l'y di V è il **corrispondente** *dell'x di U*

nella corrispondenza tra gli U e i V individuata da W.

Una *corrispondenza univoca* tra gli U e i V si dice *reciproca* (o anche univoca e reciproca) quando:

fissato ad arbitrio un elemento y *di* V *esiste un elemento* x *di* U (*e, necessariamente,* **uno solo**) *che ha* y *per corrispondente nella corrispondenza univoca considerata;*

ovvero, il che equivale:

la coppia $(x;y)$ *percorre* **tutta** *la classe* W *quando, non solo* x *percorre* **tutta** *la classe* U*, ma anche* y *percorre* **tutta** *la classe* V.

È chiaro che: *se* W*, con i suoi elementi* $(x;y)$*, individua una corrispondenza* **reciproca** *tra gli* U *e i* V*, la classe* W_1 *che ha per elementi le coppie* $(y;x)$ *individua una corrispondenza,* **pure reciproca**, *tra i* V *e gli* U, corrispondenza che chiamasi *inversa* di quella determinata da W.

4. Operatori.

Valgano le ipotesi e notazioni del n. 3.

Fissata una classe W, cioè fissata una corrispondenza univoca tra gli U e i V, e se m è un elemento, generico, di W, sono determinati, e in un sol modo [cfr. n. 2], l'elemento x di U e l'y di V tali che $m = (x;y)$. Vale a dire: un elemento m di W determina, ad un tempo, un elemento di U (l'x) e quello di V (l'y) che *corrisponde* ad x nella corrispondenza individuata da W. Peraltro l'm di W dà *collegati tra loro* x ed y, mentre in tutte le applicazioni ed ogni qual volta si presenta una corrispondenza univoca tra gli U e i V, vi è **assoluta necessità** *di avere l'*y *di* V *corrispondente dell'*x *di* U **da solo, isolato, non unito** ad x; di più *occorre una notazione che esprima chiaramente come l'*y*, corrispondente di* x*, si ottenga da* x *con una legge* fissa *(rispetto ad* U*,* V*,* W*)*, legge che deve essere appunto quella individuata dalla classe W.

L'inconveniente si toglie e lo scopo si raggiunge, *stabilendo,* dati U, V, W, un simbolo *fisso* f (dipendente, naturalmente, da U, V, W ma indipendente da x variabile in U) e *scrivendo*

$$y = fx \qquad [1]$$

per esprimere che: *y è quell'elemento di V che corrisponde all'elemento x di U nella corrispondenza univoca tra gli U e i V individuata dalla classe W.*

Nel secondo membro della [1] l'f è *un simbolo, semplice o composto, tale che la notazione fx, ottenuta scrivendo f alla sinistra di un conveniente x, e senza che tra f ed x si interponga altro simbolo, abbia significato.*

Un simbolo come l'f ora considerato si chiama ***operatore a sinistra.*** Analogamente si possono considerare gli operatori a destra, con la notazione xf. Noi faremo *sempre* uso di *operatori a sinistra* e li chiameremo semplicemente ***operatori.***

I noti simboli, sen, cos, log,... sono *operatori a sinistra.* Il *fattoriale,* !, è un *operatore a destra.*

Valendo la [1] la classe W è formata dalle coppie che si ottengono da $(x;fx)$ facendo variare x in *tutta* la classe U.

Un operatore può esser definito direttamente: ad es., posto $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$, per x numero reale arbitrario, resta definito l'operatore senh. Definito direttamente f da applicarsi agli U per ottenere dei V, resta determinata la classe W delle coppie $(x;fx)$ per x variabile in *tutta* la classe U. Ne segue che: le *corrispondenze univoche* [cfr. n. 3] dànno gli *operatori* ammessa l'azione grafica del simbolo f, e, viceversa, gli *operatori* dànno le *corrispondenze univoche.* Possiamo dunque considerare indifferentemente, come fa più comodo, *corrispondenze univoche* o *operatori*; il che faremo in tutto ciò che segue.

Un operatore f che applicato agli U produce dei V si chiama *operatore tra gli U e i V,* o anche *operatore per gli U* quando faccia comodo sottintendere la classe V. Ad es., sen è operatore tra i *numeri reali relativi* e la classe $(-1)\,{}^{\vert\!-\!\vert}\,(+1)$; log è operatore per i *numeri reali positivi non nulli* (nel campo reale).

Operatore per gli U e *simbolo di* funzione *per gli U*, sono frasi aventi lo stesso significato.

Se U è una classe di *coppie*, *terne*,..., allora f dicesi anche ***operatore binario, ternario***,..., o anche, ***simbolo di funzione di 2, 3,... variabili***, variabili che sono gli elementi delle *coppie, terne*,... elementi di U.

L'operatore f tra gli U e i V si chiama ***reciproco*** o ***invertibile*** quando dà luogo ad una corrispondenza reciproca tra gli U e i V [cfr. n. 3]. Se f è operatore reciproco tra gli U e i V, la corrispondenza tra i V e gli U, pure reciproca [cfr. n. 3], dà luogo ad un nuovo operatore tra i V e gli U, pure reciproco, e che, seguendo HAMILTON, indicheremo con f^{-1}. Ne segue che se f è operatore reciproco tra gli U e i V, la [1] diviene

$$[2] \qquad x = f^{-1}y$$

e si seguono le leggi ordinarie dell'Algebra.

Ad es. log è operatore invertibile e da $y = \log x$ si trae $x = \log^{-1} y$ che equivale ad $x = e^y$. Se l'operatore sen si applica a *tutti* i numeri reali allora *non* è *invertibile*; ma se lo si applica ai numeri dell'intervallo $(-\pi/2) \mid\!-\!\mid (+\pi/2)$ *è invertibile* e da $y = \operatorname{sen} x$ si trae $x = \operatorname{sen}^{-1} y$.

Un operatore tra gli U e gli U chiamasi anche, brevemente, **sostituzione** *per gli* U; esso dà luogo ad una trasformazione univoca tra gli U e gli U, o proviene da una tale trasformazione. La maggior parte degli operatori che si presentano nelle applicazioni sono appunto delle ***sostituzioni***.

5. Operazioni. Operatori derivati da operazioni.

Siano: U_1, U_2, V classi non vuote; U la classe formata dalle coppie $(x_1; x_2)$ variando, comunque, x_1 e x_2, rispettivamente, in U_1 e U_2; f un operatore (binario) tra gli U e i V.

Poniamo, per definizione del simbolo $\bigcirc$ (ora generico e che assumerà forme particolari nei vari casi),

$$[1] \qquad x_1 \bigcirc x_2 = f(x_1;\ x_2)$$

qualunque sia l'elemento $(x_1;\ x_2)$ della classe U.

La notazione $x_1 \bigcirc x_2$, ottenuta scrivendo $\bigcirc$ tra x_1 e x_2 e senza che tra x_1 ed $\bigcirc$, tra $\bigcirc$ ed x_2 si interponga altro simbolo, indica, nelle ipotesi fatte, un determinato elemento di V, che, naturalmente, dipende da x_1, x_2 e dall'operatore f, mentre $\bigcirc$ dipende da U, V, f.

Il simbolo $\bigcirc$ definito dalla [1] si chiama: **operazione** *tra un U_1 e un U_2 che produce un V.* In particolare se le classi U_1, U_2, sono *identiche* alla classe V, si può dire, brevemente, che $\bigcirc$ è una **operazione** *per i V*, il che significa: $\bigcirc$ è operazione tra un V e un V che produce un V.

I simboli $+ \; - \; \times \; /$ dell'Algebra (con le dovute limitazioni di $/$ per lo zero) sono operazioni per i *numeri reali*. I segni $+ \; - \; \odot$ (¹) $\wedge$ [E. C. V.] indicano operazioni per i *vettori*. Nel campo vettoriale, $\times$ è operazione tra vettori vettori e numeri.

Con la [1] si è definita una *operazione* derivante da un *operatore binario.* Viceversa, definendo *direttamente* una *operazione,* come ad es. $\times$ e $\wedge$ per i vettori [cfr. E. C. V., p. 22 e 26], si ottiene da essa un *operatore binario.* Si può dunque, almeno teoricamente, far uso, indifferentemente, di *operatori binari* o di *operazioni.* Praticamente occorre scegliere tra operatore binario e operazione, equivalenti, quello che dà il più semplice algoritmo.

Se alle operazioni $+ \; - \; \times \; /$ dell'Algebra si sostituiscono degli operatori binari l'algoritmo algebrico diviene complicatissimo. Se, ad es., alle operazioni $+ \; \times$ si sostituiscono gli operatori binari σ, π, cioè si pone, per x, y numeri reali,

$$\sigma(x;y) = x + y, \quad \pi(x;y) = x \times y,$$

allora la proprietà *distributiva del prodotto rispetto alla somma,*

$$(x+y) \times z = x \times z + x \times z,$$

assume la forma complicatissima

$$\pi \,\{\sigma(x;y); z\} = \sigma \,\{\pi(x;z);\; \pi(y;z)\}$$

(¹) Con questo segno indichiamo il **prodotto** *di un vettore per un numero reale,* anzi più in generale [cfr. Intr. II, n. 1] il **prodotto** *di un elemento di un sistema lineare per un numero reale.*

e il calcolo algebrico diverrebbe impossibile. Lo stesso dicasi per le operazioni vettoriali $+\ -\ \odot\ \times\ \wedge$; come, ad es., le notazioni $\mathrm{S}(\boldsymbol{u}, v)$, $\mathrm{V}(\boldsymbol{u}, v)$, derivate *inesattamente* da *precise* notazioni quaternionali di HAMILTON, e le grottesche notazioni a sistema cellulare (uv), $[uv]$, al posto di $u \times v$, $u \wedge v$. Come altro esempio notiamo che per le *diadi* è preferibile la notazione $\mathrm{H}(u, v)$ con l'operatore binario H alla operazione, *prodotto diadico*, del GIBBS.

In certi casi è praticamente opportuno *sottintendere* tra x_1 e x_2 il segno $\bigcirc$ definito con la [1], e scrivere, brevemente, $x_1 x_2$ al posto di $x_1 \bigcirc x_2$. Ma si deve soltanto *sottintendere* e **non** *sopprimere* il simbolo $\bigcirc$ per ragioni che vedremo tra poco. Del resto siccome con le U_1, U_2, V si possono stabilire diverse *operazioni* $\bigcirc$, $\bigcirc'$, ... è chiaro che, se mai, si potrà sottintendere *uno solo* di questi simboli.

In Algebra si sottintende quasi sempre il segno $\times$. Per i vettori si sottintende il segno $\odot$, prodotto di un vettore per un numero reale. Nella teoria delle formazioni geometriche [E. C. V., pp. 100-118] si sottintende il segno di *prodotto alternato* e anche quello di *prodotto per un numero*.

Dalla [1] e dalla definizione di operatore [cfr. n. 4] risulta subito che

[2] $\quad x_1 \bigcirc$ è *operatore* (a *sinistra*) tra gli U_2 e i V,

[3] $\quad \bigcirc x_2$ è *operatore* (a *destra*) tra gli U_1 e i V,

qualunque siano gli elementi x_1, x_2 di U_1, U_2. Sono di grande importanza pratica gli operatori [2], [3] dedotti dalla operazione $\bigcirc$.

Se u è *vettore* e m è numero reale, allora: $u\,+$, $u\,-$, $u\,\wedge$, $m\,\odot$ sono operatori tra vettori e vettori (sostituzioni per i vettori), e operatori a sinistra; $u\,\times$ è operatore (a sinistra) tra vettori e numeri; $+u$, $-u$, $\wedge u$, sono operatori a *destra* tra vettori e vettori; $\odot u$ è operatore a destra tra numeri e vettori. In Algebra gli operatori a *destra* $+x$, $-x$, variando x in tutta la classe dei *numeri reali assoluti*, dànno, rispettivamente, i *numeri reali positivi e negativi*.

Se si *conviene* di *sottintendere* il segno $\bigcirc$ di operazione, cioè si scrive $x_1 x_2$ in luogo di $x_1 \bigcirc x_2$, allora le [2], [3] dànno

x_1 è un *operatore* (a *sinistra*) tra gli U_2 e i V,
x_2 è un *operatore* (a *destra*) tra gli U_1 e i V,

il che è *falso*. Dunque, come si era già accennato, il simbolo $\bigcirc$ può esser *sottinteso* ma **non** può esser *soppresso*, poichè col sopprimerlo si giunge a degli assurdi.

Risulta, in modo indiscutibile, da ciò che precede, che gli enti da noi chiamati *operatori* (secondo HAMILTON) sono *ben distinti* dagli enti che abbiamo chiamati *operazioni*; fare, come si fa troppo spesso, confusione tra essi è un compromettere, in modo irreparabile, tutto l'algoritmo vettoriale-omografico. Noi abbiamo fissati i due nomi *operatore* (di HAMILTON) e *operazione*, nomi che *devono* esser *distinti* come lo sono gli enti che essi indicano, ma si possono anche scegliere e fissare altri nomi; è la sostanza che interessa.

6. Prodotto funzionale degli operatori. Potenze delle sostituzioni.

Siano: U_1, U_2, V classi non vuote; f_1 un operatore tra gli U_1 e gli U_2; f_2 un operatore tra gli U_2 e i V (sempre operatori a *sinistra*). Qualunque sia l'elemento x di U_1, la notazione $f_2(f_1 x)$ indica un determinato elemento di V e, in conseguenza, esiste un operatore g tra gli U_1 e i V tale che, per x arbitrario nella classe U_1,

[1] $$gx = f_2(f_1 x).$$

Il simbolo, g, di questo nuovo operatore tra gli U_1 e i V, e che è funzione di f_1 ed f_2, lo indicheremo con $f_2 \bigcirc f_1$, cioè, per x arbitrario in U_1, porremo

[2] $$(f_2 \bigcirc f_1)x = f_2(f_1 x)$$

e diremo che $f_2 \bigcirc f_1$ è il prodotto funzionale *di* f_1 *per* f_2.

In generale, con notevole semplificazione, e senza notevoli inconvenienti formali [cfr. n. 5], *sottintenderemo* sempre il simbolo ○ della operazione *prodotto funzionale di operatori*; quindi nelle ipotesi fatte avremo:

[3] $$\begin{cases} (f_2 f_1)x = f_2(f_1 x), \text{ o più brevemente} \\ f_2 f_1 x = f_2(f_1 x). \end{cases}$$

In generale. Siano: U_1, U_2, ..., U_n, V una *successione* di classi non vuote; f_i, per $i = 1, 2, \ldots, n-1$, operatori a sinistra tra gli U_i e gli U_{i+1}; f_n operatore a sinistra tra gli U_n e i V. Applicando, per induzione, le convenzioni precedentemente fatte per U_1, U_2, V, si ha che

[4] $f_n f_{n-1} \cdots f_2 f_1$ è operatore tra gli U_1 e i V

e qualunque sia l'x di U_1 si ha

[5] $f_n f_{n-1} \cdots f_2 f_1 x = f_n[f_{n-1}\{\cdots f_2(f_1 x)\}]$ è un elemento di V.

Il nuovo operatore $f_n f_{n-1} \cdots f_2 f_1$ tra gli U_1 e i V così ottenuto chiamasi **prodotto funzionale** *degli operatori* f_1, f_2, ..., f_{n-1}, f_n *in quest' ordine.* Esso stabilisce una corrispondenza diretta tra gli U_1 ed i V eliminando le classi intermedie U_2, ..., U_n; ed è appunto ciò che costituisce l'importanza pratica del prodotto funzionale di operatori. Si deve notare che l'operatore [4] ha significato nel *solo caso* che le successioni U_1, U_2, ..., U_n, V, e $f_1, f_2, \ldots f_n$ sodisfino alle condizioni poste nell'ipotesi; ad es. cambiando di posto in [4] due delle f si ottiene, in generale, un simbolo privo di significato.

Il prodotto funzionale è sempre *associativo.* Anche se le U_1, ..., U_n, V coincidono tutte con una classe U, cioè le f sono *sostituzioni per gli* U, **non** si ha, in generale, la proprietà *commutativa*; se poi due qualunque delle classi U_1, ..., U_n, V sono distinte allora si è già visto che nel simbolo [4] non è lecito cambiare l'*ordine* delle f.

Se gli operatori f_1, f_2, ..., f_n sono tutti *invertibili*, anche il loro prodotto [4] è invertibile e si ha:

[6] $$(f_n f_{n-1} \cdots f_2 f_1)^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots f_{n-1}^{-1} f_n^{-1}$$

poichè, ad es., da $y = f_2 f_1 x$ si trae $f_2^{-1} y = f_1 x$ e $f_1^{-1} f_2^{-1} y = x$.

Supponiamo ora che le classi $U_1, \ldots, U_n, V$ coincidano tutte con un'unica classe U e quindi che le f siano sostituzioni.

Il simbolo [4] è una sostituzione per gli U comunque si permutino le f; ma due permutazioni distinte indicano, in generale, due sostituzioni diverse per gli U; cioè, come si è già osservato, *non vale* la proprietà *commutativa.*

Se f è una sostituzione per gli U se ne possono considerare le potenze ad esponente intero e positivo n, ponendo, come in Algebra,

$$f^0 x = x, \quad f^{n+1} x = f(f^n x) \tag{7}$$

e, se f è invertibile, ponendo

$$f^{-n} x = (f^{-1})^n x \tag{8}$$

qualunque sia l'elemento x di U.

Si ha, in virtù della proprietà *associativa,*

$$f^m f^n = f^{m+n}; \tag{9}$$

ma, *mancando la proprietà commutativa,* $(f_2 f_1)^m$ è, in generale, diverso da $f_2^m f_1^m$ e da $f_1^m f_2^m$.

II. Sistemi e operatori lineari.

1. Sistemi lineari.

Sia U una classe non vuota e sia $+$ una **operazione** *per gli* U [cioè tale che se a, b sono elementi di U, anche $a + b$ è un U; cfr. I, n. 5], che chiameremo *somma per gli* U. Diremo che:

gli U formano un *sistema lineare* rispetto all'operazione $+$, o, più brevemente,

U è *classe lineare* rispetto all'operazione $+$,

quando, e solamente quando, sono vere le seguenti proprietà a)-h), nelle quali a, b, c sono elementi generici di U e m, n sono *numeri reali relativi* qualunque:

a) esiste un elemento di *U*, che indicheremo col simbolo 0 (*zero*, senza che vi sia pericolo di confusione con lo *zero* dei numeri, dei vettori, ecc.) che è *nullo rispetto alla operazione* $+$, cioè tale che

$$a + 0 = a$$

qualunque sia l'elemento a di U;

b) da $a + c = b + c$ segue $a = b$

c) $a+b=b+a$ [$+$ è operazione *commutativa*]

d) $a+(b+c)=(a+b)+c$ [» » *associativa*]

e) Esiste una **operazione**, $\odot$, *tra i numeri reali e gli U che produce un U* [cfr. I, n. 5], cioè tale che

$$m \odot a \text{ è un elemento di } U,$$

qualunque sia l'elemento m numero reale relativo e l'elemento a di U, e che chiameremo **prodotto** *degli U per numeri reali relativi*;

f) $m \odot a = 0$ equivale ad $m = 0$, ovvero $a = 0$

g) $\begin{cases} \text{se } m \neq 0, \text{ allora, } m \odot a = m \odot b \text{ equivale ad } a = b \\ \text{se } a \neq 0, \quad \text{»} \quad , m \odot a = n \odot a \quad \text{»} \quad m = n \end{cases}$

h) $\begin{cases} m \odot (a + b) = m \odot a + m \odot b \\ (m + n) \odot a = m \odot a + n \odot a. \end{cases}$

I *numeri reali*, i *numeri complessi di ordine n*, i *vettori*, le *formazioni geometriche* di GRASSMANN-PEANO [cfr. E. C. V, pp. 100-118], i *quaternioni* di HAMILTON [cfr. E. C. V, pp. 225-238] *sono* dei *sistemi lineari*. I *numeri razionali non interi*, i *numeri reali irrazionali*, i *punti* (come particolari formazioni geometriche di 1ª specie), ecc., *non sono* dei *sistemi lineari*, perchè: la somma di due razionali *non interi* può essere un *intero*; la somma di due irrazionali può essere un razionale; la somma di due punti non è un punto; ecc.

Di solito *sottintenderemo* il segno di operazione $\odot$, così scriveremo, brevemente, *ma* al posto di $m \odot a$; *sottintendiamo* $\odot$, ma **non** *lo sopprimiamo* poichè, come è già noto [cfr. I, n. 5], la mancanza del segno $\odot$ conduce a degli assurdi.

Risulta da f) che $m \odot$ è *operatore (a sinistra) tra gli U e gli U*; soppresso il segno $\odot$ risulta che m è *operatore tra gli U e gli U*, il che è *falso*.

In luogo della notazione abbreviata ma, equivalente alla completa $m \odot a$, ci sarà talvolta comodo scrivere am. L'inversione di m ed a non è peraltro lecita nella notazione completa, cioè *non si può scrivere* $a \odot m$ al posto di $m \odot a$.

Ammettendo che $m \odot a = a \odot m$ si viene a dare ad $\odot$ un *duplice significato*; operazione tra un numero reale ed un U, o tra un U e un numero reale, che produce sempre un U (e lo stesso U per m ed a assegnati). Risulterebbe pure che

$m \odot$ è operatore a sinistra tra gli U e gli U,
$a \odot$ » » » » i numeri reali e gli U

e ciò potrebbe portare notevoli confusioni.

Alle operazioni $+ \odot$ per il sistema lineare U, cioè per la classe per la quale valgono le a)-h), si estendono le ordinarie convenzioni algebriche. Cioè si pone:

$$-a = (-1) \odot a, \quad a - b = a + (-b);$$

e per $m \neq 0$ si introduce l'operazione **divisione** *per un numero reale non nullo* ponendo

$$a/m = \frac{a}{m} = (1/m) \odot a;$$

e lo stesso con la notazione abbreviata sottintendendo il segno $\odot$.

In tal modo, — e ciò resti acquisito per tutto ciò che segue —, l'*ordinario algoritmo algebrico viene esteso ai sistemi lineari*, bene inteso che l'operazione $\odot$ si fa tra un numero reale ed un U e non tra due elementi di U.

2. Dimensione di un sistema lineare.

Diciamo che gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ del sistema lineare U sono **linearmente dipendenti**, o **linearmente asso-**

ciati, quando: *esistono dei numeri reali relativi* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *non tutti nulli, tali che*

[1] $$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0.$$

Ne segue che: *gli elementi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *del sistema lineare U sono* **linearmente indipendenti,** o **non associati linearmente,** quando: *qualunque siano i numeri reali relativi* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *non tutti nulli, si ha sempre*

[2] $$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n \neq 0.$$

Diciamo che il *sistema lineare U ha n* **dimensioni,** quando: *esistono n elementi di U linearmente indipendenti, ed inoltre* $n + 1$ *elementi di U sono sempre linearmente dipendenti.*

I *numeri reali relativi,* i *vettori paralleli ad una retta,* i *bipunti di una retta,* i *tripunti di un piano,* i *trivettori,...* formano sistemi lineari, ad *una dimensione.* I *numeri complessi del 2° ordine,* gli *imaginari,* i *vettori paralleli ad un piano,* le *formazioni geometriche di 2ª specie di un fascio,...* formano sistemi lineari a *due dimensioni.* I *vettori dello spazio,* le *formazioni geometriche di 2ª o 3ª specie di una stella,* le *formazioni geometriche di 1ª o 2ª specie di uno strato,* formano sistemi lineari a *tre dimensioni.* I *quaternioni* di HAMILTON, le *formazioni di 1ª e 3ª specie,* formano sistemi lineari a *quattro dimensioni.* Le *formazioni geometriche di 2ª specie* costituiscono un sistema a *sei dimensioni.* (1)

Sono importanti i teoremi seguenti, nei quali *U* è sistema lineare ad *n* dimensioni e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono elementi di *U* linearmente indipendenti.

1.° *Per i numeri reali relativi* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *si ha*

[3] $$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0$$

solamente quando essi sono tutti nulli $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$.

---

(1) Per i sistemi lineari generali ad *n* dimensioni cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces courbes. Critique de la Relativité.* (STEN, Torino 1924).

Dim. Se i numeri x non sono tutti nulli allora la [3] esprime, in virtù della [1] che le a sono linearmente dipendenti, il che è contrario alla ipotesi.

2.° *Fissato, ad arbitrio, l'elemento* a *di* U *è determinata*, **e in un sol modo,** *la n-upla* $(x_1; x_2; ...; x_n)$ *di numeri reali relativi* [cfr. I, n. 2] *tali che*

$$[4] \qquad a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n = \Sigma x_i a_i .$$

I numeri x_i si chiamano *coordinate di* a *rispetto al sistema* $a_1, a_2, ..., a_n$.

Dim. Siccome U ha n dimensioni, gli $n+1$ elementi $a, a_1, ...$ a_n sono linearmente dipendenti e quindi, per la [1], esistono i numeri $y, y_1, ... y_n$ tali che

$$(\alpha) \qquad y\, a + y_1\, a_1 + ... + y_n\, a_n = 0$$

Se $a = 0$, allora per la (α), vale la [3] e tutti i numeri y_i sono nulli; ma y può esser qualunque non nullo e quindi vale la [4]. Se $a \neq 0$ allora nella (α) deve essere $y \neq 0$, perchè altrimenti tutti i numeri y, y_i sarebbero nulli; dunque, posto $x_i = -y_i / y$ da (α) si ha la forma [4].

Se si ha $a = \Sigma x_i a_i$ e $a = \Sigma x_i' a_i$ allora, sottraendo, $\Sigma(x_i - x_i')a_i = 0$ che per la [3] dà $x_i = x_i'$; quindi a si pone sotto la forma [4] in un sol modo.

3.° *Col variare di* $x_1, x_2, ..., x_n$, *indipendentemente l'uno dagli altri, nella classe dei numeri reali relativi, cioè col variare di* $(x_1; x_2; ...; x_n)$ *nella classe totale dei complessi (di numeri reali relativi) di ordine* n,

$$[5] \qquad x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n$$

percorre tutta, e sola, la classe U.

Dim. L'elemento [5] appartiene alla classe U [cfr. n. 1, ipotesi per $+$, e)]. Se a è un elemento di U, allora (Teor. 2°) a ha la forma [5]. — Dunque [5] è elemento generico della sola classe U.

3. Operatori lineari; loro prodotti funzionali.

Siano U, U' sistemi lineari rispetto ad operazioni *somma* che indichiamo col segno generico $+$ tanto per gli U quanto per gli U'.

Diremo che l'operatore (a sinistra) α tra gli U e gli U' è un

operatore lineare tra gli U e gli U'

quando, e solamente quando,

[1] $$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b, \quad \alpha(ma)=m(\alpha a)$$

qualunque siano gli elementi a, b di U e qualunque sia il numero reale relativo m. In altri termini: *affinchè l'operatore α tra gli U e gli U' sia lineare è necessario e sufficiente che esso sia* **distributivo rispetto alla somma** *e* **commutativo col prodotto per un numero.**

Se u è un *vettore*, $u\wedge$, $u\times$ sono operatori *lineari*, il primo tra vettori e vettori, il secondo tra vettori e numeri; $u+$, $u-$ sono operatori tra vettori e vettori ma *non lineari*. Un *quaternione α è operatore* soltanto per i vettori normali al vettore di α, $\mathrm{V}\alpha$, e per tali vettori è operatore lineare. Se m è numero reale, $m\odot$ è pure operatore lineare tra vettori e vettori, e, in generale, tra gli U e gli U (sostituzione per gli U) qualunque sia il sistema lineare U.

Dalle [1] risulta subito che:

[2] da $$a=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n,$$

segue

$$\alpha a=x_1\alpha a_1+x_2\alpha a_2+\ldots+x_n\alpha a_n$$

e, in conseguenza, che

[3] $$\alpha 0=0.$$

Se il sistema lineare U ha n dimensioni, allora un operatore lineare α tra gli U e gli U' (qualunque sia la dimensione di U') resta individuato dando degli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$

linearmente indipendenti di U i corrispondenti $a_1', a_2', \dots, a_n'$ di U'.

Dim. Qualunque sia l'elemento a di U si ha [cfr. n. 2, [4]] $a = \Sigma x_i a_i$ e quindi per la [2], $\alpha a = \Sigma x_i \alpha a_i = \Sigma x_i a_i'$; cioè è determinato il corrispondente rispetto ad α di un qualsiasi elemento a di U. E α è determinato in un sol modo, perchè se β è pure operatore lineare e $\beta a_i = a_i'$, allora $\alpha a = \beta a$ qualunque sia a e quindi $\alpha = \beta$.

Stando le ipotesi ora fatte, l'operatore lineare α che trasforma gli elementi *indipendenti* a_i negli elementi a_i' di U', per $i = 1, 2, \dots, n$, si indicherà con la notazione

[4] $$\alpha = \begin{pmatrix} a_1', & a_2', & \dots, & a_n' \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{pmatrix}.$$

Se le a_i' sono elementi tutti *nulli* (lo *zero*) di U', allora α è tale che $\alpha a = 0$ qualunque sia l'elemento a di U. L'operatore lineare α dicesi in tal caso *nullo* e lo si indica ancora col segno 0 (zero), e si ha $0a = 0$.

Si noti che: *l'operatore lineare α, per gli U, è l'*operatore *nullo solamente quando $\alpha a = 0$, qualunque sia l'elemento a di U.*

Gli *operatori lineari* sono degli *operatori* e quindi valgono per essi le posizioni e proprietà stabilite per gli operatori generici [cfr. I, n. 4, 6], posizioni e proprietà che noi applichiamo, senz'altro, agli *operatori lineari.*

È importante indicare esplicitamente le proprietà seguenti.

1.° *Se U, U' sono sistemi lineari, entrambi ad n dimensioni, a_i, ed a_i', per $i = 1, 2, \dots n$, sono elementi linearmente indipendenti di U e di U', rispettivamente, allora, nel campo degli* **operatori lineari**:

[5] $$da\ \ \alpha = \begin{pmatrix} a_1', & a_2', & \dots, & a_n' \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{pmatrix}\ \ segue\ \ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n \\ a_1', & a_2', & \dots, & a_n' \end{pmatrix}.$$

Dim. Se α tale che $\alpha a_i = a_i'$ ammette l'inversa α^{-1}, deve essere $\alpha^{-1} a_i' = a_i$; ma per le ipotesi fatte è determinato l'operatore lineare β tale che $\beta a_i' = a_i$; deve dunque essere $\alpha^{-1}a_i' = \beta a_i'$ e quindi (poichè a_i' sono linearmente indipendenti) β è appunto la inversa di α.

2.° *Il prodotto funzionale di operatori lineari è pure operatore lineare.*

Dim. Siano: U, U', U'' sistemi lineari; α operatore lineare tra gli U e gli U', β operatore lineare tra gli U' e gli U''. Se a, b sono elementi qualunque di U e m è numero reale relativo, per l'operatore $\beta\alpha$ tra gli U e gli U'' si ha:

$$\beta\alpha(a + b) = \beta(\alpha a + \alpha b) = \beta\alpha a + \beta\alpha b$$
$$\beta\alpha(ma) = \beta(m\alpha a) = m(\beta\alpha a)$$

e quindi, per le [1], $\beta\alpha$ è operatore lineare tra gli U e gli U'. Analogamente, o per induzione, per il prodotto di tre o più operatori lineari.

3.° *Le potenze di una sostituzione lineare per il sistema lineare U sono pure sostituzioni lineari per gli U; per gli esponenti negativi è necessario che la sostituzione data sia invertibile.*

Dim. Qualunque sia l'elemento a di U si ha, essendo α una sostituzione per gli U, $\alpha^0 a = a$, $\alpha^1 a = \alpha a$, $\alpha^2 a = \alpha\alpha a$, $\alpha^3 a = \alpha\alpha^2 a, \ldots$ e quindi, per n intero positivo o nullo, α^n è sostituzione per gli U ed è sostituzione lineare [cfr. Teor. 2°]. Se poi α è invertibile, da $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$ e da ciò che precede risulta ancora il teorema.

4.° *Se m è numero reale relativo, allora $m\odot$ è sostituzione lineare per un qualsiasi sistema lineare U.*

Dim. Siano a, b elementi qualunque di U e sia n un numero reale arbitrario. Si ha, anche facendo uso della notazione abbreviata,

$$m\odot(a + b) = ma + mb, \quad m\odot(na) = n(m\odot a)$$

e quindi, per le [1], $m\odot$ è operatore lineare per gli U.

Le osservazioni che seguono sono importanti.

a) Sia U un *sistema lineare* e m un *numero reale relativo*. Dal teor. 4° risulta che $m\odot$, cioè m *seguito* dal simbolo $\odot$ di prodotto di un U per m, è una ***sostituzione lineare*** per gli U; ma ***non risulta*** che m ***sia una sostituzione lineare per gli*** U. Quando, come è opportuno fare, si ***sottintende*** il simbolo $\odot$, risulta che m ***è sostituzione lineare per gli*** U, il che, come si è osservato, ***è falso***. Pure nell'uso comune si dice che: ***i numeri reali relativi sono delle sostituzioni per un sistema lineare qualunque.*** Noi, per amor di brevità, e per non allontanarci troppo dall'uso comune, faremo pure uso della frase ordinaria ora indicata, per quanto erronea, ma si deve tener presente che, **non** m, ma $m \odot$ è la sostituzione lineare per gli U.

b) Tra le sostituzioni lineari per gli U vi è l'***identità***, cioè quella che ad un qualsiasi elemento a di U fa corrispondere lo stesso a. Da quanto abbiamo esposto nel teor. 4° e in *a*) risulta che

$$1 \odot \text{ è l'identità,}$$

e **non** 1 come si dice usualmente. Seguendo, ancora, la convenzione abbreviativa *a*) indicheremo, di solito, semplicemente con 1 la ***sostituzione lineare*** identità.

Ne segue che se α è una sostituzione lineare invertibile per gli U allora $\alpha^{-1}\alpha$ e anche $\alpha\alpha^{-1}$ è l'***identità*** e si ha

$$\textit{esattamente } \alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = 1 \odot,$$
$$\text{sotto } \textit{forma abbreviata } \alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = 1.$$

c) Siano: U un sistema lineare ad n dimensioni; a_1, $a_2, \dots, a_n$ elementi linearmente indipendenti di U; α una sostituzione per gli U. Si può individuare α dando i numeri reali x_{rs}, tali che

$$[6] \quad \alpha a_i = x_{i1}a_1 + x_{i2}a_2 + \dots + x_{in}a_n, \text{ per } i = 1, 2, \dots, n,$$

essendo x_{is}, per $s = 1, 2, \dots, n$, le coordinate di αa_i rispetto al sistema $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Le [6] si sogliono anche rappresentare mediante il quadro o *matrice* (non *determinante*)

[7] $$\left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{matrix} \right\| ;$$

ma tale notazione è incompleta poichè rimangono sottintesi gli elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$ di riferimento. Del resto, come vedremo, noi opereremo sempre *indipendentemente da coordinate*, cioè sotto *forma assoluta* e quindi la [7] è del tutto inutile. Talvolta ci sarà comodo far uso della forma [6], ma *mai sistematicamente* e per $a_1, a_2, \dots, a_n$ generici, ma, invece, soltanto in casi particolari e per $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementi *intrinseci* della particolare questione che si studia. Si noti che α è *invertibile* solamente quando il determinante dato dalla matrice [7] è *diverso da zero.*

4. Somma degli operatori lineari.

Se α, β sono operatori lineari tra gli U e gli U' esiste un operatore lineare γ tra gli U e gli U', ed uno solo, tale che, qualunque sia l'elemento a di U, si ha

[1] $$\gamma a = \alpha a + \beta a.$$

Dim. Qualunque sia l'elemento a di U, $\alpha a + \beta a$ è un determinato elemento di U' e quindi γ sodisfacente alla [1] è un operatore tra gli U e gli U'. È unico, perchè se anche γ' sodisfa alla [1], si ha $\gamma a = \gamma' a$, qualunque sia a, e quindi $\gamma = \gamma'$. È lineare, perchè essendo α, β lineari, se a, b sono elementi di U e m è numero reale relativo, si ha

$$\gamma(a+b) = \alpha(a+b) + \beta(a+b) = \alpha a + \beta b + \beta a + \beta b =$$
$$= (\alpha a + \beta a) + (\alpha b + \beta b) = \gamma a + \gamma b,$$
$$\gamma(ma) = .\,(ma) + \beta(ma) = m(\alpha a + \beta a) = m(\gamma a).$$

L'operatore γ, funzione di α e di β, che sodisfa alla [1] lo chiameremo ***somma di α con*** β e lo indicheremo con la notazione $\alpha + \beta$.

Allora la [1] assume la forma, indipendente da γ,

[2] $$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$$

che fa vedere chiaramente come $\alpha + \beta$ sia operatore *distributivo.*

Come in Algebra si può considerare la *somma* di *tre*, ... operatori lineari tra gli U e gli U'. Risulta in modo ovvio che tale somma è *associativa* e *commutativa.*

5. Sistemi lineari di operatori lineari.

Siano: U, U' sistemi lineari; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ operatori lineari tra gli U e gli U'; $m, n, \ldots$ numeri reali relativi.

La somma di α con β, cioè $\alpha + \beta$ è, come α e β [cfr. n. 4] un operatore lineare tra gli U e gli U'. Esiste l'operatore lineare nullo, lo 0 (zero) [cfr. n. 3] che è *nullo rispetto all'operazione* $+$, perchè dalla [2] del n. 4 si ricava subito che $\alpha + 0 = \alpha$ qualunque sia α. Il prodotto funzionale di α per l'operatore lineare $m\odot$ [cfr. n. 3; a)] è l'operatore pure lineare [cfr. n. 3, 2°] $m\odot\alpha$, o, con notazione *abbreviata*, $m\alpha$. Dunque gli operatori lineari tra gli U e gli U' sodisfano, insieme alle operazioni $+$ (somma), $\odot$ (prodotto per un numero), alle condizioni a)-h) stabilite nel n. 1. Dunque:

Gli operatori lineari tra i sistemi lineari U, U' formano un sistema lineare.

Questo teorema è della massima importanza per tutto ciò che segue.

Si hanno molte proprietà per la dimensione del sistema di tali operatori, dipendentemente dalle dimensioni di U ed U'. Noi troveremo alcune di queste proprietà per le *omografie*, ma ci è del tutto inutile esaminare la questione in generale.

6. Operatori lineari alternati.

Se U, U' sono classi qualunque, non vuote, si dirà che: *α è un operatore tra n-uple ordinate degli U e gli U'* quando; fissata ad arbitrio la successione $a_1, a_2, \ldots, a_n$, formata con elementi di U,

$$\alpha(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$$

è un determinato elemento di U' che dipende dalla successione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e dall'operatore α.

Se, inoltre, U ed U' sono sistemi lineari, si dirà che l'α sopra considerato è *operatore* **lineare** *tra n-uple ordinate degli U e gli U'*, quando α è *lineare* rispetto a ciascuna delle variabili a_i, elementi di U. Vale a dire, quando: essendo a_r, b_r elementi di U si ha

$$\alpha(a_1; \dots; a_r + b_r; \dots; a_n) =$$
$$= \alpha(a_1; \dots; a_r; \dots; a_n) + \alpha(a_1; \dots; b_r; \dots; a_n).$$

Nelle stesse ipotesi, si dirà che α è **operatore lineare alternato** *tra n-uple ordinate degli U e gli U'*, quando: α è operatore *lineare* [cfr. precedente definizione] ed è inoltre tale che: *se $a_1, a_2, \dots, a_n$ è una successione arbitraria di elementi di U, l'elemento di U'*

$$\alpha(a_1; a_2; \dots; a_n)$$

cambia soltanto di segno cambiando tra loro di posto due elementi qualunque della successione; vale a dire

$$\alpha(a_1; \dots; a_r; \dots; a_s; \dots; a_n) = -\alpha(a_1; \dots; a_s; \dots; a_r; \dots; a_n)$$

per r, s qualunque purchè distinti $(r \neq s)$.

Risulta subito, come nella teoria dei *determinanti*, che:

Se nella successione $a_1, a_2, \dots, a_n$, vi sono due elementi eguali, o l'uno multiplo dell'altro, allora, essendo α operatore lineare alternato, si ha sempre $\alpha(a_1; a_2; \dots; a_n) = 0$.

Così pure risulta subito che:

Se gli elementi a_i sono esprimibili linearmente mediante elementi b_i, cioè

$$a_i = x_{i1}b_1 + x_{i2}b_2 + \dots + x_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e X è il determinante formato con le x_{ij}, allora

$$\alpha(a_1; \dots; a_n) = X \cdot \alpha(b_1; \dots; b_n)$$

sempre quando α sia operatore lineare alternato.

7. Operatori lineari alternati per coppie o terne di vettori.

Per la teoria generale delle *omografie vettoriali*, e loro applicazioni sono di notevole importanza i teoremi seguenti, relativi a *operatori lineari alternati per coppie o terne di vettori*. Il primo di questi teoremi vale per operatori lineari anche non alternati.

1.° *Se il punto P e i vettori $x_1 \ldots x_r$, $r = 1, 2, 3$, variano comunque nello spazio (geometrico a tre dimensioni), e se, essendo μ un ente funzione di P, si indica con $f(\mu, x_1, \ldots, x_r)$ una funzione di μ (e quindi anche di P) e dei vettori x, e si suppone che questa funzione f sia lineare rispetto a ciascuno dei vettori x, ed inoltre che $f(\mu, x_1, \ldots, x_r)$ sia elemento di un sistema lineare U', allora: esiste un operatore α, ed uno solo, funzione soltanto di μ (e quindi anche di P), tra le r-uple di vettori x e gli U', tale che:*

$$[1] \qquad \begin{cases} f(\mu, x_1, \ldots, x_r) = \alpha(x_1, \ldots, x_r) \\ \textit{essendo } x_1, \ldots, x_r \textit{ vettori del tutto arbitrari.} \end{cases}$$

Se $r = 1$, allora α è operatore lineare tra i vettori e gli U'.

Se $r = 1$ e U' è la classe dei numeri reali relativi, allora esiste un vettore u, ed uno solo, funzione di μ soltanto, tale che

$$[2] \qquad \begin{cases} f(\mu, x) = u \times x \\ \textit{essendo } x \textit{ vettore del tutto arbitrario;} \end{cases}$$

e in questo caso per l'operatore α della [1] *si ha $\alpha = u\times$.*

Dim. Sia a_1, a_2, a_3 una successione di vettori non complanari e sia $(a_1'; \ldots; a_r')$ una r-upla qualunque fra quelle, in numero di 3^r, che si possono formare scegliendo i vettori a' in modo affatto arbitrario tra i vettori a. Se, per tali r-uple, si pone

$$\alpha(a_1', \ldots, a_r') = f(\mu, a_1', \ldots, a_r')$$

allora α è un operatore tra le r-uple considerate e gli U' che, inoltre, verifica la [1], poichè un vettore qualunque x si può esprimere linearmente mediante i vettori a e, per ipotesi,

$f(\mu, x_1, \ldots, x_r)$ è lineare rispetto agli x. Dunque: esiste un operatore α, funzione di μ, che verifica la [1]; ma tale operatore dipende dai vettori $\boldsymbol{a}$. Fissato un altro sistema di vettori $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ non complanari, si avrà, nello stesso modo, un altro operatore β che sodisfa alla [1]; ma da questa [1] risulta $\alpha f(\mu, x_1, \ldots, x_r) = \beta f(\mu, x_1, \ldots, x_r)$ e quindi, nel campo di definizione di α, si ha $\alpha = \beta$. Cioè: *l'operatore α funzione di μ esiste ed è univocamente determinato dalla* [1].

Se $r = 1$, allora α è operatore fra vettori e gli U'. Ma i vettori formano un sistema lineare, U' è sistema lineare e $f(\mu, x_1)$ è lineare rispetto ad x_1, in conseguenza: *α è operatore lineare*.

Se $r = 1$ e $f(\mu, x)$ è numero, allora anche αx è numero. Fissato un sistema unitario-ortogonale di vettori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, allora, poichè αx è numero, si ha:

$$\alpha x = \alpha \Sigma x \times \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_s = \Sigma x \times \boldsymbol{i}_s \cdot \alpha \boldsymbol{i}_s = \{ \Sigma(\alpha \boldsymbol{i}_s) \boldsymbol{i}_s \} \times x$$

e, in conseguenza, il vettore

$$\boldsymbol{u} = \Sigma(\alpha \boldsymbol{i}_s) \boldsymbol{i}_s$$

sodisfa alla [2], cioè si ha $\alpha = \boldsymbol{u} \times$. Ma si è già dimostrato che α è funzione di μ soltanto e quindi $\boldsymbol{u}$, sebbene espresso per mezzo dei vettori $\boldsymbol{i}$, è indipendente da questi ed è funzione di μ soltanto.

2.° *Se α è operatore lineare alternato tra coppie di vettori e elementi di un sistema lineare U', allora: esiste uno, ed uno solo, operatore lineare β tra i vettori e gli U', tale che, qualunque siano i vettori x, y si ha:*

[3] $$\alpha(x, y) = \beta(x \wedge y).$$

Dim. Cominciamo col provare che:

(a) $$\text{da} \quad x \wedge y = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \quad \text{segue} \quad \alpha(x, y) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

vale a dire che: *$\alpha(x, y)$ è una funzione di $x \wedge y$.*

La (a) è vera [cfr. n. 6] quando $x \wedge y = 0$. Sia invece $x \wedge y \neq 0$. Per l'ipotesi di (a) i vettori x, y, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono complanari e si può quindi esprimere x e y linearmente mediante $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e il determinante dei coefficienti varrà *uno* in virtù dell'ipotesi (a). Dunque [cfr. n. 6] vale la tesi della (a), cioè la (a) è vera.

Si può dunque affermare che esiste almeno un operatore β tra i vettori e gli U' tale che è sodisfatta la [3].

L'operatore β *è unico*, perchè da

$$\alpha(x, y) = \beta(x \wedge y) = \beta'(x \wedge y)$$

segue $(\beta - \beta')(x \wedge y) = 0$, che dà $\beta = \beta'$ poichè $x \wedge y$ è vettore arbitrario.

L'operatore β *è lineare.* Infatti: per i vettori, arbitrari u, v si può porre, in infiniti modi, $u = x \wedge y$, $v = x \wedge z$; quindi se m è numero reale:

$$\beta(u + v) = \beta\{x \wedge (y + z)\} = \alpha(x, y + z) = \alpha(x, y) + \alpha(x, z) =$$
$$= \beta(x \wedge y) + \beta(x \wedge z) = \beta u + \beta v,$$
$$\beta(mu) = \beta(mx \wedge y) = \alpha(mx, y) = m\alpha(x, y) = m\beta u.$$

3.° *Se* α *è operatore lineare alternato tra coppie di vettori e numeri reali relativi, allora: esiste un vettore* u, *ed uno solo, funzione di* α *soltanto, tale che, per* x, y *vettori arbitrari, si ha:*

[4] $$\alpha(x, y) = u \times x \wedge y.$$

Dim. Dalle ipotesi e dal teorema 2° risulta che esiste l'operatore lineare β tale che $\alpha(x, y) = \beta(x \wedge y)$; da questo e dal teor. 1° risulta che β si può porre, e in un sol modo, sotto la forma $\beta = u \times$.

4.° *Se* α *è operatore lineare alternato tra terne di vettori ed elementi di un sistema lineare* U', *allora: esiste un elemento* a' *di* U', *ed uno solo, funzione di* α *soltanto, tale che, per* x, y, z *vettori arbitrari, si ha:*

[5] $$\alpha(x, y, z) = x \times y \wedge z \cdot a'.$$

Dim. Operando come nel teor. 2° si dimostra che

$$\alpha(x, y, z) = \beta(x \times y \wedge z)$$

ove β è operatore lineare. Ma $x \times y \wedge z$ è un numero, cioè è elemento di un sistema lineare ad *una dimensione*; in conseguenza $\beta(x \times y \wedge z)$ deve essere il prodotto di un elemento a' di U' per

$x \times y \wedge z$. L'elemento a' è unico perchè da $x \times y \wedge z \cdot a' = x \times y \wedge z \cdot b'$ segue $x \times y \wedge z \cdot (a' - b') = 0$, che per essere x, y, z arbitrari, e quindi anche $x \times y \wedge z \neq 0$, dà $a' = b'$ (1).

III. Limiti; Differenziali; Derivate; Integrali (2)

In tutta questa parte III dell'introduzione, intendiamo stabilite le ipotesi e notazioni seguenti:

le classi U, V, non vuote, sono tali che una qualunque di esse, o è un ***sistema lineare*** (rispetto all'operazione $+$, sottinteso), ovvero ***è parte non lineare di un sistema lineare***,

come ad es., i *razionali non interi*; gli *irrazionali*; i *punti*; che sono tutte parti non lineari di sistemi lineari (numeri reali, formazioni geometriche di 1ª specie);

la classe formata da tutti e soli gli elementi che sono ***differenze tra gli elementi di*** U, e che indicheremo, brevemente, con la notazione diff U, è un sistema lineare,

ad es., la classe *punto* è parte non lineare del sistema lineare delle formazioni geometriche di 1ª specie, cioè ***è sistema non lineare***, ma le differenze tra elementi della classe punto, cioè i *vettori*, formano un ***sistema lineare.***

1. Funzioni.

Dato un elemento p *generico* della classe U (cioè qualunque esso sia, non importa quale) sia determinato, e con una certa *legge*, un elemento a della classe V, dipendente sia dalla legge considerata che dell'elemento p della classe U. Si dirà, come in Analisi, che

$$a \text{ è un } V \text{ funzione degli } U$$

---

(1) Per i vettori dello spazio lineare ad n dimensioni, si hanno teoremi analoghi ai precedenti; cfr. pp. 11-13 del libro: *Espaces courbes. Critique de la relativité* di C. Burali-Forti e T. Boggio (STEN).

Citeremo questo libro con l'abbreviazione E. C. R.

(2) Del contenuto di questa parte III della introduzione si fa uso soltanto dopo il Cap. I del testo.

e si scriverà, pure come in Analisi,

[1] $a = fp$, o anche, ma non è necessario, $a = f(p)$ (1).

Ammettiamo che, nella [1], p vari comunque nella classe U (p è la ***variabile indipendente*** e U è il suo *campo di variazione*) e che f sia il ***simbolo fisso*** che indica la *legge* per mezzo della quale dato l'elemento p di U si calcola l'elemento a di V che sodisfa alla [1]. Il simbolo fisso f chiamasi, come in Analisi, ***simbolo di funzione***, ed è precisamente un operatore tra gli U e i V [cfr. I, n. 4].

Si può, nello stesso modo, considerare un V funzione di più variabili $p_1, p_2, \ldots p_n$, tutte appartenenti alla classe U o a classi $U_1, U_2, \ldots U_n$, sodisfacenti alle stesse condizioni poste per U. Vale a dire si può considerare un V funzione di una ***n-upla***. Anche in questi casi seguiremo le ordinarie notazioni dell'Analisi.

Sia α un **operatore** ***funzione degli*** U, che applicato agli elementi della classe V dà degli elementi appartenenti ad un sistema lineare. In tali ipotesi si dirà che:

α è operatore per i V, lineare e funzione degli U

quando: *essendo p elemento arbitrario di U (non importa quale) sono verificate le condizioni*

[2] $\alpha(fp + \varphi p) = \alpha(fp) + \alpha(\varphi p), \quad \alpha(mp \cdot fp) = mp \cdot \alpha(fp)$

qualunque siano gli operatori f, φ tra gli U e i V e qualunque sia l'operatore m tra gli U e i numeri reali relativi.

È importante il teorema seguente.

[3]. *Per verificare che α è* **operatore per i** V **lineare e funzione degli** U, *è* **sufficiente** *dimostrare che le* [2] *sono vere*

---

(1) Di solito in Analisi si scrive $a = f(p)$, per il simbolo *generico* f di funzione, e non $a = fp$; mentre per i simboli particolari sen, cos, ... si scrive $a = \operatorname{sen} p$ e non $a = \operatorname{sen}(p)$. Si possono seguire indifferentemente le due notazioni fp, $f(p)$, ma è più semplice la prima e quindi preferibile alla seconda. Del resto si deve osservare che adottata la notazione fp si scrive anche $f(p + q)$ mentre, per seguire la notazione generale $f(p)$, si dovrebbe scrivere $f((p + q))$.

per fp e φp **costanti arbitrarie,** *purchè il numero mp sia funzione generica degli U.*

Dim. Ciò risulta subito dal fatto che l'elemento generico a di V si può esprimere linearmente mediante elementi *costanti* di V con dei coefficienti numerici variabili e funzioni degli U [cfr. II, n. 2].

2. Classe derivata.

a) Se U è sistema lineare ad n dimensioni, allora è noto [cfr. II, n. 2] che fissati degli elementi $h_1, h_2, \dots, h_n$ linearmente indipendenti di U, per l'elemento generico p di U si ha $p = \Sigma x_i h_i$ e che: **dipendentemente dal sistema h di riferimento,** resta stabilita una **corrispondenza univoca e reciproca** tra gli U (elemento generico p) e i *numeri complessi di ordine n.*

Data una classe u, non vuota, formata con gli U, resta determinata, dipendentemente dal sistema u, una classe x di numeri complèssi dell'ordine n, che sono i corrispondenti (nel senso sopra indicato e rispetto ad h) degli elementi di u. Della classe x possiamo considerare la *classe derivata* (e anche le *classi limiti*) (1); a questa classe derivata x_0 corrisponde, nel senso sopra indicato e rispetto al sistema h, una classe u_0 formata con gli U. Ora, se insieme al sistema di riferimento $h_1, h_2, \dots, h_n$ si considera un altro sistema di riferimento $k_1, k_2, \dots, k_n$, si può dimostrare [poichè le h o le k si esprimono *linearmente* e mediante coefficienti *costanti*, con le k o le h] che la classe u_0 ottenuta con le h è *identica* a quella ottenuta con le k; vale a dire *la classe u_0 è indipendente dal sistema di riferimento.*

Questa classe u_0 si chiamerà *classe derivata della classe u.*

Risulta che la classe derivata si ottiene così. Si fissa, ad arbitrio un sistema h di riferimento; si determina la classe x dei numeri complessi di ordine n che dà la classe u

(1) G. Peano, *Formulario Mathematico*; Editio V, pp. 139-141, p. 145; oppure: L. M., Cap. V, § 8, n. 2.

rispetto al sistema h; si calcola la classe derivata x_0 di x; la classe u_0 che, rispetto al sistema h, corrisponde alla classe x_0 è appunto la classe derivata di u.

b) Finchè si opera con un generico sistema U (lineare o parte di sistema lineare) è necessario, per definire la classe derivata, ricorrere all'artificio delle coordinate e alla classe derivata di una classe di complessi di ordine n. Ma per gli elementi *geometrici* che consideriamo in tutto il testo, si può sempre operare *indipendentemente da coordinate*.

Ci basta considerare il caso: *u è classe di punti* **ordinari** (cioè punti non all'infinito). Si ha che: *la classe derivata u_0 di u è formata da tutti, e soli, i punti x tali che, fissata ad arbitrio una lunghezza non nulla ε (piccola a piacere), esiste sempre almeno un punto y di u, e diverso da x, tale che la distanza di x da y è minore di ε*. Più brevemente si può dire che: *u_0 è la classe dei punti x che hanno* **distanza nulla** *dalla figura formata dai punti di u diversi da x* (poichè la distanza di x da una figura è il *limite inferiore* delle distanze di x dai punti della figura e che sono diversi da x) (¹).

c) Si può anche definire la classe derivata nel caso geometrico *b*), riferendoci alla classe derivata di una *classe di numeri* reali. Si dirà che: *u_0 è la classe derivata di una classe u di punti ordinari, quando, comunque si fissino il punto O e il vettore a, la classe $(O - u_0) \times a$ è la classe derivata della classe di numeri reali $(O - u) \times a$.*

3. Limite e continuità.

Sia fp [cfr. n. 1] un V funzione dell'elemento p che varia in un campo u formato con elementi di U. Si può considerare il **limite** [limite generale (classe), o limite particolare (elemento); cfr. *Formulario* di G. PEANO, l. c. e L. M.] *al quale tende fp quando, p variando in u tende ad un elemento p_0 della classe derivata di u.*

(¹) Cfr. *Formulario...*, già citato, di G. PEANO e *Calcolo differenziale* p. 88 (Collezione Lattes) di T. BOGGIO.

Noi ci limitiamo a considerare il limite particolare (non classe limite), cioè il caso nel quale esiste un elemento m_0 di V che è il ***limite a cui tende fp quando p, variando in u e rimanendo diverso da p_0, tende all'elemento p_0 della classe derivata di u.*** Esprimeremo ciò scrivendo

$$\lim_{p \to p_0} fp = m_0 .$$

Se un qualsiasi elemento della classe u appartiene anche alla classe derivata di u, diremo che fp *è* **continua** *nel campo u*, quando essendo p_1 un qualsiasi elemento di u si ha che

$$\lim_{p \to p_1} fp = fp_1$$

cioè quando per p tendente a p_1 la fp tende al limite fp_1 che è il valore della funzione per l'elemento p_1.

Esaminiamo ora in particolare il *limite*, la continuità derivata da questo, della fp per p tendente ad un elemento p_0 della classe derivata di u.

Se gli U e i V fanno parte, come si è supposto, di sistemi lineari ad m ed n dimensioni, basta considerare le coordinate di p e di fp (rispetto a stabiliti elementi di riferimento) per ridurre la determinazione del limite considerato a quella del limite di un numero complesso funzione di un numero complesso [cfr. n. 1, a)]. Lo stesso dicasi per una funzione $f(p, q, ...)$ di due o più variabili. In ogni caso sarà necessario dimostrare che il limite ottenuto è indipendente dagli elementi di riferimento in U e in V.

Ma tale procedimento, mediante coordinate, necessario pei sistemi lineari generici, è del tutto sconsigliabile quando si operi con sistemi *geometrici*; per questi non vi è bisogno di ricorrere a coordinate potendosi introdurre il limite sotto forma assoluta.

È appunto questa forma assoluta che noi ora vogliamo esporre nel caso, importantissimo per le applicazioni fisico-meccaniche-geometriche, in cui U sia la classe *punto* (ordinario), e V la classe, o dei *numeri reali*, o dei *vettori*, o dei *punti*, o delle *trasformazioni lineari dei vettori in vettori* (dette *omografie vettoriali*). Il limite in questi casi, si ottiene dal *limite di un numero reale funzione di un punto*. Ci limitiamo a considerare il *limite unico elemento* (purchè esista) e non la *classe limite* (sempre esistente) [cfr. *Formulario*, l. c.].

a) Siano: m un numero reale relativo funzione del punto p variabile in un campo u; m_0 un numero reale relativo indipendente da p (costante); p_0 un punto della classe derivata di u.

Si dirà, sotto tali ipotesi, che: *m tende al limite m_0 per p variabile in u e tendente a p_0*, e si scriverà

$$\lim_{p \to p_0} m = m_0,$$

quando: *fissato ad arbitrio un numero reale relativo h (piccolo quanto si vuole), esiste sempre una sfera di centro p_0 tale che, in tutti i suoi punti interni p_1 (escluso p_0), il numero m (funzione di p) prende dei valori m_1 che differiscono, in valore assoluto, da m_0 meno di h, cioè* $\mathrm{mod}\,(m_1 - m_0) < h$.

b) Siano ora: u, q, α, rispettivamente, un *vettore*, un *punto*, un *operatore lineare tra vettori e vettori*, funzioni del punto p variabile nel campo u; u_0, q_0, α_0 elementi indipendenti da p (costanti) della stessa specie di u, q, α; p_0 un punto della classe derivata di u.

Si dirà, sotto tali ipotesi, che: *u, q, α tendono, rispettivamente al limite u_0, q_0, α_0 per p variabile in u e tendente a p_0*, e si scriverà,

$$\lim_{p \to p_0} u = u_0, \qquad \lim_{p \to p_0} q = q_0, \qquad \lim_{p \to p_0} \alpha = \alpha_0,$$

quando: in qualunque modo si fissino un vettore a e un punto O, indipendenti da p (costanti) si ha sempre:

$$\lim_{p \to p_0} (u \times a) = u_0 \times a, \quad \lim_{p \to p_0} (q - O) = q_0 - O, \quad \lim_{p \to p_0} (\alpha a) = \alpha_0 a.$$

c) Con le *a*), *b*) abbiamo dato il concetto di **limite** *ordinario* (non *classe limite* per la quale si può operare in modo analogo) nei casi geometrici fondamentali. Al lettore sarà facile estendere ad altri casi, come pure considerare le ordinarie proprietà del limite, supposto esistente, (limite di una somma, ecc.) che ci risparmiamo di enunciare.

4. Differenziali.

Sia fp un V funzione dell'elemento p che varia nel campo u formato con elementi della classe U. Se x è un elemento della classe diff U, chiameremo

differenziale di fp rispetto ad x

il

[1] $$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+hx)-fp}{h},$$

supposto che tale limite esista e che il *numero reale relativo h* vari in modo che $p+hx$ appartenga alla classe u.

Se f è l'*identità* (cioè $fp=p$ per p qualunque in u) allora da [1] si ha:

[2] « differenziale di p rispetto ad x » $=x$,

vale a dire: *ciascun elemento della classe* diff U *è un differenziale di p.*

Seguendo notazioni usuali (di Leibniz) noi indicheremo con

$$dp,\ \delta p,\ \vartheta p, \ldots$$

dei *differenziali arbitrari di p*, cioè degli elementi arbitrari della classe diff U. I *differenziali dipendenti di fp*, definiti da [1], li indicheremo, rispettivamente, con le notazioni

$d(fp)$, $\delta(fp)$, $\vartheta(fp)$, ... o semplicemente, dfp, δfp, ϑfp, ...,

vale a dire porremo

[3] $$\begin{cases} d(fp)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+hdp)-fp}{h} \\ \delta(fp)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h\delta p)-fp}{h} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si osservi che i simboli (del resto arbitrari) d, δ, ϑ, ... *non sono* dei *simboli* fissi. Con le definizioni [3] noi intendiamo soltanto stabilire una *corrispondenza di* **forma** tra *un differenziale arbitrario dp di p* e il *differenziale di fp dipendente da dp* [1].

Le seguenti proprietà a)-d) sono di importanza pratica notevole.

a) Se, essendo dp, δp dei differenziali arbitrari di p, ed essendo m un numero reale si prendono

$$dp + \delta p, \qquad m dp$$

come differenziali arbitrari di p, allora i differenziali di fp dipendenti da essi sono

$$d(fp) + \delta(fp), \qquad md(fp)$$

come risulta subito dalle [3].

b) Se a, b sono degli elementi, funzioni di p, appartenenti a sistemi lineari e $\bigcirc$ è il simbolo di una *operazione, distributiva rispetto alla somma*, e tale che $a \bigcirc b$ sia elemento di un sistema lineare, allora

$$d(a \bigcirc b) = (da) \bigcirc b + a \bigcirc (db).$$

c) Nelle stesse ipotesi e se α è operatore lineare funzione di p, allora

$$d(\alpha a) = (d\alpha)a + \alpha(da).$$

5. Differenziali parziali e differenziale totale.

Sia $f(p, q, r, ...)$ un V funzione di n elementi p, q, r, ... della classe U che variano, indipendentemente l'uno dall'altro, in campi formati con gli U.

---

[1] Se U è la classe dei numeri reali allora $d(fp)$ è il differenziale rdinario di fp rispetto a dp; e se $dp = 1$ allora $d(fp)$ è l'ordinaria derivata [cfr. G. Peano, *Calcolo geometrico* (a. 1888), p. 151] e ciò soltanto per i sistemi lineari.

Fissato un differenziale arbitrario dp, ad es., di p, indichiamo con

$$d_p f$$

il differenziale di f, dipendente da dp, *supposto* $q, r, \ldots$ *costanti.* Diremo che $d_p f$ è un **differenziale parziale**, *e rispetto alla variabile* p, *di* f.

Per il **differenziale totale**, dipendente dai differenziali dp, dq, $dr, \ldots$ delle variabili *indipendenti* p, q, $r, \ldots$, e che indicheremo con

$$df(p, q, r, \ldots)$$

porremo, come in Analisi:

$$df = d_p f + d_q f + d_r f + \ldots$$

6. Derivate.

Sia $a = fp$ un V funzione dell'elemento p che varia nella classe U. Si chiamerà

derivata di a rispetto a p

e si indicherà con la notazione, di Leibniz,

[1] $$\frac{da}{dp}, \quad \text{ovvero} \quad da/dp, \quad \text{o anche} \quad \frac{d}{dp}a$$

l'**operatore** tale che: *applicato ad un differenziale qualunque* dp, δp, $\vartheta p, \ldots$ *produce il differenziale corrispondente* da, δa, $\vartheta a, \ldots$ di a, *cioè:*

[2] $$\frac{da}{dp} dp = da, \quad \frac{da}{dp} \delta p = \delta a, \quad \frac{da}{dp} \vartheta p = \vartheta a, \ldots$$

Se l'operatore da/dp *sodisfacente alla condizione* [2] **esiste,** *allora esso: è* **operatore tra** diff U **e i** V; *è* **lineare;** *è* **univocamente determinato.**

Dim. È *operatore tra* diff U *e i* V perchè i differenziali dp, $\delta p, \ldots$ sono elementi arbitrari di diff U e da, $\delta a, \ldots$ sono determinati elementi di V.

È *lineare*, perchè, essendo m un numero reale, si ha [cfr. n. 4, a)]

$$\frac{da}{dp}(dp + \delta p) = da + \delta a = \frac{da}{dp}dp + \frac{da}{dp}\delta p,$$

$$\frac{da}{dp}(mdp) = mda = m\frac{da}{dp}dp.$$

È *univocamente determinato*, perchè nel campo diff U si possono considerare tanti differenziali di p *linearmente indipendenti* quante sono le dimensioni del sistema lineare diff U [cfr. II, n. 3].

E tutto ciò *ammessa* l'esistenza dell'operatore da/dp.

a) *Se U è la classe dei numeri reali relativi si ha*

[3] $$\frac{d(fp)}{dp} = \lim_{k \to 0} \frac{f(p+k) - fp}{k}$$

e quindi, anche per V sistema lineare qualunque, la derivata di a rispetto al numero p ha la forma ordinaria dell'Analisi.

Dim. Se nella [3] del n. 4 si pone $hdp = k$, osservando che h, dp, e quindi anche k sono numeri si ha

$$d(fp) = \lim_{k \to 0} \frac{f(p+k) - fp}{k} \cdot dp$$

da cui risulta subito la [3].

b) Se V è, come U, la classe dei numeri reali, allora la [3] prova che le derivate come le abbiamo definite, coincidono con quelle ordinarie dell'Analisi.

Se poi, essendo U la classe dei numeri reali, V è sistema lineare qualunque allora si conservano le forme ordinarie fondamentali dell'Analisi. In particolare interessano i casi nei quali V è sistema lineare (o parte di sistema lineare) geometrico. Crediamo inutile esporre di nuovo ciò che riguarda le derivate in questi casi ora indicati, poichè si hanno questioni già ampiamente trattate e che ammettiamo note [1].

c) Nel caso generale, U, V sistemi lineari qualunque, valgono, per le derivate, le proprietà seguenti, in parte analoghe a quelle ordinarie dell'Analisi

[4] $\dfrac{da}{dp} = 0$ in tutto il campo, equivale ad $a = \text{cost.}$

[5] $$\frac{d(a+b)}{dp} = \frac{da}{dp} + \frac{db}{dp}$$

[6] $$\begin{cases} \dfrac{d(ma)}{dp}x = \left(\dfrac{dm}{dp}x\right)a + m\dfrac{da}{dp}x \\ \text{per } m \text{ numero e } x \text{ elemento arbitrario di diff } U. \\ \text{In particolare } \dfrac{d(ma)}{dp} = m\dfrac{da}{dp} \text{ per } m = \text{cost.} \end{cases}$$

[7] $$\begin{cases} \dfrac{da}{dq} = \dfrac{da}{dp}\dfrac{dp}{dq} \\ a \text{ essendo funzione di } q \text{ e } q \text{ funzione di } p. \end{cases}$$

Si noti che, nella [7], a, q devono esser funzioni tali di q, p, rispettivamente, che ai differenziali arbitrari di p corrispondano differenziali arbitrari di q. — La [6] risulta subito da $d(ma) = dm \cdot a + m \cdot da$, ponendo $dm = (dm/dp)dp$, $da = (da/dp)dp$, e sostituendo poi x a dp.

7. Derivate parziali.

Sia $a = f(p, q, r, ...)$ un V funzione di n elementi della classe U che variano indipendentemente l'uno dall'altro.

Le **derivate parziali** *di a rispetto a p, q, r*, che indichiamo con le notazioni

$$\frac{\partial a}{\partial p}, \ \frac{\partial a}{\partial q}, \ \frac{\partial a}{\partial r}, \ldots$$

---

[1] Per ciò che riguarda *punti* e *vettori*, cfr. E. C. V, l. c. Per le *formazioni geometriche in generale*, cfr. C. Burali-Forti, *Geometria analitico-proiettiva*, 2ª ediz. (G. B. Petrini, Torino).

si definiscono come: ***derivate di a*** [cfr. n. 6] ***rispetto a p, q, r,... supposto che soltanto p,*** ovvero q, ovvero r,... ***varino mentre le rimanenti si intendono fisse o costanti.***

Queste derivate parziali sono ancora operatori lineari [cfr. n. 6] tra diff U e i V.

Per il differenziale totale da di a si ha, come in Analisi

[1] $$da = \frac{\partial a}{\partial p} dp + \frac{\partial a}{\partial q} dq + \frac{\partial a}{\partial r} dr + \dots$$

Sono importanti le proprietà seguenti:

[2] $$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{da}{dp}\frac{\partial p}{\partial u}, \quad \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{da}{dp}\frac{\partial p}{\partial v}, \dots$$
essendo a funzione di p soltanto e p funzione dei numeri reali relativi $u, v, \dots$;

[3] $$\frac{da}{dp} = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{du}{dp} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{dv}{dp} + \dots$$
essendo a funzione dei numeri reali $u, v, \dots$ e questi essendo funzioni di p soltanto;

[4] $$\frac{da}{dx} = \frac{\partial a}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial a}{\partial q}\frac{dq}{dx} + \dots$$
essendo a funzione di $p, q, \dots$ e questi funzioni dell'elemento x che è un U o un numero reale.

Giova ricordare esplicitamente che i termini del 2° membro della [4] sono le ***derivate rispetto ad x*** di a supposto, successivamente, $q, \dots$ costanti e p soltanto variabile, ecc., e quindi si ha come in Analisi:

[5] $$\frac{da}{dx} = \left(\frac{da}{dx}\right)_{p_2, \dots, p_n \text{ costanti}} + \dots + \dots$$
essendo a funzione di $p_1, p_2, \dots, p_n$ e queste funzioni di x.

8. Differenziali e derivate successive.

Sia $a = fp$ un V funzione dell'elemento p che varia nella classe U e $d_1p, d_2p, \dots d_np$ dei differenziali arbitrari di p ***indipendenti*** l'uno dall'altro, cioè elementi generici della classe diff U.

a) È noto che $d_1 a$ è il differenziale di a dipendente dal differenziale $d_1 p$ di p [cfr. n. 4]. È chiaro che $d_1 a$ è pure una funzione di p (e anche di $d_1 p$) e quindi si può considerarne il differenziale $d_2 d_1 a$ di $d_1 a$ dipendente dal differenziale $d_2 p$ di p. Ma $d_2 d_1 a$ è pure funzione di p (e di $d_1 p$, $d_2 p$) e quindi si può considerare il differenziale $d_3 d_2 d_1 a$ di $d_2 d_1 a$ dipendente dal differenziale $d_3 p$ di p. Così continuando, per induzione, si ha il *differenziale di ordine n* di a

[1] $$d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 a$$

dipendente dai differenziali, arbitrari ed indipendenti $d_1 p$, $d_2 p, \dots, d_n p$ di p.

In generale il differenziale [1] di ordine n, varia col variare dell'ordine nel quale si succedono i simboli d.

b) La derivata di a rispetto a p, da/dp è una funzione di p, e se ne può quindi considerare la derivata rispetto a p (se esiste) che chiameremo ***derivata 2ª di a rispetto a p*** e indicheremo con la solita notazione leibniziana $\dfrac{d^2 a}{dp^2}$. Anche questa derivata 2ª è una funzione di p e la sua derivata (se esiste) si chiamerà ***derivata 3ª di a rispetto a p*** e si indicherà con la notazione $\dfrac{d^3 a}{dp^3}$. Così continuando, per induzione, si giunge alla generica ***derivata n-esima rispetto a p***, che si indicherà col simbolo $\dfrac{d^n a}{dp^n}$.

Bisogna tener ben presente che, come da/dp *è operatore tra* diff U *e i differenziali di* V, così

[2] $\dfrac{d^n a}{dp^n}$ *è operatore tra* diff U *e i differenziali delle derivate* $(n-1)$*-esime di* a.

c) È importante osservare che [cfr. *Espaces courbes* per le omografie di ordine u]:

L'operatore $\dfrac{d^n a}{dp^n}$ ***applicato, successivamente, ai differenziali*** $d_n p$, $d_{n-1} p, \dots, d_2 p$, $d_1 p$, ***arbitrari e indipendenti, di*** p

produce il differenziale $d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 a$ di ordine n di a [cfr. la [1]]; cioè

$$\frac{d^n a}{dp^n} d_n p d_{n-1} p \dots d_2 p d_1 p = d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 a. \tag{3}$$

Dim. Si ha, ad es.,

$$\frac{d^2 a}{dp^2} d_2 p d_1 p = \frac{d}{dp}\left(\frac{da}{dp}\right) d_2 p d_1 p = \left(d_2 \frac{da}{dp}\right) d_1 p;$$

ma $d_1 p$, $d_2 p$ sono indipendenti, per ipotesi, e quindi

$$\frac{d^2 a}{dp^2} d_2 p d_1 p = d_2 \left(\frac{da}{dp} d_1 p\right) = d_2 d_1 p;$$

per induzione si ottiene la [3] per n generico.

Il teorema ora dimostrato stabilisce una notevole relazione tra la derivata *n-esima* e i differenziali di ordine n di a.

d) Quanto abbiamo ora detto per la derivata *n-esima* di a rispetto a p si può estendere alle ***derivate parziali*** [cfr. n. 7] dei vari ordini per a funzione di due o più variabili. Si tenga peraltro sempre presente che le derivate totali o parziali sono, in generale, degli *operatori* ed è sempre necessario stabilire con esattezza in quale classe operano e quali elementi producono.

e) È utile, per ciò che segue, considerare degli ***operatori*** μ per le diff U [cfr. ***Espaces courbes***] tali che

$$\mu d_n p d_{n-1} p \dots d_2 p d_1 p \tag{4}$$

indichi (come avviene per la $d^n a/dp^n$) un determinato elemento appartenente alla classe dei differenziali di ordine n dei V, differenziali dipendenti dalla successione dei differenziali $d_1 p, \dots, d_n p$ di p.

In particolare se i differenziali $d_r p$, $r = 1, 2, \dots, n$, coincidono tutti col differenziale δp di p, allora in luogo della notazione [4] (che rimarrebbe indeterminata a causa della mancanza degli indici 1, 2, ..., n) si farà uso della notazione esatta

[5] $$\mu(\delta p)^{(n)},$$

ove l'n tra parentesi in alto non funziona da ordinario esponente, ma indica soltanto quante volte si deve applicare l'operatore μ a δp.

f) Se α, funzione di p, è un *operatore* per gli U, allora diremo che

[6] $\alpha \cdot da$ ***è un differenziale esatto***

quando *esiste un elemento h, pure funzione di p, per il quale si ha*

[6'] $$\alpha \cdot da = dh$$

qualunque sia il simbolo d di differenziale; cioè la [6'] vale quando si ponga al posto di d un altro simbolo qualunque δ di differenziale, $\alpha \cdot \delta a = \delta h$.

Se gli enti a, h sono tali che, per d e δ arbitrari, si abbia [cfr. *a*)]

$$d\delta a = \delta da, \quad d\delta h = \delta dh$$

cioè *due differenziali successivi siano* **commutabili**, *almeno per a e h*, allora la condizione [6] equivale alla condizione

[7] $$\delta\alpha \cdot da = d\alpha \cdot \delta a,$$

ovvero, ed è lo stesso [cfr. n. 6, [2]], alla condizione

[7'] $$\frac{d\alpha}{dp}\delta p \cdot \frac{da}{dp} dp = \frac{d\alpha}{dp} dp \cdot \frac{da}{dp}\delta p.$$

Dim. Se alle condizioni [6'], $\alpha \cdot da = dh$, $\alpha \cdot \delta a = \delta h$, si applicano, rispettivamente, δ e d si ha:

$$\delta\alpha \cdot da + \alpha \cdot \delta da = \delta dh, \quad d\alpha \cdot \delta a + \alpha \cdot d\delta a = d\delta h;$$

ma, per ipotesi, $\delta da = d\delta \alpha$, $\delta dh = d\delta h$ e quindi, sottraendo, si ha la [7], ovvero la [7'], il che prova che, nelle ipotesi fatte, dalla [6] *segue* la [7]. Viceversa. Se vale la [7] e questa si somma con $\alpha\cdot\delta da = \alpha\cdot d\delta a$ si ottiene, ovviamente,

$$\delta(\alpha\cdot da) = d(\alpha\cdot\delta a)$$

che dovendo valere per d, δ arbitrari, richiede, per un noto teorema di ANALISI [cfr. *Espaces courbes*, l. c., p. 53], che valga la [6'], cioè la [6]; il che prova che, nelle ipotesi fatte, dalla [7] segue la [6]. Cfr. Cap. II, § 1, n. 6 per lo sviluppo completo della dimostrazione in un caso particolare.

Si suol dire che: *la* [7] *è la condizione di* **integrabilità** *della* [*6*].

9. Formula di Taylor.

Sia fp un V funzione dell'elemento p che varia nella classe U e δp un differenziale arbitrario di p.

Il valore $f(p+\delta p)$ che fp assume per il valore $p+\delta p$ di p si può esprimere sotto una forma, praticamente assai interessante, analoga a quella di TAYLOR per le funzioni numeriche. Osservando che in virtù delle leggi generali stabilite per le potenze degli operatori $\delta^2 fp = \delta\delta fp$, $\delta^3 fp = \delta\delta\delta fp, \ldots$, si ha:

$$[1] \quad f(p+\delta p) = fp + \delta fp + \frac{1}{2!}\delta^2 fp + \ldots + \frac{1}{n!}\left\{\delta^n fp + \varepsilon\,(\delta p)^{(n)}\right\},$$

ovvero sotto altra forma

$$[2] \qquad f(p+\delta p) = fp + \frac{dfp}{dp}\delta p + \frac{1}{2!}\frac{d^2fp}{dp^2}(\delta p)^{(2)} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n fp}{dp^n} + \varepsilon\right\}(\delta p^{()})^{n)},$$

ove ε è un operatore [cfr. n. 8, *e*)] funzione di p e di δp tale che

$$[3] \qquad \lim_{\delta p \to 0} \varepsilon = 0.$$

Dim. Dalla [3] del n. 4 si ha

$$dfp = \frac{f(p + hdp) - fp}{h} - \varepsilon_1$$

ove ε_1 è un differenziale dei V funzione di p e di h e di dp tale che $\lim_{dp \to 0} \varepsilon_1 = 0$; vale a dire si ha

$$f(p + hdp) = fp + hdfp + h\varepsilon_1.$$

Posto $\delta p = hdp$ si ha [cfr. n. 4, *a*)]

$$f(p + \delta p) = fp + \delta fp + \varepsilon \delta p$$

ove ε è tale che $h\varepsilon_1 = \varepsilon\delta p$ e quindi $\lim_{\delta p \to 0} \varepsilon = 0$. La [1] è così dimostrata per $n = 1$. Per induzione si dimostra per n qualunque. Si passa facilmente [cfr. n. 8] dalla [1] alla [2].

Nel caso particolare che U sia la classe dei numeri reali relativi, cioè fp sia un V funzione del numero reale p, allora la [2] assume forma ancor più analoga a quella della ordinaria formula di Taylor. Indicando, come d'uso, con gli apici le derivate rispetto a p si ha

$$[4] \qquad f(p + h) = fp + hf'p + \frac{h^2}{2!} f''p + \ldots + \frac{h^n}{n!} \{ f^{(n)}p + \varepsilon \}$$

ove ε è tale funzione di h (e anche di p) che

$$[5] \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0.$$

Bisogna notare esplicitamente che la parte entro parentesi $\{ \}$ dell'ultimo termine della [2] o [4] *non* è, come in Analisi, la derivata di f per un elemento compreso fra p e $p + \delta p$, ovvero tra p e $p + h$; è invece un ente *medio* tra i valori che assumono le derivate nell'intervallo da p a $p + \delta p$. Ma non ci è per ora necessario tener conto di questi enti *medi*.

10. Integrali.

a) Nel caso che U sia la classe dei *numeri reali relativi*, cioè fp sia un V funzione del numero reale p, allora [cfr. E. C. V.] con la notazione

$$\int fp \cdot dp$$

si indica una qualunque delle funzioni Fp aventi fp per derivata. E se a, b sono due valori di p si pone

$$\int_a^b fp \cdot dp = Fb - Fa.$$

Si ritrovano proprietà analoghe a quelle dell'Analisi per le funzioni numeriche e non stiamo ad insistere sull'argomento.

b) Valgano le ipotesi seguenti:

U è una classe (continua...) di *punti* in uno *spazio ad* n dimensioni;

$d\tau$ è l'*elemento* di *amplitudine* nel punto generico p di U;

fp è, in tutto il campo U un *numero reale*.

In tali ipotesi è *noto* il significato dell'*integrale multiplo*

$$\int fp \cdot d\tau \qquad \text{(notazione abbreviata)}$$

che chiamasi anche: *integrale di* f *esteso al campo* U.

c) Valgano ora le ipotesi seguenti:

1ª e 2ª ipotesi *b*) per U e $d\tau$;

V è sistema lineare;

$\bigcirc$ è il simbolo di *operazione* tra i V' (classe da scegliere a seconda dei casi) e i V, che produce un *numero reale*;

l'operazione $\bigcirc$ è tale che, qualunque sia l'elemento h di V', l'*operatore* $h\bigcirc$, tra i V e i numeri reali, è *operatore lineare*.

In tale ipotesi si indicherà con

$$\int fp \cdot d\tau, \text{ « integrale di } p \text{ esteso al campo } U \text{ »}$$

quell'elemento di V tale che, comunque sia l'elemento h, *costante*, di V', si ha

$$h \bigcirc \int fp \cdot d\tau = \int (h \bigcirc fp) d\tau,$$

e così l'$\int fp \cdot d\tau$ è ridotto agli integrali del caso *b*).

Capitolo I.

OMOGRAFIE VETTORIALI

§ 1. Operatori fondamentali I, $\dot{\mathrm{K}}$, D, V per le omografie.

1. Definizione di omografia vettoriale.

Chiameremo ***omografia vettoriale***, o semplicemente ***omografia***, ogni **trasformazione lineare** ***tra*** **vettori** ***dello spazio totale e*** **vettori** [cfr. Intr. II, n. 3], ovvero, il che equivale, ogni **sostituzione lineare** ***per i*** **vettori** ***dello spazio totale*** [cfr. Intr. I, n. 4; II, n. 3].

Se, dunque, α è una *omografia* e x è un ***vettore*** arbitrario, allora αx è pure un ***vettore*** che dipende da α e da x, ciò che è *funzione*, ad un tempo, di α e di x.

Siccome i ***vettori dello spazio totale*** formano un ***sistema lineare a*** **tre** ***dimensioni***, ne segue che: ***una omografia α è individuata quando di tre vettori non complanari $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, se ne conoscono i vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, corrispondenti, rispetto ad α***; il che si esprime come è noto [cfr. Intr. II, n. 3, [4]] con la notazione

[1] $$\alpha = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}, & \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

che equivale alle tre relazioni

[1′] $$\alpha \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u},\ \alpha \boldsymbol{j} = \boldsymbol{v},\ \alpha \boldsymbol{k} = \boldsymbol{w};$$

e per il vettore

[2] $$x = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

espresso linearmente mediante $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, si ha

[3] $$\alpha x = a \cdot \alpha \boldsymbol{i} + b \cdot \alpha \boldsymbol{j} + c \cdot \alpha \boldsymbol{k} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}.$$

Giova notare subito che: *una omografia* α *applicata a vettori paralleli ad un* **piano**, *o ad una* **retta**, *produce dei vettori che sono pure paralleli ad un* **piano** *(il che non esclude che possano essere paralleli ad una retta)*, *o ad una* **retta.**

Dim. Se i, j sono vettori non paralleli tra loro, ma paralleli ad un dato piano, allora qualsiasi vettore x parallelo a tale piano è della forma $x = ai + bj$ da cui si trae $\alpha x = a \cdot \alpha i + b \cdot \alpha j$. Ora: se αi, αj non sono paralleli, αx è parallelo ad ogni piano parallelo ad αi e αj; se, poi, αi, αj sono paralleli ad una stessa retta, i vettori αx sono pure paralleli alla stessa retta. In modo analogo per i vettori che si ottengono applicando α a vettori paralleli ad una retta.

È già noto [cfr. Intr. II, n. 3], e del resto lo si deduce immediatamente dalle [2], [3], che: *una qualsiasi omografia* α *applicata al vettore nullo produce il vettore nullo*

[4] $$\alpha 0 = 0,$$

e l'omografia nulla (zero, 0) applicata ad un qualsiasi vettore produce il vettore nullo

[5] $$0x = 0;$$

ma si deve osservare che può essere $\alpha x = 0$ senza che debba essere, necessariamente, $x = 0$, ovvero $\alpha = 0$, il che vedremo ampiamente tra poco [cfr. n. 2].

Riguardo alla *omografia nulla* si tenga presente che:

Affinchè l'omografia α *sia* **nulla** *è necessario e sufficiente che esistano tre vettori* **non complanari** *che siano trasformati da* α *in vettori nulli.*

Dim. Sia i, j, k una terna di vettori non complanari. Se $\alpha = 0$ allora $\alpha i = \alpha j = \alpha k = 0$ e quindi la condizione è *necessaria.* Se $\alpha i = \alpha j = \alpha k = 0$, allora per un vettore qualunque u si ha

$$u = xi + yj + zk \quad \text{e quindi} \quad \alpha u = x\alpha i + y\alpha j + z\alpha k = 0,$$

cioè $\alpha u = 0$ per u vettore arbitrario, vale a dire $\alpha = 0$; la condizione è dunque *sufficiente.*

Tenuto conto che, per definizione, una *omografia vettoriale* è una *sostituzione per i vettori,* segue immediatamente, da cose già note, che:

La **somma** *di un numero finito di omografie è una omografia e tale somma è* **associativa** *e* **commutativa** [cfr. Intr. II, n. 4]:

Il **prodotto funzionale** *di un numero finito di omografie (successione) è una omografia e tale prodotto è* **associativo** *e* **distributivo** *rispetto alla somma, ma, in generale,* **non è commutativo** [cfr. Intr. II, n. 3, 2°]:

La **potenza ad esponente intero positivo** *di una omografia è una omografia e lo stesso avviene per la potenza ad esponente intero negativo di una omografia* **invertibile** [cfr. n. 2]; *e per* α, β *omografie qualunque ed* m, n *interi positivi, o negativi nel caso dell'invertibilità, si ha*

$$[6] \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \quad (\alpha\beta)^m \neq \alpha^m \cdot \beta^m \quad \text{(in generale)} \\ \qquad (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \quad \text{[cfr. Intr. I, n. 6].} \end{array} \right.$$

Giova tener presente il caso particolare dell'omografia individuata da un numero reale relativo m. È noto che $m\odot$ è *sostituzione per qualsiasi sistema lineare* [cfr. Intr. II, n. 5, 4°] e in conseguenza: $m\odot$ è *una omografia.* Si è già convenuto [cfr. Intr. II, n. 5, *a*)] di *sottintendere* il segno $\odot$ di operazione e quindi, come per i sistemi lineari generici, si può dire, *sebbene inesattamente,* che:

Ogni numero reale è una omografia vettoriale.

In particolare: *lo* **zero** (0), *esattamente* $0\odot$, *è l'* **omografia nulla**: **l'unità** (1), *esattamente* $1\odot$, *è* **l'omografia identica**; *se* α *è omografia qualunque,* $m\alpha$, αm *sono omografie e si ha* $m\alpha = \alpha m$, perchè qualunque sia il vettore x si ha, ovviamente $m\alpha x = \alpha m x$. L'omografia $m\alpha$, ovvero αm, si può chiamare: **prodotto** *di* α *per il numero reale* m.

Le nozioni generiche, ora esposte, e dipendenti dalla *definizione di omografia,* sono di continuo uso, ed è quindi necessario averle ben presenti.

2. Omografie proprie e degeneri (o singolari). Direzioni nulle rispetto ad una omografia degenere.

Una importante *classificazione* delle *omografie vettoriali* in due gruppi, *proprie, degeneri (o singolari)*, risulta, come vedremo, dal teorema generale seguente.

Se esiste una terna di vettori **non complanari** *che è trasformata dalla omografia non nulla* α *in una terna di vettori:*

a) **non complanari;**

b) **paralleli ad un piano** π, **ma non paralleli tutti ad una retta;**

c) **paralleli ad una retta** p;

allora: **qualsiasi** *terna di vettori* **non complanari** *viene trasformata dalla stessa omografia* α *in una terna di vettori:*

a') **non complanari;**

b') **paralleli al piano** π, **ma non paralleli tutti ad una retta;**

c') **paralleli alla retta** p.

Dim. Se $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ è terna di vettori non complanari, $\boldsymbol{i}_1 \wedge \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3 \neq 0$, allora per una qualsiasi terna $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_3$ di vettori sono determinati i numeri a_{rs} tali che [cfr. E. C. V.]

$$(a) \qquad \boldsymbol{j}_r = a_{r1}\boldsymbol{i}_1 + a_{r2}\boldsymbol{i}_2 + a_{r3}\boldsymbol{i}_3, \quad \text{per} \quad r = 1, 2, 3;$$

e se poniamo

$$(b) \qquad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

si ha dalle (*a*) [cfr. E. C. V.]

$$(c) \qquad \boldsymbol{j}_1 \wedge \boldsymbol{j}_2 \times \boldsymbol{j}_3 = a \cdot \boldsymbol{i}_1 \wedge \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3$$

dalla quale risulta subito, poichè $\boldsymbol{i}_1 \wedge \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3 \neq 0$ per ipotesi; che:

i vettori $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_3$ *sono* ***non complanari****, ovvero* ***complanari****, secondo che* $a \neq 0$, *ovvero* $a = 0$.

Applicando l'omografia α ai vettori $\boldsymbol{j}_r$ espressi sotto le forme (*a*) si ha:

$$(d) \qquad \alpha\boldsymbol{j}_r = a_{r1} \cdot \alpha\boldsymbol{i}_1 + a_{r2} \cdot \alpha\boldsymbol{i}_2 + a_{r3} \cdot \alpha\boldsymbol{i}_3, \quad \text{per} \quad r = 1, 2, 3,$$

dalle quali espressioni risulta subito [cfr. E. C. V.], per la (*b*),

$$(e) \qquad (\alpha j_1) \wedge (\alpha j_2) \times \alpha j_3 = a \cdot (\alpha i_1) \wedge (\alpha i_2) \times \alpha i_3 .$$

Sia ora j_r (sempre sottinteso $r = 1, 2, 3$) terna di vettori *non complanari*, cioè si abbia $j_1 \wedge j_2 \times j_3 \neq 0$, il che, come si è visto, *equivale* ad $a \neq 0$. In tale ipotesi le parti *a'*), *c'*), *b'*) si dimostrano, ordinatamente, nel modo che segue.

[*a*] Se i vettori αi_r sono *non complanari*, allora, poichè $a \neq 0$, segue dalla (*e*) che anche i vettori αj_r sono *non complanari*; il che dimostra la *a'*) nella ipotesi *a*).

[*c*] Se i vettori αi_r sono paralleli ad una *retta* p, allora esiste un vettore non nullo u tale che $\alpha i_r = m_r u$ e quindi, per le (*d*), $\alpha j_r = n_r u$, vale a dire anche i vettori αj_r sono paralleli alla retta p; il che dimostra la *c'*) nella ipotesi *c*).

[*b*] Se i vettori αi_r sono paralleli ad un *piano* π, allora esistono almeno due vettori u, v non paralleli tra loro (e quindi non nulli) e paralleli a π tali che $\alpha i_r = m_r u + n_r v$. In conseguenza si ha, dalle (*d*), $\alpha j_r = h_r u + k_r v$, cioè anche i vettori αj_r sono paralleli al piano π. Stando l'ipotesi *b*) i vettori αj_r non possono essere tutti paralleli ad una retta di π; invero, se fossero paralleli ad una retta, allora, essendo i vettori j_r non complanari, in virtù di *c*) e *c'*), anche i vettori αi_r sarebbero paralleli ad una retta, il che è contrario alla ipotesi *b*). Ciò dimostra la *b'*) nella ipotesi *b*).

Possiamo, dunque, dividere le omografie in due gruppi e chiamare:

omografie proprie quelle che *trasformano vettori* **non complanari** *in vettori pure* **non complanari**;

omografie degeneri (o ***singolari***) quelle che *trasformano vettori* **non complanari** *in vettori* **complanari,** (*o* **paralleli ad una retta,** *o nulli, il che è compreso*).

A loro volta le *omografie degeneri*, **e non nulle** si possono dividere in due gruppi.

degeneri di 1ª specie, quelle α tali che i vettori αx, per x variabile in tutto il campo dei vettori, sono tutti *paralleli ad un piano* (funzione di α) ma *non paralleli ad una sola retta;*

degeneri di 2^a specie, quelle α tali che i vettori αx (per x come sopra) sono tutti *paralleli ad una retta* (funzione di α).

In quanto all'*omografia* **nulla**, che è pure *degenere*, non può essere nè di 1^a nè di 2^a specie, poichè un vettore nullo può ritenersi parallelo ad un qualsiasi piano o retta.

Inoltre ci è utile, per abbreviare il linguaggio, chiamare ***direzione nulla rispetto alla omografia*** α, ovvero ***direzione nulla di*** α, ogni *direzione* tale che, essendo u un vettore non nullo parallelo ad essa si abbia $\alpha u = 0$.

È chiaro che: *se il vettore non nullo u è parallelo ad una* **direzione nulla di** *α, cioè $\alpha u = 0$, per qualunque vettore v parallelo ad u si ha pure $\alpha v = 0$*; poichè $v = mu$ con m numero reale relativo e $\alpha v = \alpha m u = m\alpha u = m0 = 0$.

È evidente che: *qualsiasi direzione è nulla rispetto alla omografia nulla;* viceversa: *se qualsiasi direzione è nulla rispetto alla omografia α allora α è l'omografia nulla* [cfr. Intr. II, n. 3].

Faremo in seguito uno studio completo delle omografie degeneri. Per ora ci limiteremo ai due seguenti teoremi.

Affinchè una omografia sia **degenere** *è necessario e sufficiente che essa* **ammetta** *almeno* **una direzione nulla.** Sotto altra forma: *una omografia è* **propria** *solamente quando* **non** esista *una* **direzione nulla** *rispetto ad essa.*

Dim. Se α è omografia singolare e i, j, k sono vettori *non complanari*, allora αi, αj, αk sono vettori *complanari*, cioè esistono i numeri reali x, y, z non tutti nulli tali che

$$x \cdot \alpha i + y \cdot \alpha j + z \cdot \alpha k = \alpha(xi + yj + zk) = 0\,;$$

vale a dire esiste almeno un vettore *non nullo*

$$u = xi + yj + zk$$

tale che $\alpha u = 0$.

Viceversa. Se per il vettore non nullo u si ha $\alpha u = 0$, e u, v, w sono vettori *non complanari* (ed esistono), allora i vettori $\alpha u = 0$, αv, αw sono *complanari*, vale a dire α è singolare.

Le omografie proprie sono **invertibili,** *quelle degeneri* **no.**

Dim. Si ha [cfr. n. 1], $\alpha = \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ i, & j, & k \end{pmatrix}$ con $i \wedge j \times k \neq 0$. Se anche $u \wedge v \times w \neq 0$, cioè u, v, w sono *linearmente indipendenti*, allora α ammette l'inversa [cfr. Intr. I, n. 4; II, n. 3] $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} i, & j, & k \\ u, & v, & w \end{pmatrix}$. Se, invece, $u \wedge v \times w = 0$ allora α non ammette l'inversa.

3. Direzione unite (o doppie).

Chiameremo ***direzione unita*** (o ***doppia***) *rispetto alla* ***omografia*** α, ovvero ***direzione unita di*** α, ogni direzione tale che, essendo u un vettore non nullo parallelo ad essa si ha che αu è vettore *parallelo* ad u (o nullo, il che è compreso).

È chiaro che: *se il vettore non nullo u è parallelo ad una* **direzione unita di** α, *cioè $\alpha u = mu$ con m numero reale, per qualunque vettore v parallelo ad u si ha che αv è multiplo di v secondo m, cioè $\alpha v = mv$;* poichè $v = hu$ con h numero reale e in conseguenza $\alpha v = h\alpha u = hmu = m(hu) = mv$.

È pure evidente che: *ogni direzione nulla di una omografia è pure unita per la stessa omografia, ma non viceversa.*

Esamineremo in seguito il modo di comportarsi delle direzioni unite di una omografia; per ora ci limitiamo ai due teoremi seguenti.

1°. *Ogni omografia vettoriale ammette sempre almeno una direzione unita.*

Dim. Se i, j, k sono vettori tali che $i \wedge j \times k = 1$, x è un numero reale relativo e α è omografia, allora l'equazione

$$(a) \qquad (x + \alpha)i \wedge (x + \alpha)j \times (x + \alpha)k = x^3 + hx^2 + kx + l = 0$$

è di 3° grado in x ed ammette, quindi, almeno una radice reale $-m$. Segue da (a) [cfr. n. 2] che l'omografia $\alpha - m$ è degenere. Ma allora esiste [cfr. n. 2] almeno un vettore non nullo u tale che $(\alpha - m)u = 0$, cioè tale che $\alpha u = mu$ e quindi esiste almeno una direzione unita di α.

2°. *Se una direzione è unita per una omografia α essa è unita per tutte le potenze di α. Se il vettore $\boldsymbol{i}$ ha direzione unita per α allora, essendo m numero reale,*

$$\text{da } \alpha\boldsymbol{i} = m\boldsymbol{i} \text{ segue } \alpha^n\boldsymbol{i} = m^n\boldsymbol{i}$$

qualunque sia l'intero n, anche negativo per α invertibile.

Dim. Operando con α, da $\alpha\boldsymbol{i} = m\boldsymbol{i}$ si ha,

$$\alpha^2\boldsymbol{i} = m^1\alpha\boldsymbol{i} = m^2\boldsymbol{i}, \quad \alpha^3\boldsymbol{i} = m^2\alpha\boldsymbol{i} = m^3\boldsymbol{i}, \text{ ecc.},$$

e per α invertibile operando con α^{-1}, ed osservando che deve essere $m \neq 0$,

$$\alpha^{-1}\boldsymbol{i} = m^{-1}\boldsymbol{i}, \quad \alpha^{-2}\boldsymbol{i} = m^{-2}\boldsymbol{i}, \text{ ecc.}$$

4. Invarianti di una omografia (operatori I_1, I_2, I_3).

In ciò che segue $\alpha, \beta, \ldots$ sono *omografie vettoriali* e $m, x, \ldots$ *numeri reali relativi* qualunque.

Chiameremo ***primo, secondo, terzo invariante di*** α e li indicheremo con le notazioni

$$I_1\alpha, \; I_2\alpha, \; I_3\alpha$$

i *numeri reali relativi, funzioni di α soltanto,* tali che qualunque siano i vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ si abbia sempre:

$$[1] \quad \begin{cases} \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\cdot I_1\alpha = \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}\times\alpha\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u}\times\alpha\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\alpha\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\cdot I_2\alpha = \\ \qquad \alpha\boldsymbol{v}\wedge\alpha\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{w}\wedge\alpha\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{u}\wedge\alpha\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\cdot I_3\alpha = \alpha\boldsymbol{u}\wedge\alpha\boldsymbol{v}\times\alpha\boldsymbol{w} \; (^1). \end{cases}$$

È necessario dimostrare subito che dalle definizioni [1] segue che:

$I_1\alpha$, $I_2\alpha$, $I_3\alpha$ *sono* **numeri reali relativi,** *univocamente determinati, funzioni di α soltanto.* Ovvero in altri termini che:

---

(1) Scriviamo, brevemente, ad es., $\boldsymbol{u}\times\alpha\boldsymbol{v}$, $\alpha\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, $\alpha\boldsymbol{u}\wedge\alpha\boldsymbol{v}$ in luogo di $\boldsymbol{u}\times(\alpha\boldsymbol{v})$, $(\alpha\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{v}$, $(\alpha\boldsymbol{u})\wedge(\alpha\boldsymbol{v})$, senza che ciò possa portar luogo ad equivoci.

I_1, I_2, I_3 *sono* operatori *tra* omografie *e* numeri reali relativi.

Dim. I secondi membri delle [1] sono numeri reali funzioni di α e *funzioni alternate* dei vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. In conseguenza [cfr. Intr. II, n. 6, 4°] essi valgono il prodotto del numero $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ per un numero indipendente da $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e funzione di α soltanto; c. d. d.

In certi casi è opportuno, o necessario, esprimere gli *invarianti* di α in funzione di α e di una terna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ di *vettori non complanari*, o di una terna $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *unitaria-ortogonale-positiva*, [E. C. V., nel qual caso si ha, tra altro, $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = 1$]. Le espressioni degli invarianti in funzione di α e di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ si ottengono subito dalle [1] dividendo i due membri per $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ che, per la ipotesi fatta è numero reale non nullo. Le espressioni degli invarianti in funzione di α e di $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ si ottengono subito dalle [1] tenendo conto delle note relazioni [E. C. V.] tra i vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, e si ha:

$$[2] \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}_1\alpha &= \boldsymbol{i} \times \alpha\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \times \alpha\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \times \alpha\boldsymbol{k} \\ \mathrm{I}_2\alpha &= \alpha\boldsymbol{j} \wedge \alpha\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{k} \wedge \alpha\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + \alpha\boldsymbol{i} \wedge \alpha\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} \\ \mathrm{I}_3\alpha &= \alpha\boldsymbol{i} \wedge \alpha\boldsymbol{j} \times \alpha\,\boldsymbol{k}. \end{aligned} \right.$$

Se α è la particolare omografia $m\odot$ (abbreviata, m) allora dalle [2] segue subito

$$[3] \qquad \mathrm{I}_1 m = 3m, \ \mathrm{I}_2 m = 3m^2, \ \mathrm{I}_3 m = m^3$$

che nel caso particolare $m = 0$, *omografia nulla*, dànno subito

$$[3'] \qquad \mathrm{I}_1 0 = \mathrm{I}_2 0 = \mathrm{I}_3 0 = 0.$$

Per gli operatori I applicati alla *somma di omografie* e al *prodotto di una omografia per un numero*, si hanno le formule notevoli, che il lettore può dimostrare per esercizio:

$$[4] \qquad \mathrm{I}_1(\alpha + \beta) = \mathrm{I}_1\alpha + \mathrm{I}_1\beta, \ \mathrm{I}_1(m\alpha) = m\mathrm{I}_1\alpha$$

$$[5] \qquad \mathrm{I}_2(m\alpha) = m^2\mathrm{I}_2\alpha, \ \mathrm{I}_3(m\alpha) = m^3\mathrm{I}_3\alpha$$

e vedremo in seguito le formule, complesse e dipendenti da altro operatore, che dànno l'I_2 e l'I_3 di $\alpha+\beta$..

È di grande importanza tener presente che:

I_1 *è* **operatore lineare** *tra omografie e numeri reali; mentre* I_2 *e* I_3 *sono operatori tra omografie e numeri,* ma **non sono operatori lineari.**

Sono notevoli le formule che si ottengono applicando gli operatori I alla omografia $x+\alpha$ somma del numero reale x (esattamente $x\odot$) con la omografia generica α. Si ha:

$$[6] \qquad \begin{cases} I_1(x+\alpha)=3x+I_1\alpha \\ I_2(x+\alpha)=3x^2+2x\cdot I_1\alpha+I_2\alpha \\ I_3(x+\alpha)=x^3+x^2\cdot I_1\alpha+x\cdot I_2\alpha+I_3\alpha. \end{cases}$$

Dim. La 1ª delle [6] si ottiene dalla 1ª delle [2] o anche dalle [4], [3] osservando che $I_1(x+\alpha)=I_1x+I_1\alpha=3x+I_1\alpha$.

Per la 2ª e 3ª delle [6] si ha dalle [2]:

$$\begin{aligned} I_2(x+\alpha) &= (x\boldsymbol{j}+\alpha\boldsymbol{j})\wedge(x\boldsymbol{k}+\alpha\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{i}+\ldots+\ldots= \\ &= [x^2+x\{\boldsymbol{j}\wedge\alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}\}+\alpha\boldsymbol{j}\wedge\alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}]+\ldots+\ldots= \\ &= [x^2+x\{\boldsymbol{j}\times\alpha\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\times\alpha\boldsymbol{k}\}+\alpha\boldsymbol{j}\wedge\alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}]+\ldots+\ldots= \\ &= [x^2+x\{I_1\alpha-\boldsymbol{i}\times\alpha\boldsymbol{i}\}+\alpha\boldsymbol{j}\wedge\alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}]+\ldots+\ldots= \\ &= 3x^2+x\{3I_1\alpha-I_1\alpha\}+I_2\alpha= \text{ ecc.}; \end{aligned}$$

e analogamente per $I_3(x+\alpha)$.

Dalle [6] si deducono, in modo ovvio le formule:

$$[7] \qquad \begin{cases} I_2(x+\alpha)=\dfrac{dI_3(x+\alpha)}{dx} \\[2ex] I_1(x+\alpha)=\dfrac{1}{2}\dfrac{dI_2(x+\alpha)}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2I_3(x+\alpha)}{dx^2} \end{cases}$$

dalle quali si può dedurre $I_2\alpha$ e $I_1\alpha$ dall'I_3 per $x=0$; ma ciò è di poco interesse.

Per il *prodotto funzionale* delle omografie si ha la seguente proprietà, assai importante,

$$[8] \qquad I_3(\alpha\beta)=I_3\alpha\cdot I_3\beta$$

la quale esprime che: *l'invariante terzo di un prodotto fun-*

zionale di omografie è il prodotto degli invarianti terzi delle omografie; o, in altri termini: *l'operatore* I_3 *è* **distributivo** *rispetto al* **prodotto funzionale** *delle omografie.* Questa proprietà non ha la sua corrispondente per I_1 e I_2.

Dim. Dalla 3ª delle [1] si ha, prendendo come vettori u, v, w i vettori βi, βj, βk,

$$\beta i \wedge \beta j \times \beta k \cdot I_3 \alpha = \alpha\beta i \wedge \alpha\beta j \times \alpha\beta k$$

che per la 3ª delle [2] dà appunto

$$I_3\beta \cdot I_3\alpha = I_3(\alpha\beta), \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare per le *potenze*, ad esponente *intero* n si ha

[9] $\quad I_3(\alpha^n) = (I_3\alpha)^n$, *purchè per* n *negativo* α *sia invertibile,*

la quale esprime che: *l'invariante terzo della potenza* n*-esima di* α *è la potenza* n*-esima dell'invariante terzo di* α.

Dim. Per $n = 0$, o $n = 1$ la [9] è evidente; per $n \gtreqless 2$ la si ottiene per induzione dalla [8]. Se α è propria, cioè invertibile, allora $\alpha\alpha^{-1} = 1$ e dalle [8], [3] si ha subito $I_3\alpha \cdot I_3\alpha^{-1} = 1$, cioè $I_3\alpha^{-1} = (I_3\alpha)^{-1}$; e poichè, per n positivo, $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$ si ha subito la [9] anche per n negativo.

5. Due teoremi per le omografie degeneri.

Un criterio molto utile per riconoscere se una omografia è *degenere* è dato dall'*annullarsi del suo invariante terzo.* Si ha il teorema.

1°. *L'omografia* α *è* **degenere** *solamente quando* $I_3\alpha = 0$, ovvero il che equivale:

l'omografia α *è* **propria** *solamente quando* $I_3\alpha \neq 0$.

Dim. Dalla 3ª delle [2] del n. 4 risulta che $I_3\alpha = 0$ solamente quando $\alpha i \wedge \alpha j \times \alpha k = 0$, cioè solamente quando i vettori αi, αj, αk sono complanari, vale a dire nel solo caso [cfr. n. 2] che α sia *degenere.*

Si ha anche l'importante teorema seguente.

2°. *Se* $f\alpha$ *è una* **funzione continua** *della omografia* α, *variabile in* **tutto** *il campo delle omografie, e si è dimostrato* *che per α omografia* **propria** *si ha sempre $f\alpha = 0$, allora, anche se α è omografia* **degenere** *si avrà pure $f\alpha = 0$* **(Principio di continuità).**

Dim. Se $I_3\alpha = 0$ e x è numero reale si ha [cfr. n. 4, [6]]

$$I_3(x + \alpha) = x(x^2 + x \cdot I_1\alpha + I_2\alpha);$$

dunque: per $I_3\alpha = 0$ si può fissare un numero reale positivo e non nullo ε tale che per tutti gli x, in valore assoluto minori di ε, si abbia $I_3(x + \alpha) \neq 0$; ma allora $f(x + \alpha) = 0$, per ipotesi, e, a causa della supposta *continuità*, si ha $\lim_{x \to 0} f(x + \alpha) = f(\alpha) = 0$, cioè $f(\alpha) = 0$ anche per $I_3\alpha = 0$.

6. Identità del terzo ordine. Invarianti di un prodotto funzionale, e dell'inversa di una omografia propria.

Se α è una omografia, tra le sue potenze, fino al terzo grado, ed i suoi invarianti, ha sempre luogo la relazione seguente

1] $$\alpha^3 - I_1\alpha \cdot \alpha^2 + I_2\alpha \cdot \alpha - I_3\alpha = 0.$$

Dim. Se nelle [1] del n. 4 poniamo, ordinatamente, al posto di w i vettori, $\alpha^2 w$, $-\alpha w$, w, si ha:

$$u \wedge v \times \alpha^2 w \cdot I_1\alpha = v \wedge \alpha^2 w \times \alpha u + \alpha^2 w \wedge u \times \alpha v + u \wedge v \times \alpha^3 w,$$
$$-u \wedge v \times \alpha w \cdot I_2\alpha = -\alpha v \wedge \alpha^2 w \times u - \alpha^2 w \wedge \alpha u \times v - \alpha u \wedge \alpha v \times \alpha w,$$
$$u \wedge v \times w \cdot I_3\alpha = \alpha u \wedge \alpha v \times \alpha w;$$

sommando, per note proprietà [cfr. E. C. V.] del prodotto misto $a \wedge b \times c$, e ricordando che gli $I_r\alpha$ sono numeri, si ha

$$u \wedge v \times (\alpha^2 \cdot I_1\alpha - \alpha \cdot I_2\alpha + I_3\alpha) w = u \wedge v \times \alpha^3 w;$$

ma u, v, w, sono vettori arbitrari e quindi

$$\alpha^2 \cdot I_1\alpha - \alpha \cdot I_2\alpha + I_3\alpha = \alpha^3; \quad \text{c. d. d.}$$ (1)

Se l'intero n è non minore di 3, allora si ha

[2] $$\alpha^n = a_n \cdot \alpha^2 + b_n \cdot \alpha + c_n$$

(1) Questa dimostrazione semplicissima è dovuta a RABINOVITCH (1913.)

ove i numeri reali a_n, b_n, c_n, funzioni di n, ed esprimibili mediante gli invarianti di α, restano determinati dalle formule ricorrenti

$$[3] \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot \mathrm{I}_1\alpha + b_n \\ b_{n+1} &= c_n - a_n \cdot \mathrm{I}_2\alpha \\ c_{n+1} &= a_n \cdot \mathrm{I}_3\alpha \end{aligned} \right. \quad \text{essendo} \quad \left\{ \begin{aligned} a_3 &= \mathrm{I}_1\alpha \\ b_3 &= -\mathrm{I}_2\alpha \\ c_3 &= \mathrm{I}_3\alpha . \end{aligned} \right.$$

Dim. Dalla [1] si ricava subito

$$(a) \qquad \alpha^3 = \mathrm{I}_1\alpha \cdot \alpha^2 - \mathrm{I}_2\alpha \cdot \alpha + \mathrm{I}_3\alpha ;$$

applicando α ai due membri, e all'α^3 del 2° membro sostituendo il valore (a), si ha α^4 sotto la forma [2]. Per induzione è vera la [2].

Applicando ora ai due membri della [2] l'α si ha, dalla (a),

$$\alpha^{n+1} = a_n \cdot \alpha^3 + b_n \cdot \alpha^2 + c_n \cdot \alpha = a_n(\mathrm{I}_1\alpha \cdot \alpha^2 - \mathrm{I}_2\alpha \cdot \alpha + \mathrm{I}_3\alpha) + b_n \cdot \alpha^2 + c_n \cdot \alpha =$$
$$= (a_n \cdot \mathrm{I}_1\alpha + b_n)\alpha^2 + (c_n - a_n \cdot \mathrm{I}_2\alpha)\alpha + a_n \cdot \mathrm{I}_3\alpha$$

che confrontata con la [2] ed (a) dimostra le [3].

Facciamo una prima applicazione della identità del 3° ordine per dimostrare i due importanti teoremi seguenti.

L'I_r, $r = 1, 2, 3$, *di un prodotto funzionale di due fattori è* **indipendente** *dall'ordine dei fattori.* Cioè; se α, β sono omografie:

$$[4] \qquad \mathrm{I}_r(\beta\alpha) = \mathrm{I}_r(\alpha\beta), \quad r = 1, 2, 3.$$

Dim. Dall'identità [1] applicata a $\beta\alpha$ o ad $\alpha\beta$ si ha: [1]

$$\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - \mathrm{I}_1(\beta\alpha) \cdot \beta\alpha\beta\alpha + \mathrm{I}_2(\beta\alpha) \cdot \beta\alpha - \mathrm{I}_3(\beta\alpha) = 0$$
$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta - \mathrm{I}_1(\alpha\beta) \cdot \alpha\beta\alpha\beta + \mathrm{I}_2(\alpha\beta) \cdot \alpha\beta - \mathrm{I}_3(\alpha\beta) = 0;$$

applicando α a *sinistra* per la *prima*, a *destra* per la seconda

---

(1) T. Boggio, *Sul gradiente di una omografia vettoriale* (Lincei, 1910).

si ha,

$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - \mathrm{I}_1(\beta\alpha)\cdot\alpha\beta\alpha\beta\alpha + \mathrm{I}_2(\beta\alpha)\cdot\alpha\beta\alpha - \mathrm{I}_3(\beta\alpha)\cdot\alpha = 0$$
$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - \mathrm{I}_1(\alpha\beta)\cdot\alpha\beta\alpha\beta\alpha + \mathrm{I}_2(\alpha\beta)\cdot\alpha\beta\alpha - \mathrm{I}_3(\alpha\beta)\cdot\alpha = 0\,;$$

confrontando queste due si hanno subito le [4] (1).

Se l'omografia α è propria, allora per gli invarianti della sua inversa, α^{-1}, si ha:

$$[5] \qquad \mathrm{I}_1\alpha^{-1} = \frac{\mathrm{I}_2\alpha}{\mathrm{I}_3\alpha}, \quad \mathrm{I}_2\alpha^{-1} = \frac{\mathrm{I}_1\alpha}{\mathrm{I}_3\alpha}, \quad \mathrm{I}_3\alpha^{-1} = \frac{1}{\mathrm{I}_3\alpha}.$$

Dim. Applicando α^{-3} alla identità [1] e dividendo per $\mathrm{I}_3\alpha$ [che non è nullo, cfr. n. 5] si ha:

$$\alpha^{-3} - \frac{\mathrm{I}_2\alpha}{\mathrm{I}_3\alpha}\alpha^{-2} + \frac{\mathrm{I}_1\alpha}{\mathrm{I}_3\alpha}\alpha^{-1} - \frac{1}{\mathrm{I}_3\alpha} = 0$$

che confrontata con la identità [1] scritta per α^{-1} dimostra subito le [5].

7. Coniugata di una omografia (operatore K). Teorema di commutazione. Proprietà fondamentali degli operatori K, I. Omografia generale applicata ad un prodotto vettoriale.

Se α è una omografia, allora esiste una, ed una sola, omografia β, funzione soltanto di α, tale che

$$(a) \qquad x \times \alpha y = y \times \beta x$$

qualunque siano i vettori x, y.

---

(1) Si noti che, a causa della proprietà *associativa* del prodotto, si ha ad es., per $r = 1, 2, 3$,

$$\mathrm{I}_r(\gamma\beta\alpha) = \mathrm{I}_r(\beta\alpha\gamma) = \mathrm{I}_r(\alpha\gamma\beta), \quad \mathrm{I}_r(\delta\gamma\beta\alpha) = \mathrm{I}_r(\beta\alpha\delta\gamma) = \mathrm{I}_r(\alpha\delta\gamma\beta), \text{ ecc.};$$

ma, in generale, ad es.,

$$\mathrm{I}_r(\gamma\beta\alpha) \neq \mathrm{I}_r(\gamma\alpha\beta), \quad \mathrm{I}_r(\delta\gamma\beta\alpha) \neq \mathrm{I}_r(\delta\beta\gamma\alpha), \text{ ecc.}$$

poichè il prodotto funzionale *non è*, in generale, *commutativo.*

Dim. Essendo α operatore lineare, ne segue che il *numero* $x \times \alpha y$ è una *funzione lineare* di y e quindi esiste [cfr. Intr. II, n. 7, 1°, [2]] un solo vettore u, funzione di α e di x, tale che

$$x \times \alpha y = u \times y$$

qualunque sia y. Ma u è *funzione lineare* di x e quindi [cfr. ibidem] esiste un solo operatore β, funzione di α soltanto, tale che $u = \beta x$ qualunque sia x. Osservando che β è lineare e trasforma vettori in vettori resta dimostrato il teorema.

Chiameremo ***coniugata di*** α e la indicheremo con la notazione

$$\mathrm{K}\alpha$$

l'unica omografia β che soddisfa alla (a) per x, y vettori arbitrari.

Con tale notazione la (a) assume la forma

[1] $\quad x \times \alpha y = y \times \mathrm{K}\alpha x$, per x, y vettori arbitrari

e questa formula [1] dà l'importantissimo teorema detto ***teorema di commutazione*** e dovuto ad JACOBI.

È importante tener ben presente che:

K *è* **operatore** *tra* **omografie** *ed* **omografie,**

e quindi K ammette le *potenze* di qualsiasi ordine.

Nelle proprietà seguenti, che sono fondamentali per l'operatore K, α, β, γ,... indicano delle omografie e m un numero reale (abbreviazione della omografia $m\odot$).

È interessante esaminare subito come si comporta l'operatore K rispetto alle omografie proprie o degeneri. Si ha il teorema:

[2] *Le omografie* α, Kα *sono, o entrambe proprie, o entrambe degeneri. Se* α, *o* Kα *il che equivale, è degenere e i vettori, non nulli,* u, v *hanno direzioni nulle rispetto ad* α *e* Kα, *allora*:

α *trasforma qualsiasi vettore in un vettore normale* a v
Kα » » » » ad u.

Dim. Se α è degenere, allora, per x vettore arbitrario, αx è vettore parallelo ad un piano, e quindi sempre normale ad un certo vettore v, cioè si ha $v \times \alpha x = 0$ e per il teorema di commutazione $x \times K\alpha v = 0$; ma x è arbitrario e quindi $K\alpha v = 0$, cioè $K\alpha$ è degenere. Lo stesso per $K\alpha$.

Se si ha $\alpha u = 0$, $K\alpha v = 0$, allora per x vettore arbitrario

$$x \times K\alpha v = 0, \quad x \times \alpha u = 0,$$

e per il teorema di commutazione

$$v \times \alpha x = 0, \quad u \times K\alpha x = 0$$

che dimostra l'ultima parte del teorema.

Per l'operatore K, non combinato con altri operatori si hanno le proprietà [3]-[7] seguenti.

[3] $$K(\alpha + \beta) = K\alpha + K\beta, \quad K(m\alpha) = mK\alpha$$

L'operatore K è **lineare**, *cioè è distributivo rispetto alla somma e commutativo col prodotto per un numero.*

Dim. Qualunque siano i vettori x, y si ha dalla [1]:

$$x \times K(\alpha + \beta)y = y \times (\alpha + \beta)x = y \times \alpha x + y \times \beta x =$$
$$= x \times K\alpha y + x \times K\beta y = x \times (K\alpha + K(\beta)\, y;$$
$$x \times K(m\alpha)y = y \times m\alpha x = m(x \times K\alpha y) = x \times mK\alpha y.$$

Ma x, y sono arbitrari e quindi, ad es., da

$$x \times K(\alpha + \beta)y = x \times (K\alpha + K\beta)y$$

si ricava (x arbitrario) $K(\alpha + \beta)y = (K\alpha + K\beta)y$, poi ($y$ arbitrario), $K(\alpha + \beta) = K\alpha + K\beta$; c. d. d.

[4] $Km = m$ [con notazione esatta $K(m\odot) = m\odot$].

Dim. $x \times Kmy = y \times mx = m(x \times y) = x \times my$; c. d. d.

La coniugata di un numero m (*esattamente* $m\odot$) *è il numero stesso.*

[5] $$KK\alpha = \alpha, \quad K^2 = \text{« identità »}, \quad K = K^{-1}.$$

La coniugata della coniugata di una omografia è la omografia stessa. In altri termini: *l'operatore* K *è invertibile e il suo quadrato è l'* **identità**, *cioè* K *coincide col suo inverso* K^{-1}.

Dim. $x \times KK\alpha y = y \times K\alpha x = x \times \alpha y$, che per l'arbitrarietà di x e y dimostra la [4[.

[6] $$K(\alpha\beta) = K\beta \cdot K\alpha, \quad K(\alpha\beta\gamma) = K\gamma \cdot K\beta \cdot K\alpha, \ldots$$

L'operatore K *è* **distributivo** *rispetto al* **prodotto funzionale,** *ma inverte l'ordine dei fattori.*

Dim. $$x \times K(\alpha\beta)y = y \times \alpha\beta x = y \times \alpha(\beta x) = \beta x \times K\alpha y = \\ = x \times K\beta \cdot K\alpha y;\ \text{ecc.}$$

che per l'arbitrarietà dei vettori x, y dimostra le [5].

[7] $$\begin{cases} K\alpha^n = (K\alpha)^n \\ K\alpha^{-n} = (K\alpha)^{-n} \end{cases} \textit{per } n \textit{ intero positivo e } \begin{matrix} \alpha \textit{ omogr. qualunque} \\ \alpha \quad \text{»} \quad \textit{propria.} \end{matrix}$$

La coniugata della potenza n-esima di α *è la potenza n-esima della coniugata di* α, *e per n negativo deve essere* α *omografia propria.*

Dim. La 1ª delle [7] è evidente per $n = 0$ e $n = 1$; per $n \gtreqless 2$ si ottiene per induzione dalla [6]. Se poi α è propria, allora $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$ e quindi

$$K\alpha^{-n} = K(\alpha^{-1})^n = (K\alpha^{-1})^n = \{(K\alpha)^{-1}\}^n = (K\alpha)^{-n}, \text{ c. d. d.}$$

Combinando (prodotto funzionale) gli operarori I, K si ha il teorema:

[8] $$I_r K\alpha = I_r\alpha, \quad KI_r\alpha = I_r\alpha, \qquad r = 1, 2, 3.$$

L'invariante r-esimo, $r = 1, 2, 3$, *della coniugata di* α *è identico all'invariante r-esimo di* α.

Dim. Dalla identità del 3° ordine [[cfr. n. 6, [1]] applicata a $K\alpha$ si ha:

$$(K\alpha)^3 - I_1K\alpha \cdot (K\alpha)^2 + I_2K\alpha \cdot K\alpha - I_3K\alpha = 0;$$

operando con K nei due membri [cfr. n. 7], [3], [7]] si ha

$$\alpha^3 - I_1 K\alpha \cdot \alpha^2 + I_2 K\alpha \cdot \alpha - I_3 K\alpha = 0$$

che confrontata con l'identità del 3° ordine scritta per α, dimostra le prime forme [8]. Le seconde sono conseguenze immediate della [4] poichè $I_r\alpha$ sono numeri (1).

Infine diamo la formula [9] che esprime sotto forma semplice, e spesso utile nelle applicazioni, ciò che si ottiene applicando la omografia generica α al vettore $x \wedge y$ prodotto vettoriale di x per y.

[9] $$\alpha(x \wedge y) = I_1\alpha \cdot x \wedge y - x \wedge K\alpha y + y \wedge K\alpha x.$$

Dim. Se nella 1ª delle [1] del n. 4, § 1, cambiamo u, v, w, α in x, y, u, $K\alpha$ si ha [E. C. V.]

$$\begin{aligned} x \wedge y \times u \cdot I_1 K\alpha &= y \wedge u \times K\alpha x + u \wedge x \times K\alpha y + x \wedge y \times K\alpha u = \\ &= - u \times y \wedge K\alpha x + u \times x \wedge K\alpha y + u \times \alpha(x \wedge y), \end{aligned}$$

dalla quale si trae, ricordando che $I_1 K\alpha = I_1\alpha$,

$$u \times \{ \alpha(x \wedge y) - I_1\alpha \cdot x \wedge y + x \wedge K\alpha y - y \wedge K\alpha x \} = 0$$

che per l'arbitrarietà di u dimostra la [9[.

8. Dilatazione di una omografia (operatore D).

Se α è una omografia, chiameremo ***dilatazione*** di α e la indicheremo con la notazione

$$D\alpha,$$

la omografia definita ponendo

[1] $$D\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + K\alpha),$$

cioè $D\alpha$ *è la semisomma di* α *con la sua coniugata.*

È importante tener presente che:

D ***è*** **operatore** ***tra*** **omografie** ***e*** **omografie.**

(1) Dim. di T. Boggio, Lincei, l. c.

Si hanno le seguenti proprietà fondamentali dell'operatore D, essendo α, β *omografie* e m *numero reale relativo.*

[2] $\mathrm{D}m = m$, o, con notazione completa, $\mathrm{D}(m\odot) = m\odot$.

La dilatazione di un numero è il numero stesso.

Dim. Essendo $\mathrm{K}m = m$ [cfr. n. 7, [4]] la [1] dà subito la [2].

[3] $$\mathrm{D}(\alpha + \beta) = \mathrm{D}\alpha + \mathrm{D}\beta, \quad \mathrm{D}(m\alpha) = m\mathrm{D}\alpha.$$

L'operatore D *è* **distributivo rispetto alla somma,** *ed è* **commutativo col prodotto per un numero.** In altri termini: D *è operatore lineare.*

Dim. Dalla [1] e dalle proprietà di K esposte nel n. 7 si ha:

$$\mathrm{D}(\alpha+\beta) = \{\alpha+\beta+\mathrm{K}(\alpha+\beta)\}/2 = (\alpha+\mathrm{K}\alpha)/2 + (\beta+\mathrm{K}\beta)/2 = \mathrm{D}\alpha+\mathrm{D}\beta;$$
$$\mathrm{D}m\alpha = (m\alpha + \mathrm{K}m\alpha)/2 = m(\alpha + \mathrm{K}\alpha)/2 = m\mathrm{D}\alpha.$$

[4] $$\mathrm{DK}\alpha = \mathrm{D}\alpha, \quad \mathrm{KD}\alpha = \mathrm{D}\alpha; \quad \mathrm{DK} = \mathrm{KD} = \mathrm{D}.$$

La dilatazione della coniugata di α *e la coniugata della dilatazione di* α *coincidono con la dilatazione di* α. In altri termini: *i prodotti funzionali degli operatori* K, D, *valgono* D.

Dim. Dalla [1] e dalle formole del n. 7 si ha:

$$\mathrm{DK}\alpha = (\mathrm{K}\alpha + \mathrm{KK}\alpha]/2 = (\alpha + \mathrm{K}\alpha)/2 = \mathrm{D}\alpha,$$
$$\mathrm{KD}\alpha = (\mathrm{K}\alpha + \mathrm{KK}\alpha)/2 = (\alpha + \mathrm{K}\alpha)/2 = \mathrm{D}\alpha; \text{ c. d. d.}$$

[5] $\mathrm{DD}\alpha = \alpha$, $\mathrm{D}^n = \mathrm{D}$ *per* n *intero positivo non nullo.*

La ditatazione della dilatazione di α *coincide colla dilatazione di* α. In altri termini: *qualunque potenza di* D, *con esponente intero positivo e non nullo, coincide con* D.

Dim. Dalla [4] e dalla [1] si ha:

$$\mathrm{DD}\alpha = (\mathrm{D}\alpha + \mathrm{KD}\alpha)/2 = (\mathrm{D}\alpha + \mathrm{D}\alpha)/2 = \mathrm{D}\alpha, \text{ c. d. d.}$$

[6] $$\mathrm{I}_1\mathrm{D}\alpha = \mathrm{I}_1\alpha, \quad \mathrm{DI}_1\alpha = \mathrm{I}_1\alpha; \quad \mathrm{I}_1\mathrm{D} = \mathrm{DI}_1 = \mathrm{I}_1.$$

L'invariante primo della dilatazione di α *e la dilatazione dell'invariante primo di* α, *coincidono con l'invariante* *primo di* α. In altri termini: *i prodotti funzionali degli operatori* I_1, D, *valgono* I_1.

Dim. Dalla [1] si ha, operando con I_1 [cfr. n. 4, [4]; n. 7, [8]]

$$I_1 D\alpha = (I_1\alpha + I_1 K\alpha)/2 = 2I_1\alpha/2 = I_1\alpha;$$

dalla [2] si ha $DI_1\alpha = I_1\alpha$ poichè $I_1\alpha$ è un numero.

9. Vettore di una omografia (operatore V).

Se α *è omografia vettoriale, allora esiste uno, ed un solo, vettore* u *funzione di* α *soltanto tale che*

(a') $\quad u \wedge x = (\alpha - K\alpha)x$, *qualunque sia il vettore* x,

ovvero, il che equivale, tale che

(a) $\quad u \times x \wedge y = y \times \alpha x - x \times \alpha y$,

qualunque siano i vettori x, y.

Dim. Moltiplicando scalarmente ($\times$) la (a') per y si ha:

$$u \times x \wedge y = \alpha x \times y - (K\alpha x) \times y = y \times \alpha x - x \times \alpha y$$

il che prova che le (a'), (a) sono equivalenti (essendo x, y arbitrari). Poi: il 2° membro della (a) è *numero reale funzione alternata* dei vettori x, y; in conseguenza [cfr. Intr. II, n. 6, 3°] esso è della forma $u \times x \wedge y$ ove u è funzione di α ed indipendente da x, y; c. d. d.

Essendo α una qualsiasi omografia, chiameremo ***vettore di*** α, e lo indicheremo con la notazione

$$V\alpha,$$

la metà dell'unico vettore u che sodisfa alla (a) per x, y vettori arbitrari.

Con tale notazione la (a) assume la forma

$$[1] \qquad 2V\alpha \times x \wedge y = y \times \alpha x - x \times \alpha y$$

che definisce il vettore di α.

Dal teorema e dalla definizione risulta che:

V *è* operatore *tra* omografie *e* vettori

e ciò deve essere tenuto ben presente.

Si hanno le seguenti proprietà fondamentali dell'operatore V, essendo α, β omografie e m numero reale.

[2] $\mathrm{V}m = 0$, o, con notazione completa, $\mathrm{V}(m\odot) = 0$.

Il vettore di un numero è sempre il vettore nullo.

Dim. Dalla [1] si ha $2\mathrm{V}m \times x \wedge y = y \times mx - x \times my = 0$ e quindi, per l'arbitrarietà di x e y si ha $\mathrm{V}m = 0$.

[3] $$\mathrm{V}(\alpha + \beta) = \mathrm{V}\alpha + \mathrm{V}\beta, \quad \mathrm{V}(m\alpha) = m\mathrm{V}\alpha.$$

L'operatore V *è* **distributivo rispetto alla somma** *ed è* **commutativo col prodotto per un numero.** In altri termini: V *è operatore lineare.*

Dim. Dalla [1] si ha:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{V}(\alpha + \beta) \times x \wedge y &= y \times (\alpha + \beta)x - x \times (\alpha + \beta)y = \\ &= (y \times \alpha x - x \times \alpha y) + (y \times \beta x - x \times \beta y) = \\ &= (2\mathrm{V}\alpha + 2\mathrm{V}\beta) \times x \wedge y \end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di x, y dimostra la [3].

[4] $$\mathrm{VK}\alpha = - \mathrm{V}\alpha.$$

Il vettore della coniugata di α vale il vettore di α cambiato di verso.

Dim. Dalla [1] e dal teorema di commutazione si ha

$$2\mathrm{VK}\alpha \times x \wedge y = y \times \mathrm{K}\alpha x - x \times \mathrm{K}\alpha y = x \times \alpha y - y \times \alpha x = -2\mathrm{V}\alpha \times x \wedge y$$

che per l'arbitrarietà di x, y dimostra la [4].

[5] $$\mathrm{VD}\alpha = 0.$$

Il vettore della dilatazione di α è il vettore nullo.

Dim. È noto [cfr. n. 8, [1]] che $2\mathrm{D}\alpha = \alpha + \mathrm{K}\alpha$; operando con V nei due membri e tenendo conto della [4] si ha

$$2\mathrm{VD}\alpha = \mathrm{V}\alpha + \mathrm{VK}\alpha = \mathrm{V}\alpha - \mathrm{V}\alpha = 0;\ \text{c. d. d.}$$

Come avremo occasione spesso di vedere, basta la [1] per *calcolare* il $\mathrm{V}\alpha$. Pure in alcuni casi può essere utile esprimere il $\mathrm{V}\alpha$ per mezzo di α e di una terna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ di *vettori non complanari*, o, più semplicemente, di una terna $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *unitaria-ortogonale-positiva*. Si hanno le formule:

$$[6]\ 2\mathrm{V}\alpha = \frac{1}{\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}\{(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})\wedge\alpha\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u})\wedge\alpha\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\alpha\boldsymbol{w}\} =$$
$$= \frac{1}{\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}\{(\boldsymbol{w}\times\alpha\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\times\alpha\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} + \ldots + \ldots\},$$

$$[7]\ 2\mathrm{V}\alpha = \boldsymbol{i}\wedge\alpha\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\wedge\alpha\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\wedge\alpha\boldsymbol{k} =$$
$$= (\boldsymbol{k}\times\alpha\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}\times\alpha\boldsymbol{k})\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots .$$

Dim. Dalle note identità [E. C. V.]

$$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} + \ldots + \ldots,\quad (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

e tenendo conto della [1] si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\cdot 2\mathrm{V}\alpha &= 2\mathrm{V}\alpha\times\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} \ldots + \ldots = \\ &= (\boldsymbol{w}\times\alpha\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\times\alpha\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u} + \ldots + \ldots = \\ &= (\boldsymbol{v}\times\alpha\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\times\alpha\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + \ldots + \ldots = \\ &= (\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})\wedge\alpha\boldsymbol{u} + \ldots + \ldots;\end{aligned}$$

diviendo per $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ si hanno le [6] e da queste le [7].

10. Espressione di una omografia generica α mediante la sua dilatazione e il suo vettore, $\mathrm{D}\alpha$ e $\mathrm{V}\alpha$.

Premettiamo una nozione che svilupperemo poi completamente nel § seguente studiando le *omografie assiali*.

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore, il simbolo composto,

$$\boldsymbol{u}\wedge,$$

formato col vettore $\boldsymbol{u}$ e il segno d'*operazione* $\wedge$, è un *ope-*

ratore [cfr. Intr. I, n. 5] e precisamente un *operatore lineare tra i vettori*, cioè una *omografia vettoriale.*

Infatti: qualunque siano i vettori x, y, si ha che il simbolo $u\wedge$ premesso ad x dà il vettore $u\wedge x$ ed inoltre

$$u\wedge(x+y)=u\wedge x+u\wedge y,\quad u\wedge(mx)=m(u\wedge x).$$

Ciò posto si ha il teorema:

Se α è omografia vettoriale qualunque, si ha identicamente:

$$[1]\qquad \alpha=\mathrm{D}\alpha+(\mathrm{V}\alpha)\wedge,\quad \mathrm{K}\alpha=\mathrm{D}\alpha-(\mathrm{V}\alpha)\wedge,$$

ovvero, il che equivale,

$$[2]\qquad \alpha+\mathrm{K}\alpha=2\mathrm{D}\alpha,\quad \alpha-\mathrm{K}\alpha=2(\mathrm{V}\alpha)\wedge,$$

e la 1^a delle [2] *è già stata assunta* [*cfr. n. 8.* [*1*]] *per definire* $\mathrm{D}\alpha$.

Dim. Qualunque siano i vettori x, y si ha, per proprietà ben note [cfr. n. 9, [1]; n. 7, [1]]

$$2\mathrm{V}\alpha\times x\wedge y=y\times\alpha x-x\times\alpha y=y\times\alpha x-y\times\mathrm{K}\alpha x=$$
$$=y\times(\alpha-\mathrm{K}\alpha)x$$

da cui risulta subito [E. C. V.]

$$2\cdot y\times(\mathrm{V}\alpha)\wedge x=y\times(\alpha-\mathrm{K}\alpha)x;$$

che per l'arbitrarietà di x e y dà

$$2(\mathrm{V}\alpha)\wedge x=(\alpha-\mathrm{K}\alpha)x,\quad \text{poi}\quad 2(\mathrm{V}\alpha)\wedge=\alpha-\mathrm{K}\alpha$$

che è la 2^a delle [2] e restano quindi dimostrate le [2]. Da queste per somma e differenza si ottengono le [1].

La prima delle [1] dà la α generica decomposta nella somma di due omografie; una la $\mathrm{D}\alpha$ che, come vedremo, appartiene al gruppo delle *dilatazioni*; l'altra la $(\mathrm{V}\alpha)\wedge$ che, come vedremo, appartiene al gruppo delle *assiali*. Vedremo pure che la riduzione di una omografia generica alla somma di una *dilatazione* con una *assiale* può farsi in un sol modo [cfr. § 2, n. 5]; ma per ora questo fatto, per quanto importante, non ci interessa, bastandoci le identità, ora dimostrate, [1], [2].

Nel § seguente esamineremo le omografie *particolari* o *semplici*. *Due* gruppi di queste saranno date, evidentemente dall'annullarsi di uno dei due termini del 2° membro delle [1]; le *assiali* quelle per le quali $D\alpha = 0$; le *dilatazioni* quelle per le quali $V\alpha = 0$; e le *dilatazioni* daranno un sotto gruppo particolare (impropriamente, *numeri*) delle *omotetie*. Infine un terzo gruppo sarà dato dalle *diadi*; ma queste non possono essere classificate mediante D e V delle [1].

Giova notare che la 1ª delle [1] corrisponde alla formola fondamentale data da HAMILTON per i *quaternioni* α

$$\alpha = S\alpha + I^{-1}(V\alpha),$$

formula *completa* e non quella incompleta ed inesatta usata dai quaternionisti seguaci di HAMILTON [E. C. V; pag. 232].

ESERCIZI [1].

1. $I_1 D\alpha = I_1\alpha, \quad I_2 D\alpha = I_2\alpha - (V\alpha)^2, \quad I_3 D\alpha = (\alpha V\alpha) \times V\alpha$

2. $C\alpha = I_1\alpha - \alpha$ Definizione di $C\alpha$ « ciclica di α »

3. $\left\{\begin{array}{l} C(\alpha + \beta) = C\alpha + C\beta, \quad C(m\alpha) = mC\alpha \\ \text{C è operatore lineare tra omografie e omografie; ammette potenze} \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} C\alpha = C\beta \text{ solamente quando } \alpha = \beta;\ \text{C è op. invertibile} \\ C\alpha = 0 \text{ solamente quando } \alpha = 0 \end{array}\right.$

5. $C^2\alpha = I_1\alpha + \alpha, \quad C^{-1}\alpha = (I_1\alpha - 2\alpha)/2$

---

[1] Questi esercizi e tutti quelli seguenti i vari paragrafi, constano di teoremi (formule o enunciati) che il lettore potrà dimostrare per esercizio, e sempre sotto forma assoluta.

Senza bisogno di ripeterlo ogni volta resta stabilito che: $\alpha, \beta, \ldots$ sono *omografie* generiche; $m, n, p, \ldots y, \ldots$ *numeri reali*; $a, \ldots u, \ldots x, \ldots$ *vettori*; i, j, k terna unitaria-ortogonale-positiva di vettori.

6. $\begin{cases} I_1 C\alpha = 2 I_1 \alpha, \quad I_2 C\alpha = (I_1\alpha)^2 + I_2\alpha, \quad I_3 C\alpha = I_1\alpha \cdot I_2\alpha - I_3\alpha \\ KC\alpha = CK\alpha, \quad DC\alpha = CD\alpha, \quad VC\alpha = -V\alpha \end{cases}$

7. $(C\alpha)^{-1} = (I_2\alpha + \alpha^2) / (I_1\alpha \cdot I_2\alpha - I_3\alpha)$, per $I_3 C\alpha \neq 0$

8. $\begin{cases} \alpha(x \wedge y) = x \wedge CK\alpha y + y \wedge K\alpha x = -x \wedge K\alpha y - y \wedge CK\alpha x \\ C\alpha(x \wedge y) = x \wedge K\alpha y - y \wedge K\alpha x \end{cases}$

9. $K\alpha(x \wedge \alpha y - y \wedge \alpha x) = I_2\alpha \cdot x \wedge y - (\alpha x) \wedge \alpha y$

10. Se α, β sono proprie e $\beta\alpha = \alpha\beta$, allora:
$\alpha^3 - I_1(\alpha\beta^{-1}) \cdot \alpha^2\beta + I_2(\alpha\beta^{-1}) \cdot \alpha\beta^2 - I_3(\alpha\beta^{-1}) \cdot \beta^3 = 0$, e anche
$I_3(\alpha^{-1}\beta) \cdot \alpha^3 - I_2(\alpha^{-1}\beta) \cdot \alpha^2\beta + I_1(\alpha^{-1}\beta) \cdot \alpha\beta^2 - \beta^3 = 0$.

§ 2. Omografie particolari (o semplici).

1. Assiali. Proprietà fondamentali. Operatori I, K, D, V applicati alle assiali.

Diremo che la omografia vettoriale α è una ***omografia assiale***, o semplicemente, una ***assiale***, quando ***la sua dilatazione è nulla***, cioè

[1] $$D\alpha = 0. \quad \text{[cfr. n. 2, [1]]}.$$

Questa condizione [1], che *definisce* le assiali, *equivale* a

[1'] $$\alpha = (V\alpha)\wedge, \quad \alpha = -K\alpha$$

come risulta immediatamente dalle [1], [2] del § 1, n. 10.

Osserviamo subito che: *ogni assiale non nulla è omografia degenere di 1ª specie* [cfr. § 1, n. 2].

Dim. Infatti: dalla 1ª delle [1'] si ha $\alpha x = (V\alpha) \wedge x$; per $\alpha \neq 0$ deve dunque essere $V\alpha \neq 0$ e quindi αx è vettore o nullo o normale a $V\alpha$, cioè sempre parallelo al piano normale a $V\alpha$, ed, evidentemente, non può avere una direzione fissa.

Come proprietà caratteristica *geometrica* delle assiali si ha la seguente:

L'omografia α è* assiale *solamente quando; trasforma un qualsiasi vettore in un vettore, o nullo, o normale al vettore stesso, cioè,

[2] $$x \times \alpha x = 0 \quad \textit{per } x \textit{ vettore arbitrario;}$$

notando che la condizione [2] **equivale** *alla condizione*

[2′] $x \times \alpha y + y \times \alpha x = 0$, *per* x, y *vettori arbitrari.*

Dim. Cominciamo col dimostrare che le [2], [2′] sono equivalenti.

Se vale la [1], per x arbitrario, vale pure per $x + y$ e si ha

$$(x + y) \times (\alpha x + \alpha y) = 0, \quad x \times \alpha x + x \times \alpha y + y \times \alpha x + y \times \alpha y = 0$$

che, per essere $x \times \alpha x = y \times \alpha y = 0$, dà appunto la [2′]. Se nella [2′] si pone x al posto di y si ottiene la [2]. Dunque le [2], [2′] sono l'una conseguenza dell'altra cioè sono equivalenti.

Dalla [2′] e dal teorema di commutazione si ha

$$x \times \alpha y + x \times \mathrm{K}\alpha y = x \times (\alpha + \mathrm{K}\alpha) y = 0$$

che valendo per x, y arbitrari dà $\alpha = -\mathrm{K}\alpha$. Dunque, per [1′], se vale la [2] o [2′] α è assiale. Viceversa se α è assiale dalla 1ª delle [1′] si ha

$$x \times \alpha x = x \times (\mathrm{V}\alpha) \wedge x = 0,$$

cioè se α è assiale vale la [2] e la [2′].

Si ha ancora il teorema, che dà un'altra caratteristica *geometrica* delle assiali:

Se α *è una* **assiale,** *allora: esiste un vettore* u, *ed uno solo, tale che*

[3] $$\alpha = u \wedge,$$

ed inoltre facendo variare u *in* **tutto** *il campo dei vettori, l'omografia* $u \wedge$ *percorre il campo totale delle assiali.*

Dim. Se α è assiale, allora da [1′] risulta che esiste u tale che vale la [3]. Viceversa se vale la [3] si ha

$$x \times \alpha x = x \times u \wedge x = 0$$

e quindi, per la [2], α è assiale. Ciò prova che la forma [3] è propria *soltanto* delle assiali.

Se α è assiale ed esistono u, u' tali che $\alpha = u \wedge$, $\alpha = u' \wedge$, allora per x vettore arbitrario deve essere $u \wedge x = u' \wedge x$, che per l'arbitrarietà di x dà $u = u'$. Dunque una assiale α si può porre in un sol modo sotto la forma [3].

Da quanto abbiamo ora dimostrato risulta che la classe delle *assiali* si ottiene da $u\wedge$ facendo variare u nella classe totale dei vettori.

Potendosi l'assiale α porre *in un sol modo* sotto la forma $u\wedge$ (anzi, per la 1ª delle [1'], si ha $u = V\alpha$), risulta che: *il vettore u è una* **funzione** *dell'assiale α.* Possiamo allora chiamare *asse della omografia assiale* α l'unico vettore u tale che $\alpha = u\wedge$.

Con la parola *asse* ora introdotta, la proprietà [3] delle assiali assume la forma:

Una omografia assiale trasforma un qualsiasi vettore in un vettore o nullo o normale al suo asse, ovvero, il che equivale, in un vettore o nullo o parallelo ad un piano normale al suo asse.

Dim. Perchè se u è l'asse di α, da $\alpha = u\wedge$ si ha $\alpha x = u\wedge x$ da cui $u \times \alpha x = 0$, c. d. d.

Giova notare che se $\alpha = u\wedge$ e x è vettore arbitrario (normale o pur no ad u), i vettori αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x$, ... sono tutti normali ad u, e se $u^2 = 1$, cioè u è *unitario*, i vettori $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x$, ... si ottengono da αx con rotazione di 1, 2, ... retti intorno ad u sempre nello stesso senso [cfr. E. C. V., rotore i].

Ecco alcune notevoli conseguenze delle proprietà ora dimostrate.

[4] $$\begin{cases} u\wedge = 0 & \text{solamente quando } u = 0 \\ u\wedge = v\wedge & \quad » \qquad » \quad u = v. \end{cases}$$

Una omografia assiale è **nulla** *solamente quando è nullo il suo asse. Due assiali sono* **identiche** *solamente quando hanno lo stesso asse.*

Dim. Infatti: per x arbitrario si ha $u\wedge x = 0$ solo quando $u = 0$; $u\wedge x = v\wedge x$ solo quando $u = v$.

[5] $$u\wedge + v\wedge = (u + v)\wedge, \quad m(u\wedge) = (mu)\wedge.$$

La somma di due (o più) assiali è l'assiale che ha per asse la somma degli assi. Il prodotto di una assiale per il *numero m è l'assiale che ha per asse il prodotto dell'asse per m.*

Da cui segue l'importante proprietà.

Le **assiali** *formano un* **sistema lineare.**

Dim. $(u\wedge + v\wedge)x = u\wedge x + v\wedge x = (u+v)\wedge x$;
$\{m(u\wedge)\}x = m(u\wedge x) = (mu)\wedge x$; c. d. d.

[6] *L'assiale non nulla ha una sola* **direzione unita,** *che è pure* **direzione nulla,** *quella del suo asse.*

Dim. Per $u \neq 0$ [cfr. [4]] si ha $u\wedge x = 0$ nel solo caso che sia $x = 0$, ovvero x parallelo ad u; c. d. d.

Applicando ad una *assiale,* $u\wedge$, gli operatori I, K, D, V si ottengono le formule seguenti che sono importanti perchè di continuo uso nelle applicazioni.

[7] $$\mathrm{I}_1(u\wedge) = 0, \quad \mathrm{I}_2(u\wedge) = u^2, \quad \mathrm{I}_3(u\wedge) = 0$$

[8] $$\mathrm{K}(u\wedge) = -u\wedge$$

[9] $$\mathrm{D}(u\wedge) = 0$$

[10] $$\mathrm{V}(u\wedge) = u$$

Dim. [7]. Se nelle [1] del n. 4 si pone $u\wedge$ al posto di α si ha:

$$u\wedge v \times w \cdot \mathrm{I}_1(u\wedge) = w\wedge u \times (u\wedge v) + u\wedge v \times (u\wedge w) = 0$$
$$u\wedge v \times w \cdot \mathrm{I}_2(u\wedge) = (u\wedge v)\wedge(u\wedge w) \times u = u\wedge v \times w \cdot u^2$$
$$u\wedge v \times w \cdot \mathrm{I}_3(u\wedge) = 0,$$

che per $u\wedge v \times w \neq 0$ dimostrano le [7].

Dim. [8], [9], [10]. Risultano da [1], [1'] tenendo conto del teorema [3].

2. Dilatazioni. Proprietà fondamentali. Operatori I, K, D, V applicati alle dilatazioni.

Diremo che la omografia vettoriale α è una ***dilatazione,*** quando il suo vettore è nullo, cioè:

[1] $$\mathrm{V}\alpha = 0 \text{ [cfr. n. 1, [1]]}.$$

Questa condizione [1] che *definisce* le *dilatazioni*, equivale a ciascuna delle condizioni seguenti

$$[1'] \qquad \alpha = \mathrm{D}\alpha, \quad \alpha = \mathrm{K}\alpha$$

come risulta immediatamente dalle [1], [2] del § 1, n. 10 ([1]).

Si è già osservato [cfr. § 1, n. 8, [4]] che essendo α una omografia qualunque la $\mathrm{KD}\alpha$ coincide con $\mathrm{D}\alpha$, il che, per la definizione [1], prova che $\mathrm{D}\alpha$ *è una dilatazione*, restando così giustificato il nome **dilatazione** di α dato alla omografia $\mathrm{D}\alpha = (\alpha + \mathrm{K}\alpha)/2$.

Si ha il seguente teorema fondamentale.

L'omografia vettoriale α *è una* **dilatazione** *solamente quando essa ammette almeno* **tre** *direzioni* **unite** *due a due ortogonali*; vale a dire *solamente quando si può porre, almeno in un modo,*

$$[2] \qquad \alpha = \begin{pmatrix} mi, & nj, & pk \\ i, & j, & k \end{pmatrix}$$

con i, j, k *terna unitaria-ortogonale di vettori e* m, n, p *terna di numeri reali relativi.*

Dim. *a*) Supponiamo che α sia una dilatazione, cioè valga la [1].

È noto [cfr. § 1, n. 4] che esiste almeno una *direzione unita rispetto ad* α. Fissato un vettore unitario i parallelo a tale direzione, resta determinato il numero $m = i \times \alpha i$ tale che

$$(\alpha) \qquad \alpha i = mi.$$

Se x è vettore normale ad i, cioè $x \times i = 0$, si ha da (α) che anche $x \times \alpha i = 0$ e per il teorema di commutazione e la (*a*) che $i \times \alpha x = 0$. Ciò prova che: *la dilatazione* α *trasforma i vettori normali ad* i *in vettori o nulli o normali ad* i.

([1]) Come analoga della condizione [2'] del n. 1 si ha

$$x \times \alpha y - y \times \alpha x = 0, \quad \text{per } x,\ y \text{ vettori arbitrari}$$

poichè per il teorema di commutazione si ha identicamente

$$x \times \alpha y - y \times \alpha x = x \times (\alpha - \mathrm{K}\alpha) y.$$

Se i, j', k' è una terna unitaria ortogonale, $\alpha j'$, $\alpha k'$ sono vettori normali ad i ([1]) e si deve avere

$$(\beta') \qquad \alpha j' = r j' + s k', \quad \alpha k' = s' j' + t k';$$

ma, per la (a) e il teorema di commutazione $\alpha j' \times k' = j' \times \alpha k'$ e poichè, per le (β'), $\alpha j' \times k' = s$, $\alpha k' \times j' = s'$, risulta $s = s'$ e le (β') dànno

$$(\beta) \qquad \alpha j' = r j' + s k', \quad \alpha k' = s j' + t k'.$$

Se $s = 0$, allora, dalle (β) si ha $\alpha j' = r j'$, $\alpha k' = t k'$ e ad α si può dare la forma [2], cioè esistono le tre direzioni unite, ecc. (Ed è poi ovvio che per $s = 0$ e $r = t$ ogni direzione normale ad i è unita per α),

Supponiamo ora $s \neq 0$. Per un vettore generico u normale ad i si ha

$$(\gamma) \qquad u = x j' + y k' \quad \text{e quindi} \quad \alpha u = x \alpha j' + y \alpha k'$$

e per le (β)

$$(\delta) \qquad \alpha u = (xr + ys) j' + (xs + yt) k'.$$

Affinchè la direzione di u sia *unita* per α deve essere

$$u \wedge \alpha u = 0,$$

cioè, per le (γ), (δ), e poichè $j' \wedge k' \neq 0$,

$$(\varepsilon) \qquad s x^2 + (t - r) x y - s y^2 = 0.$$

Essendo s e $-s$ (non nulli) i coefficienti di x^2 e y^2, esistono almeno due coppie (x_1, y_1), (x_2, y_2), con elementi non proporzionali, che sodisfano la (ε), vale a dire esistono almeno due direzioni u *unite* per α. Ponendo

$$u_1 = x_1 j' + y_1 k', \quad u_2 = x_2 j' + y_2 k'$$

si ha subito

$$u_1 \times u_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

ma dalla (ε), poichè i coefficienti di x^2, y^2 sono non nulli e di

---

([1]) Questa parte della dimostrazione, più semplice ed elementare di quella da noi data nella 1ª edizione, ci è stata gentilmente comunicata dal Prof. E. Lenzi.

segno contrario, si ha $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ e quindi $u_1 \times u_2 = 0$. Ne segue che anche nel caso $s \neq 0$, alla α si può dare la forma [2].

Dunque: *nella ipotesi a), alla α si può dare la forma* [2].

b) Supponiamo che la α si possa ridurre alla forma [2]. Allora si ha:

$$2\mathrm{V}\alpha = i \wedge \alpha i + \ldots + \ldots = m \cdot i \wedge i + \ldots + \ldots = 0$$

e quindi, per la [1], α è *dilatazione.*

Sia α una dilatazione. Le direzioni unite di α, siano esse costituite da una sola o da infinite terne ortogonali, sono *elementi intrinseci* di α e quindi la forma [2] è *forma assoluta,* della quale si *può* far uso senza cadere nel *formalismo degli elementi di riferimento,* e della quale, anzi, si *deve* far uso nelle applicazioni poichè gli elementi dai quali dipende sono delle funzioni di α. In ciò che segue ci riferiremo sempre alla forma [2].

È importante stabilire il teorema:

Le **dilatazioni** *formano un* **sistema lineare**; *vale a dire: la somma di dilatazioni e il prodotto di una dilatazione per un numero, sono pure dilatazioni.*

Dim. Se α, β, sono dilatazioni e m è numero, da $\mathrm{V}\alpha = 0$ e $\mathrm{V}\beta = 0$ segue subito

$$\mathrm{V}(\alpha + \beta) = \mathrm{V}\alpha + \mathrm{V}\beta = 0, \quad \mathrm{V}(m\alpha) = m\mathrm{V}\alpha = 0$$

e quindi [cfr. [1]] $\alpha + \beta$ e $m\alpha$ sono dilatazioni; c. d. d.

Dalla forma [2] della *dilatazione* α, risultano in modo ovvio le proprietà seguenti che lasciamo al lettore la cura di dimostrare.

α è **propria** *solamente quando* $mnp \neq 0$ (*nessuno dei numeri m, n, p è nullo*); il che equivale a dire che: *α è* **degenere** *solamente quando* $mnp = 0$ (*uno, almeno, dei numeri m, n, p è nullo*);

se $n = p$ **tutte** *le direzioni normali ad* i *sono direzioni* **unite** *di* α;

se $m = n = p$, *allora* $\alpha = m\odot$, *cioè α è l'* **omotetia** *vettoriale individuata dal numero m* [*cfr. n. 3*];

se $m = 0$ *e* $np \neq 0$, *allora la sola direzione di* i *è, ad un tempo,* **unita** *e* **nulla** *per* α;

se $m \neq 0$ *e* $n = p = 0$, *allora la direzione di* i *è* **unita** *e* **non nulla** *per* α, *e* **tutte** *le direzioni normali ad* i *sono, ad un tempo* **unite** *e* **nulle** *per* α.

Applicando gli operatori I, K, D, V, alla dilatazione α, cui intendiamo data per le [3] la forma [2], si ha:

$$[3] \quad \mathrm{I}_1\alpha = m + n + p, \quad \mathrm{I}_2\alpha = np + pm + mn, \quad \mathrm{I}_3\alpha = mnp$$

$$[4] \quad \mathrm{K}\alpha = \alpha, \quad \mathrm{D}\alpha = \alpha, \quad \mathrm{V}\alpha = 0.$$

Dim. Da [2] e dalle [2] del n. 4, § 1 si ottengono le [3]. Le [4], sono le [1], [1'] già note.

3. Omotetie vettoriali (caso particolare delle dilatazioni). Diremo che l'omografia α è una *omotetia vettoriale*, quando: qualsiasi direzione è unita per α [cfr. § 1, n. 3]; vale a dire, qualunque sia il vettore x si ha

$$(\alpha) \qquad x \wedge \alpha x = 0 \qquad \text{[cfr. n. 1, [2]].}$$

L'omografia α *è una* **omotetia vettoriale,** *solamente quando: esiste un numero reale* m *tale che*

$$\alpha = m\odot, \quad \textit{o, con scrittura abbreviata,} \quad \alpha = m.$$

Dim. Se $\alpha = m\odot$ allora la (α) è vera e α è *omotetia vettoriale.*

Viceversa. Se α è *omotetia vettoriale*, allora per x, y vettori arbitrari si ha:

$$\alpha x = hx, \quad \alpha y = ky, \quad \alpha(x + y) = l(x + y),$$

con h, k, l numeri reali. Per la linearità di α si ha:

$$hx + ky = lx + ly, \quad \text{cioè} \quad (h - l)x = (l - k)y;$$

ma questa deve valere anche per x, y non paralleli e quindi si ha $h = k = l$. Dunque deve esistere un numero reale m tale che $\alpha = m\odot$; e ne deve esistere uno solo perchè da $\alpha = m\odot$ e $\alpha = m'\odot$ si ricava $mx = m'x$ qualunque sia x e quindi $m = m'$.

È evidente [cfr. n. 2] che: le **omotetie vettoriali** *sono casi particolari delle* **dilatazioni**; precisamente sono quelle dilatazioni che ridotte alla forma [2] del n. 2 dànno $m=n=p$ e si ha $\alpha = m\odot$.

Le *omotetie vettoriali*, o brevemente (ma inesattamente) *numeri reali relativi*, sono le più semplici omografie. Esse ci erano già note, insieme alle proprietà seguenti:

le **omotetie vettoriali** *formano un* **sistema lineare**; *tra esse vi è l'* **identità** $1\odot$, *o brevemente* 1;

$$\begin{array}{llll} I_1 m = 3m, & I_2 m = 3m^2, & I_3 m = m^3 & [\text{cfr. § 1, n. 4, [3]}]; \\ Km = m & & & [\text{cfr. § 1, n. 7, [4]}] \\ Dm = m & & & [\text{cfr. § 1, n. 8, [2]}] \\ Vm = 0 & & & [\text{cfr. § 1, n. 9, [2]}]. \end{array}$$

4. Diadi. Proprietà fondamentali. Operatori I, K, D, V applicati alle diadi.

Diremo che l'omografia α è una *diade*, quando: esiste almeno un vettore $\boldsymbol{b}$ tale che, per x vettore arbitrario

$$[0] \quad \alpha x \wedge \boldsymbol{b} = 0, \text{ cioè } \alpha x = \text{« un multiplo di } \boldsymbol{b} \text{ »} = m\boldsymbol{b},$$

vale a dire: l'omografia α *trasforma qualsiasi vettore in un vettore, o nullo, o avente, per* $\boldsymbol{b} \neq 0$, *direzione fissa,* (*la direzione di* $\boldsymbol{b}$). Questa è la caratteristica *geometrica* delle *diadi.*

Vi è appena bisogno di osservare, come risulta subito dalla definizione di diade che [cfr. § 1, n. 2].

Ogni diade non nulla è omografia degenere di 2^a *specie.*

Il teorema fondamentale per le *diadi* è il seguente:

L'omografia α *è una* **diade** *solamente quando esiste almeno una coppia di vettori* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *tale che*

$$(\alpha) \qquad \alpha x = \boldsymbol{a} \times x \cdot \boldsymbol{b}$$

qualunque sia il vettore x.

Dim. Se $\alpha = 0$ il teorema è evidente poichè si ha $\alpha x = 0$, per x *arbitrario*, solamente quando $a = 0$, ovvero $b = 0$.

Supponiamo ora $\alpha \neq 0$.

Sia α una *diade*. Per definizione esiste un vettore (necessariamente non nullo) b tale che, per x vettore arbitrario, $\alpha x = mb$ con m numero reale funzione di x. Ma m è evidentemente *funzione lineare* di x e quindi [cfr. Intr. II, n. 6, 1°] esiste un vettore a tale che $m = a \times x$. Dunque: *se α è una diade esiste almeno una coppia a, b sodisfacente alla* (a).

Viceversa. Se esiste almeno una coppia a, b sodisfacente alla (a), allora α è una *diade* poichè αx è vettore o nullo (per $a \times x = 0$) o parallelo a b. Dunque: *se esiste almeno una coppia a, b sodisfacente alla* (a), *l'omografia α è una* **diade**.

È in base a questo teorema che vien naturale esprimere con la notazione

$$\mathrm{H}(a, b)$$

quella *diade*, dipendente dai vettori a, b, che per x vettore arbitrario sodisfa alla (a).

Con tale notazione la (a) assume la importante e generica forma

$$\mathrm{H}(a, b)x = a \times x \cdot b. \qquad [1]$$

Si noti che H è simbolo fisso di *operatore binario tra coppie di vettori e omografie* (*diadi*).

Le *diadi*, o anche soltanto le *assiali*, dànno un importante elemento meccanico, le ***omografie d'inerzia***. Sia S un sistema materiale formato da punti P_i con le masse m_i e O un punto arbitrario. Si chiama **omografia d'inerzia** *di S rispetto ad O*, la omografia, introdotta da R. Marcolongo,

$$\eta = \Sigma_i m_i \{ (P_i - O)^2 - \mathrm{H}(P_i - O,\ P_i - O) \},$$

ovvero, sotto altre forme con le *assiali*,

$$\eta = -\Sigma m_i \{ (P_i - O) \wedge \} \{ (P_i - O) \wedge \} = -\Sigma m_i \{ (P_i - O) \wedge \}^2.$$

Se u è vettore *unitario*, allora si ha facilmente

$$u \times \eta u = \Sigma m_i \{ (P_i - O) \wedge u \}^2$$

e quindi $u \times \eta u$ è il **momento d'inerzia** *del sistema S rispetto all'asse che passa per O ed è parallelo ad u.* Siccome per mezzo del baricentro G di S si passa facilmente, e *senza integrazioni*, dalla η relativa ad O alla η relativa ad un altro punto O', così resta evidente la notevole importanza della η di fronte ai metodi ordinari con i quali il cambiamento di asse richiede la ripetizione di calcoli lunghi di integrali tripli [cfr. *Meccanica razionale* (Collezione Lattes) l. c. pp. 180-200].

Le principali proprietà delle *diadi* sono espresse dalle proposizioni seguenti, nelle quali a, b, c, u, v sono vettori e m è numero reale relativo.

[2] $\mathrm{H}(a, b) = 0$, *solamente quando* $a = 0$, *ovvero* $b = 0$.

Una diade è nulla nel solo caso che sia nullo almeno uno dei due vettori che la determinano.

Dim. Affinchè $\mathrm{H}(a, b) = 0$ è necessario è sufficiente che sia $\mathrm{H}(a, b)x = 0$, qualunque sia x; il che, per la [1] avviene solamente quando: $a \times x \cdot b = 0$ che, per l'arbitrarietà di x, dà $a = 0$; ovvero $b = 0$; c. d. d.

[3] $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{H}(a, b) = \mathrm{H}(u, v) \text{ solamente quando: esiste un numero} \\ \text{reale } m \text{ tale che } u = ma,\ mv = b. \end{array} \right.$

In altri termini: *tutte le* **diadi** identiche ad $\mathrm{H}(a, b)$ *sono le diadi* $\mathrm{H}(ma, b/m)$ *variando comunque* m *nella classe dei numeri reali relativi non nulli.*

Dim. Le due ultime condizioni [3] sono evidenti quando uno, almeno, dei vettori a, b od u, v è nullo, cioè le due diadi sono nulle.

Siano ora a, b, u, v vettori non nulli. La condizione di eguaglianza delle due diadi è, in virtù della [1], e per x vettore arbitrario,

$$a \times x \cdot b = u \times x \cdot v;$$

ma v non è nullo e quindi, poichè b, v risultano paralleli, deve esistere un numero m tale che $b = mv$. Ponendo questo valore di b nella condizione precedente si ha

$$a \times x \cdot m = u \times x, \quad \text{cioè} \quad (ma) \times x = u \times x$$

che per l'arbitrarietà di x dà, appunto, $ma = u$ [1].

[4] $$\begin{cases} H(a + b, c) = H(a, c) + H(b, c) \\ H(a, b + c) = H(a, b) + H(a, c) \\ H(ma, b) = H(a, mb) = mH(a, b). \end{cases}$$

Ogni diade è ente **lineare** *rispetto a ciascuno dei due vettori che la determinano.*

Dim. Per x vettore arbitrario si ha.

$$\begin{aligned} H(a + b, c)x &= (a + b) \times x \cdot c = a \times x \cdot c + b \times x \cdot c = \\ &= H(a, c)x + H(b, c)x = \{ H(a, c) + H(b, c) \} x \end{aligned}$$

che dimostra la prima delle [4]: analogamente per le altre.

[5] *La somma di due diadi può non essere una diade.* E da ciò risulta che: *le diadi non formano un sistema lineare.*

Dim. Si ha $\{ H(a, b) + H(u, v) \} x = a \times x \cdot b + u \times x \cdot v$ e quindi: se $b \wedge v \neq 0$ il secondo membro non è vettore o nullo o avente direzione indipendente da x, cioè $H(a, b) + H(u, v)$ non è una diade [2].

Applichiamo ora gli operatori I, K, D, V alle diadi. Si ottengono formule importanti e di continuo uso nelle applicazioni.

[6] $I_1 H(a, b) = a \times b, \quad I_2 H(a, b) = 0, \quad I_3 H(a, b) = 0$

[7] $KH(a, b) = H(b, a)$

[8] $DH(a, b) = \{ H(a, b) + H(b, a) \} / 2$

[9] $2VH(a, b) = a \wedge b.$

---

(1) La diade $H(a, b)$ è una *funzione della coppia* (a, b) e non cambia di valore per tutte le coppie $(ma, b/m)$ con m numero reale non nullo. Sarebbe dunque erroneo dire, come si fa spesso, che « della diade $H(a, b)$, i vettori a, b ne sono il 1° e 2° elemento », poichè mentre $H(a, b)$ è una funzione della coppia $(a; b)$, gli elementi di questa, a e b, *non* sono funzioni della diade $H(a, b)$ [cfr. Intr. I, n. 2].

(2) Le *diadi* sono state introdotte dal GIBBS, come *prodotto diadico* di un vettore per un altro (con notazione inopportuna e che noi non abbiamo potuto seguire). Lo stesso GIBBS ha ottenute le omografie generali come somme di *tre* diadi. Anche in questo non abbiamo potuto seguire il GIBBS perchè non è certo opportuno far dipendere un sistema *lineare* (le *omografie*) da un sistema *non lineare* (le *diadi*).

Dim. [6]. Riferendosi alla terna unitaria ecc. i, j, k, si ha [cfr. § 1, n. 4, [2]]:

$$\mathrm{I}_1\mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{b} + \ldots + \ldots = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots)\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b};$$

poi l'H_2 e l'H_3 sono nulli perchè $\mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{i}, \ldots$ sono paralleli a $\boldsymbol{b}$.

Dim. [7]

$$\boldsymbol{x}\times \mathrm{KH}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\times \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{y} =$$
$$= \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x}\times \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{y},$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ dimostra la [7].

Dim. [8]. Si deduce da [7] e da $\mathrm{D}\alpha = (\alpha + \mathrm{K}\alpha)/2$ [cfr. § 1, n. 8, [1]].

Dim. [9]. Per $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vettori qualunque si ha [cfr. § 1, n. 9, [1]]

$$2\mathrm{VH}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\times\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\times \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\times \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{y} =$$
$$= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$ dimostra la [8] (1).

Per le omografie vettoriali che appartengono, ad un tempo, a due dei tipi di omografie particolari si ha il teorema:

L'omografia vettoriale α *è, ad un tempo;*

a) **assiale** *e* **dilatazione,** *solamente quando* $\alpha = 0$;

b) **assiale** *e* **diade,** » » $\alpha = 0$;

c) **dilatazione** *e* **diade,** » » $\alpha = m\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$

con m *numero reale e* $\boldsymbol{u}$ *vettore.*

Dim. *a*) Deve essere [cfr. n. 1, [1']; n. 2, [1'] $\alpha = -\mathrm{K}\alpha$ e $\alpha = \mathrm{K}\alpha$, cioè $\alpha = 0$.

b) Deve essere [cfr. n. 1, [1']; n. 4, [7]]

$$\alpha = -\mathrm{K}\alpha, \quad \mathrm{KH}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \quad \text{cioè} \quad \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}),$$

vale a dire [cfr. [3]] $\boldsymbol{a} = -m\boldsymbol{b}$, $m\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, da cui $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$, cioè $\boldsymbol{a} = 0$ e quindi [cfr. [2]] $\alpha = 0$.

c) Per $\alpha = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ deve essere $\mathrm{V}\alpha = 0$, cioè [cfr. [9]] $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = 0$ e quindi, come si era affermato, $\alpha = m\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$.

---

(1) Il calcolo con i vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sarebbe molto più lungo del calcolo diretto che si è ora fatto [cfr. § 1, n. 9, [7]].

5. Riduzione di una omografia generale alla somma di una dilatazione con una assiale.

Si è già veduto [cfr. § 1, n. 10, [1]] che, essendo α una generica omografia, si ha identicamente

$$\alpha = \mathrm{D}\alpha + (\mathrm{V}\alpha)\wedge$$

e poichè $\mathrm{D}\alpha$ è una dilatazione [cfr. n. 2] risulta che: α *rimane decomposta nella somma di una dilatazione con una assiale.*

Possiamo ora dimostrare che:

La generica omografia α *è riduttibile,* **in un sol modo,** *alla* **somma** *di una* **dilatazione** *con una* **assiale**; *quindi i due termini della somma sono soltanto* $\mathrm{D}\alpha$ *e* $(\mathrm{V}\alpha)\wedge$.

Dim. Se si può porre

$$\alpha = \beta + u\wedge \quad \text{e} \quad \alpha = \beta' + u'\wedge$$

ove β, β' sono *dilatazioni* e u, u' sono vettori, allora si ha

$$(a) \qquad \beta - \beta' = (u' - u)\wedge;$$

ma $\beta - \beta'$ è *dilatazione* e $(u' - u)\wedge$ è *assiale* e quindi [cfr. n. 4, ultimo teorema] deve essere $\beta = \beta'$ e $u = u'$. c. d. d.

Oppure: operando con V nella (a) si ha $0 = u' - u$ e da questo, e da (a), risulta $\beta = \beta'$.

6. Quadriche indicatrici.

Sia α una omografia, O un punto proprio e k un numero reale relativo. I punti P, se esistono, sodisfacenti alla condizione

$$[1] \qquad (P - O) \times \alpha(P - O) = k$$

stanno in una *superficie del secondo ordine* (poichè la condizione [1] è del secondo grado rispetto al punto P), cioè in una *quadrica.*

Chiameremo ***quadrica indicatrice di*** α ***rispetto al punto*** O ***e al numero*** k, il luogo del punto P sodisfacente alla condizione [1].

Per le applicazioni fisico-meccaniche bastano le due proprietà seguenti (fra le tante che ne esistono) delle quadriche indicatrici.

L'omografia α, la sua dilatazione $\mathrm{D}\alpha$ *e la sua coniugata* $\mathrm{K}\alpha$, *hanno, rispetto ad O e k, le medesime quadriche indicatrici.*

Dim. Dalle [1], [2] del n. 5 si ha

$$\mathrm{D}\alpha = \alpha - (\mathrm{V}\alpha)\wedge, \quad \mathrm{K}\alpha = \alpha - 2(\mathrm{V}\alpha)\wedge$$

e quindi per x vettore arbitrario

$$x \times \mathrm{D}\alpha x = x \times \{ \alpha x - (\mathrm{V}\alpha)\wedge x \} = x \times \alpha x,$$
$$x \times \mathrm{K}\alpha x = x \times \{ \alpha x - 2(\mathrm{V}\alpha)\wedge x \} = x \times \alpha x$$

che per la [1] dimostrano il teorema.

La **normale** *in P alla quadrica* [1] *è parallela al vettore* $\mathrm{D}\alpha(P-O)$. Ovvero, il che equivale: *il piano diametrale,* **coniugato** *alla direzione del vettore non nullo u, di una quadrica indicatrice della omografia α, è normale al vettore* $\mathrm{D}\alpha u$.

Dim. Differenziando [E. C. V.] la condizione

$$(P-O) \times \mathrm{D}\alpha(P-O) = k,$$

che per il teorema precedente equivale alla [1] si ha:

$$dP \times \mathrm{D}\alpha(P-O) + (P-O) \times \mathrm{D}\alpha dP = 2dP \times \mathrm{D}\alpha(P-O) = 0\,;$$

ma dP è sempre parallelo al piano tangente alla quadrica in P, e poichè dP risulta normale al vettore $\mathrm{D}\alpha(P-O)$, resta dimostrata la prima forma del teorema e anche la seconda perchè u è vettore parallelo a $P-O$.

È poi ovvio che: *le direzioni unite della* $\mathrm{D}\alpha$ *sono le direzioni degli* **assi** *di qualsiasi* **quadrica indicatrice**, [1], **della omografia** α.

7. Riduzione di una omografia generica alla somma di tre diadi.

1.° *Se i, j, k è terna unitaria-ortogonale di vettori e α è una omografia si hanno le notevoli identità seguenti:*

$$[1] \quad \alpha = \mathrm{H}(i, \alpha i) + \mathrm{H}(j, \alpha j) + \mathrm{H}(k, \alpha k) = \mathrm{H}(\mathrm{K}\alpha i, i) + \ldots + \ldots,$$

$$[2] \quad \mathrm{K}\alpha = \mathrm{H}(i, \mathrm{K}\alpha i) + \mathrm{H}(j, \mathrm{K}\alpha j) + \mathrm{H}(k, \mathrm{K}\alpha k) = \mathrm{H}(\alpha i, i) + \ldots + \ldots,$$

$$[3] \quad \mathrm{H}(i, i) + \mathrm{H}(j, j) + \mathrm{H}(k, k) = 1 \quad [\text{esattamente } 1\odot] \text{ (1)}.$$

Dim. Operando con α nei due membri della identità [E. C. V.]

$$x = x \times i \cdot i + x \times j \cdot j + x \times k \cdot k$$

si ha:

$$\alpha x = x \times i \cdot \alpha i + \ldots + \ldots = \left| \mathrm{H}(i, \alpha i) + \ldots + \ldots \right| x$$

che per l'arbitrarietà di x dimostra la 1ª forma della [1]. Da questa si ha la 1ª forma di [2] cambiando α in $\mathrm{K}\alpha$. Le seconde forme di [1] e [2] si ottengono dalle prime operando con K. Infine dalla 1ª forma [1] si ottiene la [3] per $\alpha = 1\odot$.

2.° *Sia α omografia vettoriale. Dati i vettori,* **non com-planari,** *u, v, w (ovvero a, b, c), sono determinati i vettori a, b, c, (ovvero u, v, w), complanari o pur no, tali che*

$$[4] \quad \alpha = \mathrm{H}(u, a) + \mathrm{H}(v, b) + \mathrm{H}(w, c),$$

avendosi, rispettivamente,

$$[5] \quad u \wedge v \times w \cdot a = \alpha(v \wedge w), \quad u \wedge v \times w \cdot b = \alpha(w \wedge u), \quad u \wedge v \times w \cdot c = \alpha(u \wedge v),$$

$$[6] \quad a \wedge b \times c \cdot u = \mathrm{K}\alpha(b \wedge c), \quad a \wedge b \times c \cdot v = \mathrm{K}\alpha(c \wedge a), \quad a \wedge b \times c \cdot w = \mathrm{K}\alpha(a \wedge b).$$

---

(1) Se in luogo della terna i, j, k si fa uso della terna u, v, w di vettori *non complanari*, si ha

$$u \wedge v \times w \cdot \alpha = \mathrm{H}(v \wedge w, \alpha u) + \mathrm{H}(w \wedge u, \alpha v) + \mathrm{H}(u \wedge v, \alpha w)$$

e le altre analoghe (le due forme) alle [1], [2[; la [3] diviene

$$\mathrm{H}(u, v \wedge w) + \mathrm{H}(v, w \wedge u) + \mathrm{H}(w, u \wedge v) = u \wedge v \times w$$

che si deducono, come quelle del testo, dalla identità [E. C. V.]

$$u \wedge v \times w \cdot x = v \wedge w \times x \cdot u + w \wedge u \times x \cdot v + u \wedge v \times x \cdot w.$$

Dim. I vettori u, v, w si possono esprimere linearmente mediante i vettori i, j, k di una terna unitaria ortogonale; se $u \wedge v \times w \neq 0$ anche i, j, k si possono esprimere linearmente mediante u, v, w [E. C. V.]; sostituendo queste espressioni di i, j, k nella 1ª forma [1] si ha la [4]. Applicando la α data dalla [4] a $v \wedge w, \ldots$ si hanno le [5]; analogamente per le [6] poichè $\mathrm{K}\alpha = \mathrm{H}(a, u) + \ldots + \ldots$.

3.° *Facendo variare* u, v, w, a, b, c, *comunque, nel campo totale dei vettori, il secondo membro della* [4] *percorre il* **campo totale delle omografie**; *vale a dire: la* [4] *dà* **tutte le omografie**, *e una assegnata omografia* α *può esser posta, in infiniti modi, sotto la forma* [4], *cioè ridotta a somma di tre diadi (non esclusa l'ulteriore riduzione a due diadi o ad una sola). Avendo* α *la forma* [4], *si hanno le formule* [7]-[10] *seguenti delle quali ha importanza, per noi, soltanto la* [9]:

[7] $\mathrm{I}_1\alpha = u \times a + v \times b + w \times c$

[8] $\mathrm{I}_2\alpha = (v \wedge w) \times (b \wedge c) + (w \wedge u) \times (c \wedge a) + (u \wedge v) \times (a \wedge b)$

[9] $\mathrm{I}_3\alpha = u \wedge v \times w \cdot a \wedge b \times c$

[10] $\mathrm{V}\alpha = u \wedge a + v \wedge b + w \wedge c$.

Dim. Qualunque siano i vettori $u, \ldots$, $a, \ldots$, il 2° membro della [4] è una omografia. Viceversa, dal teorema 2°, risulta che fissati i vettori $u, \ldots$ (ovvero, $a, \ldots$), sotto la condizione di non complanarietà, ad una omografia α si può sempre dare la forma [4]. La 1ª parte del teorema è così dimostrata.

La [7] è evidente ricordando che $\mathrm{I}_1\mathrm{H}(x, y) = x \times y$ e che I_1 è distributivo rispetto alla somma.

Fissata ad arbitrio la terna unitaria-ortogonale-positiva i, j, k si ha [cfr. E. C. V. e § 1, n. 4, [2]]

$$\mathrm{I}_3\alpha = (\alpha i) \wedge (\alpha j) \times \alpha k = \begin{vmatrix} u \times i & v \times i & w \times i \\ u \times j & v \times j & w \times j \\ u \times k & v \times k & w \times k \end{vmatrix} \cdot a \wedge b \times c = u \wedge v \times w \cdot a \wedge b \times c$$

che dimostra la [9]. In modo analogo per le [8], [10] come il lettore può fare per esercizio.

4.° *Se* α *è una* **assiale** *si può porre, in infiniti modi,*

$$[11] \qquad \alpha = \mathrm{H}(x, y) - \mathrm{H}(y, x)$$

ove x, y *sono vettori sodisfacenti all'unica condizione*

$$[11'] \qquad x \wedge y = \mathrm{V}\alpha.$$

Dim. Dalla [11] si ha $2\mathrm{V}\alpha = x \wedge y - y \wedge x = 2x \wedge y$ ed inoltre $\mathrm{K}\alpha = -\alpha$; c. d. d.

Vien così confermata l'inopportunità del metodo del Gibbs che fa dipendere le omografie generali, e anche quelle particolari, dalle diadi.

5.° *La forma diadica generale delle dilatazioni è*

$$[12] \qquad \alpha = m\mathrm{H}(i, i) + n\mathrm{H}(j, j) + p\mathrm{H}(k, k)$$

con m, n, p *numeri reali e* i, j, k *terna unitaria-ortogonale delle direzioni* **unite** *di* α. *Ovvero, tenendo conto della identità* [3]

$$[12'] \qquad \alpha = m + (n - m)\mathrm{H}(j, j) + (p - m)\mathrm{H}(k, k)$$

che esprime la dilatazione α *come somma di un numero con due diadi.*

Dim. Dalla [2] del n. 2 e dalla 1ª forma [1] si ha immediamente la [12] (o viceversa) e indi la [12'].

8. Classificazione delle omografie degeneri mediante le diadi.

1.° *Se l'omografia* α *è ridotta alla forma*

$$[1] \qquad \alpha = \mathrm{H}(u, a) + \mathrm{H}(v, b) + \mathrm{H}(w, c)$$

come somma di tre diadi, allora

$$[2] \quad \begin{cases} \alpha \text{ è } \textbf{propria} \textit{ solamente quando } u \wedge v \times w \neq 0 \quad \textit{e} \quad a \wedge b \times c \neq 0, \\ \alpha \text{ è } \textbf{degenere} \qquad » \qquad u \wedge v \times w = 0 \quad \textit{ovvero} \quad a \wedge b \times c = 0. \end{cases}$$

Dim. La [9] del n. 7 dà, appunto, $\mathrm{I}_3\alpha \neq 0$ ovvero $\mathrm{I}_3\alpha = 0$ solamente quando sono soddisfatte le condizioni indicate.

2.° *L'omografia, non nulla,* α *è* **degenere di 1ª specie,** *solamente quando è riduttibile alla* **somma di due diadi,** *ma* **non ad una sola diade**; *cioè si ha*

[3] $\alpha = H(u, a) + H(v, b)$, con $u \wedge v \neq 0$ e $a \wedge b \neq 0$;

variando x *nella classe totale dei vettori, i vettori*

[4] $\begin{cases} \alpha x \text{ sono } \textbf{complanari} \text{ con } a \text{ e } b, \text{ cioè } \textbf{normali} \text{ ad } a \wedge b, \\ K\alpha x \text{ » » » } u \text{ e } v, \text{ » » » } u \wedge v; \end{cases}$

inoltre, le **direzioni nulle** *di* α *e* $K\alpha$ *sono rispettivamente, quelle dei vettori* $u \wedge v$, $a \wedge b$ *e soltanto queste.*

Dim. Diamo, il che è possibile, ad α la forma [1]. Siccome, per ipotesi α è degenere sarà, ad es., per la [2], $u \wedge v \times w = 0$. Se $u \wedge v \neq 0$, allora w si può esprimere linearmente mediante u, v; ciò fatto e sostituito a w, nella [1], il valore che si è trovato, dalle [4] del n. 1 si ha appunto la forma [3]. Analogamente se $a \wedge b \times c = 0$. — Le due condizioni $u \wedge v \neq 0$, $b \wedge c \neq 0$ sono necessarie poichè altrimenti α sarebbe riduttibile ad una sola diade e sarebbe degenere di 2ª specie.

Osservando che dalla [3] si ha:

$$\alpha x = u \times x \cdot a + v \times x \cdot b, \quad (\alpha x) \times a \wedge b = 0,$$
$$K\alpha x = a \times x \cdot u + b \times x \cdot v, \quad (K\alpha x) \times u \wedge v = 0$$

restano dimostrate le [4].

Dalla [3] si ha $\alpha(u \wedge v) = 0$, $K\alpha(a \wedge b) = 0$; di più da, ad es., $\alpha x = 0$ segue $a \wedge b = 0$; quindi resta dimostrata anche l'ultima parte del teorema.

3.° *L'omografia, non nulla,* α *è* **degenere di 2ª specie,** *solamente quando è riduttibile ad* **una diade** *non nulla; cioè si ha*

[5] $\alpha = H(u, a)$, con $u \neq 0$ e $a \neq 0$;

variando x *nella classe totale dei vettori, i vettori*

[6] $\begin{cases} \alpha x \text{ sono } \textbf{paralleli} \text{ ad } a, \\ K\alpha x \text{ » » » } u; \end{cases}$

inoltre le **direzioni nulle** *di* α *e* $K\alpha$ *sono, rispettivamente, quelle dei vettori* u, a, *e soltanto queste.*

Dim. Risulta immediatamente dalla definizione di omografia degenere di 2ª specie e dal fatto che, ad es., $\alpha x = u \times x \cdot a = 0$ nel solo caso $u \times x = 0$, ovvero $a = 0$; ecc.

Esercizi.

Siano $m, \ldots$ numeri reali e $u, \ldots, a, \ldots$ vettori.

$$(1) \quad \begin{cases} Cm = 2m, \quad C(u\wedge) = -u\wedge, \quad CH(u, v) = u \times v - H(u, v). \\ C\begin{pmatrix} mi, & nj, & pk \\ i\,, & j\,, & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+p)i, & (p+m)j, & (m+n)k \\ i & , & j & , & k \end{pmatrix}. \end{cases}$$

(2) $\{m + H(u, v)\}^{-1} = \dfrac{1}{m}\left\{1 - \dfrac{1}{m + u \times v} H(u, v)\right\}$, per $m \neq 0$ e $u \times v \neq -m$.

(3) $(m + u\wedge)^{-1} = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{m^2 - mu\wedge + H(u, u)}{m^2 + u^2}$, per $m \neq 0$.

(4) $m + H(u, u)$ è dilatazione le cui direzioni unite sono tutte quelle parallele e normali ad u.

(5) Se $u\wedge v \times w \neq 0$, allora $\alpha = \begin{pmatrix} mv\wedge w, & nw\wedge u, & pu\wedge v \\ u & , & v & , & w \end{pmatrix}$ è dilatazione e le rette $Ou, \ldots$ sono coniugate ai piani Ovw, per la quadrica descritta da P per il quale $(P - O) \times \alpha(P - O) = \text{cost.}$

(6) Se α, β sono omografie, date, vogliamo risolvere, rispetto alla omografia incognita ξ la equazione $\beta\xi = \alpha$. Per β invertibile si ha $\xi = \beta^{-1}\alpha$; per β non invertibile si hanno i casi seguenti:

(*a*) $a\wedge\xi = \alpha$, deve essere $K\alpha a = 0$ e allora $\xi = -a\wedge\alpha + H(u, a)$ con u arbitrario;

(*b*) $H(a, b)\xi = \alpha$ e $a^2 = 1$, deve essere $\alpha = H(c, b)$ e allora $\xi = H(c, a) + H(u, i) + H(v, j)$ con u, v arbitrari e a, i, j terna unitaria-ortogonale-positiva;

(*c*) $\{H(a, c) + H(b, d)\}\xi = \alpha$, deve essere α somma di due diadi, che è riduttibile ad $\alpha = H(a', c) + H(b', d)$ e allora

$$\xi = H(a', a) + H(b', b) + H(u, a\wedge b)$$

con u vettore arbitrario [cfr. A. Pensa, *Sulla risoluzione di equazioni...* (« Acc. Torino », vol. 49, 1913-14)].

(7) Se α, β sono dilatazioni allora si ha $\mathrm{V}(\alpha\beta) = 0$ solamente quando α e β hanno a comune le direzioni unite.

(8) L'omografia $\mathrm{D}\beta \cdot \mathrm{D}\alpha$ è una dilatazione nel solo caso che $\mathrm{D}\alpha$ e $\mathrm{D}\beta$ siano commutabili nel prodotto.

(9) Se $a \wedge \alpha = 0$ allora si ha $\alpha = \mathrm{H}(b, a)$ con b vettore arbitrario.

(10) Se $\alpha = \begin{pmatrix} mi, & nj, & pk \\ i, & j, & k \end{pmatrix}$ è dilatazione ($i, \ldots$ direzioni unite) e a, b sono vettori non nulli normali a k allora, affinchè la successione αa, αb, k abbia verso opposto alla successione a, b, k è necessario e sufficiente che sia $mn < 0$. — Si noti, ad es., che per $p = 0$ e $\mathrm{I}_1\alpha = 0$ le due successioni hanno verso opposto.

§ 3. Operatore R.

1. Definizione dell'operatore R e sue proprietà fondamentali.

Se α è una omografia, allora esiste una omografia β, ed una sola, funzione di α soltanto e tale che

$$(a) \qquad \beta(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge \alpha y$$

qualunque siano i vettori x, y.

Dim. Il vettore $(\alpha x) \wedge \alpha y$ è una *funzione alternata* della coppia (x, y) di vettori e quindi [cfr. Intr. II, n. 7, 2°] esiste l'operatore lineare β tra vettori e vettori (cioè una omografia) ed uno solo, che soddisfa alla (a); c. d. d.

Essendo α una omografia, con la notazione

$$\mathrm{R}\alpha,$$

indichiamo l'unica omografia β sodisfacente alla (a).

Con tale notazione la (a) assume la forma generale e fondamentale

$$[1] \qquad \mathrm{R}\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge \alpha y$$

che vale qualunque siano i vettori x, y.

Si tenga ben presente che:
$R\alpha$ *è una omografia, funzione di* α*, univocamente determinata;*
R *è operatore tra omografie e omografie.*

L'operatore R è di grande importanza nell'algoritmo delle omografie. Ne esponiamo ora le proprietà fondamentali che restano espresse dalle proposizioni seguenti nelle quali α è una omografia e m è numero reale relativo.

[2] $$R(m\alpha) = m^2 R\alpha.$$

L' R *di* $m\alpha$ *vale il prodotto di* $R\alpha$ *per* m^2. Cioè: R *non è commutativo col prodotto per un numero.* — E ancora: *l'operatore* R *non è lineare.*

Dim. Dalla [1] si ha:

$$R(m\alpha)(x \wedge y) = (m\alpha x) \wedge m\alpha y = m^2 \cdot (\alpha x) \wedge \alpha y = m^2 R\alpha(x \wedge y);$$

che per l'arbitrarietà di $x \wedge y$ dimostra la [2].

[3] $$K\alpha \cdot R\alpha = I_3\alpha, \quad R\alpha \cdot K\alpha = I_3\alpha$$

I due prodotti delle omografie $K\alpha$, $R\alpha$ *sono* **identici** *e valgono entrambi il* **numero** $I_3\alpha$.

Dim. Si ha, per proprietà ben note:

$$K\alpha \{ R\alpha(x \wedge y) \} \times z = R\alpha(x \wedge y) \times \alpha z = (\alpha x) \wedge (\alpha y) \times \alpha z =$$
$$= I_3\alpha \cdot x \wedge y \times z;$$

ma x, y, z sono vettori arbitrari e quindi $K\alpha \cdot R\alpha = I_3\alpha$, cioè vale la 1ª delle [3].

Se α è *invertibile* (cioè è *propria*) allora operando a *sinistra* della 1ª delle [3] con $K\alpha^{-1} = (K\alpha)^{-1}$ si ha $R\alpha = I_3\alpha \cdot K\alpha^{-1}$; operando in questa, a *destra*, con $K\alpha$ si ha $R\alpha \cdot K\alpha = I_3\alpha$. Dunque la 2ª delle [3], cioè $R\alpha \cdot K\alpha - I_3\alpha = 0$, vale per α invertibile ($I_3\alpha \neq 0$); ma $R\alpha \cdot K\alpha - I_3\alpha$ è funzione continua di α e quindi per il principio di continuità [cfr. § 1, n. 5] la 2ª [3] vale anche per $I_3\alpha = 0$, cioè per α degenere.

Come avremo spesso occasione di vedere, la [1] basta per *calcolare* la $R\alpha$, facendo uso dei vettori *arbitrari* x, y.

Ma si può dare anche di Rα la forma seguente che offre un altro metodo per calcolare Rα:

$$[4] \qquad \mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha + \mathrm{K}\alpha^2.$$

Dim. Dalla identità del 3° ordine [cfr. § 1, n. 6, [1]] scritta per Kα, tenuto conto che Kα ed α hanno a comune gli invarianti omonimi [cfr. § 1, n. 7, [8]] e per la [3] si ha subito;

$$\mathrm{K}\alpha\cdot\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha - \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha^2 + \mathrm{K}\alpha^3.$$

Se α, insieme a Kα, è invertibile [cfr. § 1, n. 7, [2]], allora, operando, a sinistra, con $\mathrm{K}\alpha^{-1}$ si ha subito la [4]. — Se α non è invertibile cioè $\mathrm{I}_3\alpha = 0$, allora a causa del ben noto principio di continuità [cfr. § 1, n. 5] vale ancora la [4].

Oppure nel modo seguente, indipendente dal teor. ora citato [§ 1, n. 5]. Si scriva la 1ª delle [1] del § 1, n. 4, per le due successioni u, v, αw e u, v, w; sottraendo membro a membro si ha:

$$u \wedge v \times \{\mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\}\, w = (\alpha u)\wedge(\alpha v) \times w,$$

e per il teorema di commutazione e la [1]:

$$[(\mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha + \mathrm{K}\alpha^2)\cdot(u\wedge v)] \times w = \mathrm{R}\alpha(u\wedge v) \times w;$$

ma tanto w quanto $u\wedge v$ sono vettori arbitrari e quindi vale la [4].

Nel caso che α sia propria, cioè $\mathrm{I}_3\alpha \neq 0$, allora la R$\alpha$ e la $\mathrm{R}\alpha^{-1}$ si possono ottenere in funzione di $\mathrm{K}\alpha^{-1}$ e Kα con le formule

$$[5] \qquad \mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha^{-1},\ \mathrm{R}\alpha^{-1} = \mathrm{K}\alpha/\mathrm{I}_3\alpha,$$

come pure $\mathrm{K}\alpha^{-1}$ e α^{-1} si possono esprimere mediante R con le formule

$$[6] \qquad \mathrm{K}\alpha^{-1} = \mathrm{R}\alpha/\mathrm{I}_3\alpha,\ \alpha^{-1} = \mathrm{RK}\alpha/\mathrm{I}_3\alpha.$$

Dim. La 1ª delle [5] si ottiene dalla 1ª [3] operando nei due membri (a *sinistra* nel 1°) con $\mathrm{K}\alpha^{-1}$; la 2ª si ottiene dalla 1ª cambiando α in α^{-1} e ricordando che $\mathrm{I}_3\alpha^n = (\mathrm{I}_3\alpha)^n$. — La 1ª delle [6] si ottiene subito dalla 1ª delle [5]; la 2ª cambiando in quella ottenuta α in Kα.

Le formule [5], [6] sono praticamente assai utili. In particolare: le [5] eliminano l'uso dell'operatore R per le omografie invertibili; con le [6], moltiplicando per $I_3\alpha$, supposta α propria,

$$I_3\alpha \cdot \alpha^{-1} = RK\alpha, \quad I_3\alpha \cdot K\alpha^{-1} = R\alpha$$

si elimina l'uso di α^{-1} e si può passare al *limite* in quei punti del campo di variazione di α (o del suo campo derivato) nei quali α diviene degenere.

Per l'operatore R applicato al prodotto $\alpha\beta$ della omografia β per l'omografia α si ha:

$$\text{[7]} \qquad R(\alpha\beta) = R\alpha \cdot R\beta.$$

L'operatore R *è* **distributivo rispetto al prodotto** *e senza cambiamento di ordine* [cfr. per K, § 1 n. 7, [6]].

Dim. Si ha, applicando la [1]

$$R(\alpha\beta)(x \wedge y) = (\alpha\beta x) \wedge (\alpha\beta y) = R\alpha((\beta x) \wedge \beta y) = R\alpha \cdot R\beta(x \wedge y)$$

che per l'arbitrarietà di $x \wedge y$ dimostra la [7].

Per R applicato alle potenze dell'omografia α e per le potenze di $R\alpha$ si hanno le formule notevoli:

$$\text{[8]} \quad \begin{cases} R\alpha^n = (R\alpha)^n \\ R\alpha^{-n} = (R\alpha)^{-n} \end{cases} \textit{con } n \textit{ intero assoluto e } \begin{matrix} \alpha \textit{ omografia } \textbf{qualunque} \\ \alpha \quad \text{»} \quad \textbf{propria} \end{matrix}$$

e in particotare, per $n = -1$ e α **invertibile**

$$\text{[8']} \qquad R\alpha^{-1} = (R\alpha)^{-1}.$$

Dim. La 1ª delle [8] si verlfica subito per $n = 0$ e $n = 1$; per $n \gtreqless 2$ si ottiene, *per induzione*, dalla [7].

Dalle [5] si ha subito la [8']

$$R\alpha^{-1} = (R\alpha)^{-1} = K\alpha / I_3\alpha$$

e quindi la 2ª delle [8] è vera per $n = 1$. Ricordando che $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$ e applicando la 1ª delle [8] si ottiene subito la seconda.

2. Operatore R applicato alle omografie semplici e alla somma di tre diadi.

Siano: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vettori qualunque, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ terna *unitaria-ortogonale-positiva* m, n, p numeri reali relativi.

Per l'operatore R applicato alle omografie semplici [cfr. § 2] *diadi, assiali, omotetie, dilatazioni* si hanno le notevoli formule seguenti:

[1] $$\mathrm{R}\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

Dim. Dalla [1] del n. 1 si ha:

$$\mathrm{R}\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = \{\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{x}\}\wedge\{\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} = 0$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$ dimostra la [1].

[2] $$\mathrm{R}(\boldsymbol{u}\wedge) = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Dim. $$\mathrm{R}(\boldsymbol{u}\wedge)(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{x})\wedge(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u} = \\ = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$$

che per essere $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$ vettore arbitrario dimostra la [2].

[3] $\mathrm{R}m = m^2$ [con notazione completa $\mathrm{R}(m\odot) = m^2\odot$].

Dim. $\mathrm{R}m(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = (m\boldsymbol{x})\wedge m\boldsymbol{y} = m^2\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$, c. d. d.

[4] $$\mathrm{R}\begin{pmatrix} m\boldsymbol{i}, & n\boldsymbol{j}, & p\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np\boldsymbol{i}, & pm\boldsymbol{j}, & mn\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

L'operatore R *applicato ad una* **dilatazione** α, *produce ancora una dilatazione che ha a comune con* α *le direzioni unite.*

Dim. Detta α la dilatazione del 1° membro cui si applica la R, si ha:

$$\mathrm{R}\alpha\boldsymbol{i} = \mathrm{R}\alpha(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}) = (\alpha\boldsymbol{j})\wedge\alpha\boldsymbol{k} = (n\boldsymbol{j})\wedge p\boldsymbol{k} = np\cdot\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k} = np\boldsymbol{i},$$

e analogamente per $\mathrm{R}\alpha\boldsymbol{j}$, $\mathrm{R}\alpha\boldsymbol{k}$; c. d. d.

È notevole il caso *dell'operatore* R *applicato alla somma di tre diadi.* Si ha:

[5] $$\mathrm{R}\{\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{c})\} = \\ = \mathrm{H}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$$

dalla quale risulta la [1] come caso particolare ($b = c = 0$), e risulta pure ciò che si ottiene applicando R alla somma di due diadi ($c = 0$).

Dim. Detta α l'omografia somma delle tre diadi del 1° membro si ha:

$$\mathrm{R}\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge \alpha y =$$

$$= (u \times x \cdot a + v \times x \cdot b + w \times x \cdot c) \wedge (u \times y \cdot a + v \times y \cdot b + w \times y \cdot c) =$$

$$= \begin{vmatrix} v \times x & w \times x \\ v \times y & w \times y \end{vmatrix} \cdot b \wedge c + \,..\, + \,...\, =$$

$$= (v \wedge w) \times (x \wedge y) \cdot b \wedge c + \ldots + \ldots =$$

$$= \{ \mathrm{H}(v \wedge w,\ b \wedge c) + \ldots + \ldots \} (x \wedge y); \text{ c. d. d.}$$

3. Prodotti degli operatori R, I, K, D, V.

Sia α una omografia qualunque.

[1] $$\mathrm{R}\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \alpha.$$

L'operatore R *applicato due volte ad* α *produce la stessa* α *moltiplicata per il suo invariante terzo.*

Dim. Per la [3] del n. 1 e la [2] del n. 3 si ha:

$$\mathrm{K}\mathrm{R}\alpha \cdot \mathrm{R}\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{I}_3\alpha = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{K}\mathrm{R}\alpha \cdot \alpha;$$

se α non è degenere operando nei due membri estremi con $(\mathrm{K}\mathrm{R}\alpha)^{-1}$ si ha la [1]; se α è degenere vale ancora la [1] per il *principio di continuità* [cfr. § 1, n. 5, 2°].

Oppure: essendo x, y, u, v vettori arbitrari si ha:

$$\mathrm{R}\mathrm{R}\alpha \{(x \wedge y) \wedge (u \wedge v)\} = \{\mathrm{R}\alpha(x \wedge y)\} \wedge \{\mathrm{R}\alpha(u \wedge v)\} = \{(\alpha x) \wedge \alpha y\} \wedge \{(\alpha u) \wedge \alpha v\} =$$

$$= \alpha x \times \alpha u \wedge \alpha v \cdot \alpha y - \alpha y \times \alpha u \wedge \alpha v \cdot \alpha x = \alpha \cdot \mathrm{I}_3\alpha \{ x \times u \wedge v \cdot y - y \times u \wedge v \cdot x \} =$$

$= \mathrm{I}_3\alpha \cdot \alpha \{(x \wedge y) \wedge (u \wedge v)\}$, c. d. d. [è più semplice la 1ª dimostrazione].

[2] $$\mathrm{I}_1\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha,\quad \mathrm{I}_2\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{I}_1\alpha,\quad \mathrm{I}_3\mathrm{R}\alpha = (\mathrm{I}_3\alpha)^2.$$

Dim. Applicando $(\mathrm{R}\alpha)^2$ ai due membri della [4] del n. 1 si ha:

$$(\mathrm{R}\alpha)^3 - \mathrm{I}_2\alpha \cdot (\mathrm{R}\alpha)^2 + \mathrm{I}_1\alpha \cdot (\mathrm{R}\alpha)^2 \cdot \mathrm{K}\alpha - (\mathrm{R}\alpha)^2 (\mathrm{K}\alpha)^2 = 0.$$

che per le [3] del n. 1 dà subito:

$$(\mathrm{R}\alpha)^3 - \mathrm{I}_2\alpha \cdot (\mathrm{R}\alpha)^2 + \mathrm{I}_1\alpha \cdot \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{R}\alpha - (\mathrm{I}_3\alpha)^2 = 0;$$

confrontando con la identità del 3° ordine scritta per $R\alpha$ risultano le [2].

$$[3] \qquad R K\alpha = K R\alpha.$$

Gli operatori R, K *sono commutabili rispetto al prodotto funzionale.*

Dim. Se nella [4] del n. 1 si pone $K\alpha$ al posto di α si ha:

$$RK\alpha = I_2\alpha - I_1\alpha\cdot\alpha + \alpha^2;$$

se nella stessa [4] del n. 1 si opera con K nei due membri si ha:

$$KR\alpha = I_2\alpha - I_1\alpha\cdot\alpha + \alpha^2;$$

che confrontata con la precedente dimostra la [3].

$$[4] \qquad RD\alpha = DR\alpha + H(V\alpha, V\alpha).$$

In particolare: *l'operatore* R *applicato ad una* **dilatazione** ($V\alpha = 0$ e $D\alpha = \alpha$) *produce una dilatazione* [cfr. n. 2, [4]].

Dim. Se nella [1] del n. 1 poniamo $\alpha \pm \beta$ al posto di α, si ha, con calcolo ovvio [E. C. V.]:

$$R(\alpha + \beta) + R(a - \beta) = 2(R\alpha + R\beta);$$

ponendo, in questa, $\beta = K\alpha$, ricordando [cfr. § 2, n. 5] che

$$\alpha + K\alpha = 2D\alpha, \quad \alpha - K\alpha = 2(V\alpha)\wedge$$

si ha:

$$R(2D\alpha) + R\{2(V\alpha)\wedge\} = 4R\alpha;$$

per la [2] del n. 2 e la [2] del n. 1 si ha subito la [4].

$$[5] \qquad VR\alpha = \alpha V\alpha.$$

Il vettore di $R\alpha$ *è il vettore che si ottiene applicando* α *al vettore di* α. — Ciò conferma la proprietà indicata in [4] per l'R di una dilatazione.

Dim. Applicando V ai due membri della [4] del n. 1 si ha:

$$(a) \qquad VR\alpha = I_1\alpha\cdot V\alpha - V\alpha^2.$$

Ora si ha [§ 1, n. 9, [1]; n. 7, [9]]

$$2\mathrm{V}\alpha^2 \times x\wedge y = y\times\alpha^2 x - x\times\alpha^2 y = (\mathrm{K}\alpha y)\times\alpha x - (\mathrm{K}\alpha y)\times\alpha x =$$
$$= (\alpha y - 2\mathrm{V}\alpha\wedge y)\times\alpha x - (\alpha x - 2\mathrm{V}\alpha\wedge x)\times\alpha y =$$
$$= 2\mathrm{V}\alpha\times\{x\wedge\alpha y - y\wedge\alpha x\} = 2\mathrm{V}\alpha\times\{\mathrm{I}_1\alpha\cdot x\wedge y - \mathrm{K}\alpha(x\wedge y)\} =$$
$$= 2\mathrm{V}\alpha\times(\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{K}\alpha)(x\wedge y) = 2(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\mathrm{V}\alpha\times x\wedge y,$$

che per l'arbitrarietà di $x\wedge y$, dà:

(*b*) $$\mathrm{V}\alpha^2 = (\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\mathrm{V}\alpha, \quad \text{[cfr. § 4, n. 5, [4]]}.$$

Sostituendo nella (*a*) a $\mathrm{V}\alpha^2$ il valore dato dalla(*b*) si ha la [5].

Oppure con la solita terna i, j, k,.... si ha:

$$2\mathrm{VR}\alpha = i\wedge\mathrm{R}\alpha(j\wedge k) + \ldots = i\wedge\{(\alpha j)\wedge\alpha k\} + \ldots = \{(i\times\alpha k\cdot\alpha j - i\times\alpha j\cdot\alpha k) + \ldots\} =$$
$$= \alpha\{(k\times\alpha j - j\times\alpha k)i + \ldots\} = \alpha\{2\mathrm{V}\alpha\times j\wedge k\cdot i + \ldots\} = 2\alpha\{\mathrm{V}\alpha\times i\cdot i + \ldots\} =$$
$$= 2\alpha\mathrm{V}\alpha, \quad \text{c. d. d.}$$

[6] $$\mathrm{V}\alpha^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{I}_3\alpha}\mathrm{VR}\alpha = -\frac{1}{\mathrm{I}_3\alpha}\cdot\alpha\mathrm{V}\alpha, \text{ per } \alpha \text{ propria.}$$

Dim. Operando con V nella 1ª delle [5] del n. 1, si ha:

$$\mathrm{VR}\alpha = -\mathrm{I}_3\alpha\cdot\mathrm{V}\alpha^{-1}$$

dalla quale risulta subito la prima forma [6] la seconda ottenendosi dalla prima e dalla [5].

4. Classificazione delle omografie degeneri mediante l'operatore R.

L'omografia $\mathrm{R}\alpha$ può, in molti casi, essere utilmente adoperata per riconoscere se α è *propria*, ovvero *degenere* e di quale specie, come risulta dai teoremi seguenti.

1° *Affinchè l'omografia* α *sia* **degenere** *è necessario e sufficiente che* $\mathrm{R}\alpha$ *sia una* **diade**.

Dim. Se $\mathrm{R}\alpha$ è una *diade*, allora dall'essere [cfr. n. 3, [2]] $\mathrm{I}_3\mathrm{R}\alpha = (\mathrm{I}_3\alpha)^2$, risulta [cfr. § 1, n. 5] $\mathrm{I}_3\alpha = 0$ e quindi α è *degenere*.

Se α è degenere è pure degenere $\mathrm{K}\alpha$ [cfr. § 1, n. 7, [2]]; esiste dunque $u \neq 0$ tale che $\mathrm{K}\alpha u = 0$ [§ 1, n. 2], e per x, y vettori arbitrari si ha $x\times\mathrm{K}\alpha u = 0$, $y\times\mathrm{K}\alpha u = 0$, cioè $u\times\alpha x = 0$,

$u \times \alpha y = 0$. Ne segue che $(\alpha x) \wedge \alpha y = \mathrm{R}\alpha(x \wedge y)$ è parallelo ad u, cioè, per l'arbitrarietà di $x \wedge y$, la $\mathrm{R}\alpha$ applicata ad un qualsiasi vettore produce un vettore parallelo ad u e quindi [cfr. § 2, n. 1], $\mathrm{R}\alpha$ è una *diade*.

Il teorema si può anche dimostrare così. Si è visto [cfr. § 2, n. 7, 3°, 4°] che α è degenere solamente quando α è somma di due diadi, riduttibile o no ad una sola diade; ma in tal caso $\mathrm{R}\alpha$ è una diade [cfr. n. 2, [5]] e quindi il teorema è dimostrato.

2° *L'omografia* α, *non nulla, è* **degenere** *di* **1ª specie** *solamente quando* $\mathrm{R}\alpha$ *è una* **diade non nulla**, *vale a dire solamente quando si ha*:

[1] $\mathrm{R}\alpha = \mathrm{H}(p, q)$ *con* $p \neq 0$, $q \neq 0$ *e quindi* $q = (\mathrm{R}\alpha p)/p^2$.

Data ad $\mathrm{R}\alpha$, *e per* α *degenere di 1ª specie, la forma* [1] *risulta che*:

le **direzioni** *dei vettori* p, q *sono le sole* **direzioni nulle** *di* α *e* $\mathrm{K}\alpha$ *rispettivamente; ovvero, il che equivale:*

i vettori αx, $\mathrm{K}\alpha x$, *qualunque sia il vettore* x, *sono, rispettivamente,* **normali** *a* q (*cioè ad* $\mathrm{R}\alpha p$) *e a* p.

Se α *è degenere di 1ª specie essa deve esser della forma già nota* [cfr. § 2, n. 8, 2ª].

[2] $\alpha = \mathrm{H}(u, a) + \mathrm{H}(v, b)$ *con* $u \wedge v \neq 0$ *e* $a \wedge b \neq 0$

e quindi la relazione tra i vettori u, v, a, b *e* p, q *è data da*

[3] $u \wedge v = mp$, $a \wedge b = q/m$, *con* m *numero reale non nullo.*

Dim. Affinchè α sia *degenere di 1ª specie* è necessario e sufficiente [cfr. § 1, n. 2] che per y, z vettori arbitrari, siano soddisfatte le due condizioni seguenti:

a) $(\alpha y) \wedge \alpha z = \mathrm{R}\alpha\ (y \wedge z) \neq 0$, che per l'arbitrarietà di $y \wedge z$ dà appunto $\mathrm{R}\alpha \neq 0$;

b) αy, αz siano normali ad uno stesso vettore non nullo q, cioè $(\alpha y) \wedge \alpha z = \mathrm{R}\alpha(y \wedge z)$ sia parallelo a q, il che, per l'arbitrarietà di $y \wedge z$ prova che [cfr. § 2, n. 1] $\mathrm{R}\alpha$ è una diade.

Resta così dimostrata la parte [1] del teorema.

Dalla nota forma [2] di α segue subito [cfr. n. 2, [5]]

$$R\alpha = H(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

e quindi [cfr. § 2, n. 1 [3]] si hanno le tre [3].

Dalle [2], [3] risultano subito, per cose già note [cfr. § 1, n. 7, [2]], le altre due parti del teorema.

3°. *L'omografia, non nulla,* α *è* **degenere di 2ª specie,** *solamente quando* $R\alpha = 0$.

Se α, *non nulla, è degenere di 2ª specie ed* $\boldsymbol{i}$ *è uno dei due vettori* ($\boldsymbol{i}^2 = 1$) *paralleli a tutti i vettori non nulli* αx, *allora si ha identicamente:*

$$\alpha = H(K\alpha \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}), \quad K\alpha = H(\boldsymbol{i}, K\alpha \boldsymbol{i}); \tag{4}$$

le **direzioni nulle** *di* α *e* $K\alpha$ *sono tutte e sole quelle normali a* $K\alpha \boldsymbol{i}$ *e ad* $\boldsymbol{i}$, *rispettivamente; i vettori* αx, $K\alpha x$ *sono tutti paralleli, rispettivamente, ad* $\boldsymbol{i}$ *e* $K\alpha \boldsymbol{i}$.

Dim. È noto [cfr. § 1, n. 2] che α è *degenere di 2ª specie* solamente quando $(\alpha y) \wedge \alpha z = R\alpha (y \wedge z) = 0$, che per l'arbitrarietà del vettore $y \wedge z$ dimostra appunto che deve essere $R\alpha = 0$.

Se la α, non nulla, è degenere della seconda specie, deve esistere un vettore unitario $\boldsymbol{i}$ tale che αx è parallelo ad $\boldsymbol{i}$ e quindi si deve avere [cfr. § 2, n. 1] $\alpha = H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i})$; ma allora

$$\boldsymbol{i} \times \alpha x = \boldsymbol{u} \times x, \text{ da cui } K\alpha \boldsymbol{i} \times x = \boldsymbol{u} \times x$$

che per l'arbitrarietà del vettore x dà $\boldsymbol{u} = K\alpha \boldsymbol{i}$. Valgono dunque le [4], ecc.

5. Ricerca delle direzioni unite di una omografia.

Essendo α una omografia, ci proponiamo di *trovare le direzioni unite (o doppie) di* α.

Si determini una radice reale t_0, sempre esistente, della equazione

$$I_3(\alpha - t) = 0, \tag{1'}$$

ovvero, il che equivale, della equazione,

$$t^3 - I_1\alpha \cdot t^2 + I_2\alpha \cdot t - I_3\alpha = 0. \tag{1}$$

L'omografia $\alpha - t_0$ è, per la [1'] degenere e quindi esiste almeno un vettore non nullo x tale che

[2] $$(\alpha - t_0)x = 0, \text{ cioè tale che } \alpha x = t_0 x$$

e quindi la direzione di x è *unita* per α.

Dunque la ricerca delle *direzioni unite* di α relative alla radice t_0 della [1], dipende dalla ricerca delle *direzioni nulle* della omografia $\alpha - t_0$, poichè queste *direzioni nulle* sono *unite* per α, e queste soltanto. Tale ricerca dipende dai due teoremi seguenti.

1°. *Se* $\mathrm{R}(\alpha - t_0) \neq 0$, *e quindi anche* $\mathrm{RK}(\alpha - t_0) \neq 0$, *allora, qualunque sia il vettore* u *non nullo e tale che* $\mathrm{RK}(\alpha - t_0)u \neq 0$, *la direzione di* $\mathrm{RK}(\alpha - t_0)u$ *sarà l'unica direzione unita di* α *relativa alla radice* t_0.

Dim. È noto [cfr. n. 1, [3]] che

$$(\alpha - t_0)\mathrm{RK}(\alpha - t_0) = \mathrm{I}_3(\alpha - t_0) = 0$$

e quindi posto $x = \mathrm{RK}(\alpha - t_0)u$, si ha, qualunque sia u,

$$(\alpha - t_0)x = 0, \text{ cioè } \alpha x = t_0 x.$$

Inoltre per u, v vettori si ha [cfr n. 3 [1]]

$$|\mathrm{RK}(\alpha - t_0)u| \wedge \mathrm{RK}(\alpha - t_0)v = \mathrm{I}_3(\alpha - t_0) \cdot (\alpha - t_0)(u \wedge v) = 0$$

e quindi x non cambia di direzione col cambiare di u.

2°. *Se* $\mathrm{R}(\alpha - t_0) = 0$, *e quindi anche* $\mathrm{RK}(\alpha - t_0) = 0$, *allora,* α *ammette, rispetto alla radice* t_0 *infinite direzioni unite che sono quelle normali al vettore, purchè non nullo,* $\mathrm{K}(\alpha - t_0) \cdot (\alpha - t_0)u$, *con* u *vettore arbitrario.*

Dim. Nell'ipotesi fatta, $\alpha - t_0$ è una diade [cfr. n. 4]. quindi tutti i vettori $(\alpha - t_0)u$, con u arbitrario, sono paralleli tra loro; ecc.

Esercizi

1. $\mathrm{R}(\alpha + m) = \mathrm{R}\alpha + m\mathrm{CK}\alpha + \mathrm{R}\alpha$
2. $\mathrm{R}(\alpha + \beta) = \mathrm{R}\alpha + \mathrm{R}\beta - \mathrm{K}(\alpha\cdot\mathrm{C}\beta + \beta\cdot\mathrm{C}\alpha) + \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{I}_1\beta - \mathrm{I}_1(\alpha\beta)$
3. $2\mathrm{R}\alpha = (\mathrm{CK}\alpha)^2 - \mathrm{CK}\alpha^2$
4. $\mathrm{RC}\alpha = \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha + \mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{K}\alpha^2$
5. $\mathrm{CR}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha - \mathrm{K}\alpha^2 = \mathrm{CK}\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha$
6. $\mathrm{I}_1\mathrm{CR}\alpha = 2\mathrm{I}_2\alpha, \quad \mathrm{I}_1\mathrm{RC}\alpha = \mathrm{I}_2\mathrm{C}\alpha$
7. $\mathrm{CRC}\alpha = (\mathrm{I}_1\alpha)^2 - \mathrm{K}\alpha^2, \quad \mathrm{RCR}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha\cdot\mathrm{RK}\alpha + \mathrm{I}_3\alpha\cdot\alpha$
8. $\mathrm{RCD}\alpha = (\mathrm{D}\alpha)^2 + \mathrm{I}_2\mathrm{D}\alpha$
9. $(P - O)\times\alpha(P - O) = 0$ è l'equazione, in P, di un *cono quadrico* che si spezza in due piani per $\mathrm{I}_3\mathrm{D}\alpha = 0$, piani distinti o coincidenti secondo che si ha $\mathrm{RD}\alpha \neq 0$, ovvero $\mathrm{RD}\alpha = 0$.
10. Se $\mathrm{I}_3\alpha = \mathrm{I}_2\alpha = 0$, allora $\mathrm{R}\alpha = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ con $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = 0$
11. Se $\mathrm{I}_3\mathrm{D}\alpha = \mathrm{I}_2\mathrm{D}\alpha = 0$ allora $\mathrm{RD}\alpha = 0$
12. $(\mathrm{R}\alpha\boldsymbol{a})\wedge = \alpha\cdot\boldsymbol{a}\wedge\mathrm{K}\alpha$
13. $\mathrm{R}'(\alpha, \beta)(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x})\wedge\beta\boldsymbol{y} + (\beta\boldsymbol{x})\wedge\alpha\boldsymbol{y}$;
    per $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vettori arbitrari; definizione di $\mathrm{R}'(\alpha, \beta)$ che risulta [cfr. Intr. II, n. 7, 3°] essere omografia funzione di α e β soltanto.
14. $\mathrm{R}'(\alpha,\beta) = \mathrm{R}'(\beta,\alpha), \quad \mathrm{R}'(\alpha,\alpha) = 2\mathrm{R}\alpha, \quad \mathrm{R}'(m\alpha,\beta) = \mathrm{R}'(\alpha, m\beta) = m\mathrm{R}'(\alpha,\beta)$
15. $\mathrm{R}'(\alpha, m) = m\mathrm{CK}\alpha, \quad \mathrm{R}'(m, n) = 2mn$
16. $\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = \mathrm{R}(\alpha + \beta) - \mathrm{R}\alpha - \mathrm{R}\beta =$
    $= \mathrm{I}_2(\alpha + \beta) - \mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_2\beta - \mathrm{K}(\alpha\cdot\mathrm{C}\beta + \beta\cdot\mathrm{C}\alpha) =$
    $= \mathrm{CK}\beta\cdot\mathrm{CK}\alpha - \mathrm{CK}(\beta\alpha)$
17. $\mathrm{R}'(\alpha + \beta, \gamma) = \mathrm{R}'(\alpha, \gamma) + \mathrm{R}'(\beta, \gamma)$
18. $\mathrm{I}_1\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = \mathrm{I}_2(\alpha + \beta) - \mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_2\beta = \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{I}_1\beta - \mathrm{I}_1(\alpha\beta)$
19. $\mathrm{KR}'(\alpha, \beta) = \mathrm{R}'(\mathrm{K}\alpha, \mathrm{K}\beta)$
20. $\mathrm{VR}'(\alpha, \beta) = \beta\mathrm{V}\alpha + \alpha\mathrm{V}\beta$
21. $\mathrm{CR}'(\alpha, \beta) = \mathrm{K}(\alpha\cdot\mathrm{C}\beta + \beta\cdot\mathrm{C}\alpha) = \mathrm{K}(\mathrm{C}\alpha\cdot\beta + \mathrm{C}\beta\cdot\alpha)$
22. $\mathrm{R}'(\alpha, \boldsymbol{v}\wedge) = 2\mathrm{H}(\mathrm{V}\alpha, \boldsymbol{v}) + (\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{v})\wedge, \quad \mathrm{R}'(\boldsymbol{u}\wedge, \boldsymbol{v}\wedge) = 2\mathrm{DH}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
23. $\mathrm{R}'\{\alpha, \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = -\boldsymbol{v}\wedge\cdot\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge$
24. $\mathrm{R}'\{\mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{v})$
25. $\mathrm{R}'(\alpha\beta, \alpha\gamma) = \mathrm{R}\alpha\cdot\mathrm{R}'(\beta, \gamma), \mathrm{R}'(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \mathrm{R}'(\alpha, \beta)\cdot\mathrm{R}\gamma$
26. L'equazione rispetto alla omografia ξ, essendo α omografia nota

$$\mathrm{R}\xi = \alpha$$

ammette soluzioni soltanto nei due casi seguenti:

1° $I_3\alpha > 0$ e allora $\xi = \pm R\alpha/\sqrt{I_3\alpha}$;
2° $I_3\alpha = 0, R\alpha = 0$, cioè α è della forma $H(u, v)$ e si ha

$$\xi = H(u_1, v_1) + H(u_2, v_2) \text{ con } u_1 \wedge u_2 = u \text{ e } v_1 \wedge v_2 = v.$$

27. $R'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = R\alpha^{-1} \cdot R'(\alpha, \beta) \cdot R\beta^{-1}$
28. $R'(\alpha, \beta) u = 2V(\alpha \cdot u \wedge \cdot K\beta)$
29. $R'(u \wedge \alpha, v \wedge \beta) = \alpha \cdot \{K\beta(u \wedge v)\} \wedge + H(v, u) \cdot R'(\alpha, \beta) =$
$= -\beta \cdot \{K\alpha(u \wedge v)\} \wedge + H(u, v) \cdot R'(\alpha, \beta) =$
$= \frac{1}{2}[\alpha \cdot \{K\beta(u \wedge v)\} \wedge - \beta \cdot \{K\alpha(u \wedge v)\} \wedge + 2DH(u, v) \cdot R'(\alpha, \beta)]$
30. $I_3(\alpha\beta) \cdot R'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = K\alpha \cdot R'(\alpha, \beta) \cdot K\beta$ [cfr. (18)]
31. $\begin{cases} I_3\alpha \cdot R'(\alpha, \beta) = C(R\alpha \cdot K\beta) \cdot R\alpha = R\alpha \cdot C\beta(K \cdot R\alpha) \\ I_3\beta \cdot R'(\alpha, \beta) = C(R\beta \cdot K\alpha) \cdot R\beta = R\beta \cdot C(K\alpha \cdot R\beta) \end{cases}$
32. $I_1 R'(R\alpha, R\beta) = I_1(R\beta \cdot CR\alpha) = I_2\alpha \cdot I_2\beta - I_2(\alpha\beta)$
33. $I_2 R'(\alpha, \beta) = I_1\alpha \cdot I_1(K\alpha \cdot R\beta) + I_1(\beta \cdot RK\alpha \cdot \beta)$
34. $I_3 R'(\alpha, \beta) = I_1(K\alpha \cdot R\beta) \cdot I_1(K\beta \cdot R\alpha) - I_3(\alpha\beta)$
35. $RR'(\alpha, \beta) = RC(K\beta \cdot R\alpha) = RC(R\alpha \cdot K\beta) = RC(K\alpha \cdot R\beta) =$
$= RC(R\beta \cdot K\alpha) = R^2(\alpha + \beta) + R^2\alpha + R^2\beta -$
$- R'\{R(\alpha + \beta), R\alpha + R\beta\} + R'(R\alpha, R\beta)$
36. $I_1(R\alpha, K\beta) = R'(\alpha, \beta) \cdot K\alpha + R\alpha \cdot K\beta = K\alpha \cdot R'(\alpha, \beta) + K\beta \cdot R\alpha$
37. $I_1\{K\alpha \cdot R'(\alpha, \beta)\} = 2I_1(R\alpha \cdot K\beta)$
38. $\begin{cases} I_3\alpha \cdot RR'(\alpha, \beta) = RC(R\alpha \cdot K\beta) \cdot \alpha = \alpha \cdot RC(K\beta \cdot R\alpha) \\ I_3\beta \cdot RR'(\alpha, \beta) = RC(R\beta \cdot K\alpha) \cdot \beta = \beta \cdot RC(K\alpha \cdot R\beta) \end{cases}$
39. $R'(R\alpha, R\beta) = \beta \cdot KR'(\alpha, \beta)\alpha = \alpha \cdot KR'(\alpha, \beta) \cdot \beta =$
$= C(\alpha \cdot RK\beta) \cdot \alpha = C(\beta \cdot RK\alpha) \cdot \beta$ (1)

---

(1) Per le formule di questi esercizi e per quelli del § 4 cfr. i seguenti lavori di A. Pensa.

Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omografiche. (Atti Acc., Torino, vol. 49, 1914);

Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici C. R. (Idem., vol. LIII, 1917:

Sull' operatore omografico R' (Idem).

§ 4. Prodotti e potenze di omografie.

In tutto questo §, e senza bisogno di ripeterlo ogni volta, indichiamo con α, β, ... delle *omografie*, con m, n, ... dei *numeri reali relativi*, con a, b, ..., u, v, ... dei vettori.

1. Prodotti nei quali almeno un fattore è una diade. Per i due prodotti delle omografie α, $\mathrm{H}(u, v)$ si ha

[1] $$\alpha \cdot \mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(u, \alpha v)$$

[2] $$\mathrm{H}(u, v) \cdot \alpha = \mathrm{H}(\mathrm{K}\alpha u, v)$$

e risulta che: *se in un prodotto funzionale di omografie, uno almeno dei fattori è una diade il prodotto è pure una diade.*

Dim. Per x vettore arbitrario si ha:

$$\alpha \cdot \mathrm{H}(u, v)x = \alpha(u \times x \cdot v) = u \times x \cdot \alpha v = \mathrm{H}(u, \alpha v)x;$$

$$\mathrm{H}(u, v)\alpha x = u \times \alpha x \cdot v = x \times \mathrm{K}\alpha u \cdot v = \mathrm{H}(\mathrm{K}\alpha u, v)x; \quad \text{c. d. d.}$$

Per il prodotto di due diadi si ha:

[3] $$\mathrm{H}(u, v) \cdot \mathrm{H}(a, b) = u \times b \cdot \mathrm{H}(a, v)$$

e quindi i due prodotti delle diadi $\mathrm{H}(u, v)$, $\mathrm{H}(a, b)$ sono, in generale, distinti.

Dim. Dalla [2] per $\alpha = \mathrm{H}(a, b)$ si ha;

$$\mathrm{H}(u, v) \cdot \mathrm{H}(a, b) = \mathrm{H}\,\{\mathrm{H}(b, a)u, v\} = \mathrm{H}\,\{b \times u \cdot a, v\} = u \times b \cdot \mathrm{H}(a, v).$$

Oppure con calcolo diretto:

$$\mathrm{H}(u, v) \cdot \mathrm{H}(a, b)x = a \times x \cdot \mathrm{H}(u, v)b = u \times b \cdot a \times x \cdot v = u \times b \cdot \mathrm{H}(a, v)x.$$

In particolare per le potenze di $\mathrm{H}(u, v)$ si ha:

[4] $$\begin{cases} \{\mathrm{H}(u, v)\}^2 = u \times v \cdot \mathrm{H}(u, v) \\ \{\mathrm{H}(u, v)\}^n = (u \times v)^{n-1} \cdot \mathrm{H}(u, v), \text{ \textit{per} } n \text{ \textit{intero positivo non nullo},} \end{cases}$$

cioè: *la potenza di una diade è un multiplo della stessa diade.*

Dim. La 1ª delle [4] si ottiene subito dalla [3] per $a = u$ e $b = v$. La 2ª ammessa vera per $n \gtreqless 1$ risulta, per la 1ª, vera per $n + 1$; e perchè è vera per $n = 1$ [identità $\mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(u, v)$] essa, per induzione, è vera per n intero positivo non nullo.

Abbiamo già osservato [cfr. [1] e [2]] che se nel prodotto $\alpha\beta\gamma\ldots$ uno dei fattori, almeno, è una diade, il prodotto stesso è una diade. Trovata la diade identica ad $\alpha\beta\gamma\ldots$, di tale prodotto risultano facilmente determinati gli enti che si ottengono applicando ad esso gli operatori I, K, D, V (cfr. § 2, n. 1).

2. Prodotti nei quali almeno un fattore è una assiale. Nelle applicazioni fisico-geometriche-meccaniche delle omografie, si ha spesso da considerare il prodotto di una omografia α per una assiale $u\wedge$. Tale prodotto può essere indicato brevemente, e senza pericolo di equivoci, con la notazione

$$[0] \qquad u\wedge\alpha$$

al posto di $(u\wedge)\alpha$, ovvero di $u\wedge\cdot\alpha$.

Invece il prodotto di $u\wedge$ per α va indicato con la notazione completa

$$[0'] \qquad \alpha(u\wedge), \text{ ovvero, } \alpha\cdot u\wedge$$

poichè scrivendo semplicemente $\alpha u\wedge$ si potrebbe leggere $(\alpha u)\wedge$ che ha un significato ben diverso da quello indicato da [0'].

Applicando gli operatori I, K, V, R alla omografia $u\wedge\alpha$, prodotti di α per l'assiale $u\wedge$ si hanno le formule seguenti che sono assai importanti.

[1] $\mathrm{I}_1(u\wedge\alpha) = -2u\times\mathrm{V}\alpha,\ \mathrm{I}_2(u\wedge\alpha) = u\times\mathrm{R}\alpha u,\ \mathrm{I}_3(u\wedge\alpha) = 0$

[2] $\mathrm{K}(u\wedge\alpha) = -\mathrm{K}\alpha\cdot u\wedge$

[3] $2\mathrm{V}(u\wedge\alpha) = (\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)u$

[4] $\mathrm{R}(u\wedge\alpha) = \mathrm{H}(u, u)\mathrm{R}\alpha = \mathrm{H}(\mathrm{KR}\alpha u, u)$.

Dim. [4]. Si ha [cfr. § 3, n. 1, [7]; § 4, n. 1, [2]]
$\mathrm{R}(u\wedge\alpha) = \mathrm{R}(u\wedge)\cdot\mathrm{R}\alpha = \mathrm{H}(u, u)\cdot\mathrm{R}\alpha = \mathrm{H}(\mathrm{KR}\alpha u, u)$; c. d. d.

Oppure si può operare così:

$$\mathbf{R}(u\wedge\alpha)(x\wedge y)=(u\wedge\alpha x)\wedge(u\wedge\alpha y)=u\times(\alpha x)\wedge\alpha y\cdot u=$$
$$=u\times\mathbf{R}\alpha(x\wedge y)\cdot u=x\wedge y\times\mathbf{K}\mathbf{R}\alpha u\cdot u=\mathbf{H}(\mathbf{K}\mathbf{R}\alpha u,u)(x\wedge y).$$

Dim. [1]. Per le note espressioni di I_1 e V mediante la terna unitaria ortogonale i, j, k si ha [cfr. § 1; n. 4, [2]; n. 9, [7]]

$$\mathrm{I}_1(u\wedge\alpha)=i\times u\wedge\alpha i+\ldots+\ldots=-u\times(i\wedge\alpha i+\ldots+\ldots)=-2u\times\mathrm{V}\alpha$$

che dimostra la 1ª delle [1].

La 2ª forma [4], già dimostrata, dà [cfr. § 3, n. 3, [2]]

$$\mathrm{I}_2(u\wedge\alpha)=\mathrm{I}_1\mathbf{R}(u\wedge\alpha)=\mathrm{I}_1\mathbf{H}(\mathbf{K}\mathbf{R}\alpha u,u)=u\times\mathbf{K}\mathbf{R}\alpha u=u\times\mathbf{R}\alpha u$$

che dimostra la 2ª delle [1].

La 3ª delle [1] risulta subito osservando che $u\wedge\alpha$ è omografia degenere perchè trasforma ogni vettore in un vettore normale ad u; oppure

$$\mathrm{I}_3(u\wedge\alpha)=\mathrm{I}_3(u\wedge)\cdot\mathrm{I}_3\alpha=0\cdot\mathrm{I}_3\alpha=0.$$

Dim. [2]. $\mathbf{K}(u\wedge)\alpha=\mathbf{K}\alpha\cdot\mathbf{K}(u\wedge)=\mathbf{K}\alpha(-u\wedge)=-\mathbf{K}\alpha\cdot u\wedge.$

Dim. [3]. $2\mathrm{V}(u\wedge\alpha)\times x\wedge y=y\times u\wedge\alpha x-x\times u\wedge\alpha y=$
$=x\wedge\alpha y-u\times(y\wedge\alpha x)=u\times\{\mathrm{I}_1\alpha\cdot x\wedge y-\mathbf{K}\alpha(x\wedge y)\}=$
$=(\mathrm{I}_1\alpha\cdot u-\alpha u)\times x\wedge y=(\mathrm{I}_1\alpha-\alpha)u\times x\wedge y$
[cfr. § 1, n. 9, [1]; § 1, n. 7, [9]].

Si osservi che la [2] prova che l'operatore $\mathbf{K}$ cambia la forma [0] nella [0'], e anche viceversa poiche $\mathbf{K}^2$ è l'identità, quindi bastano le [1]-[4] tanto per la forma [0] come per la [0'].

In particolare per i prodotti di una *diade* per una *assiale* si ha subito dalle [1], [2] del n. 1

[5] $u\wedge\mathbf{H}(a,b)=\mathbf{H}(a,u\wedge b),\ \mathbf{H}(a,b)\cdot u\wedge=-\mathbf{H}(u\wedge a,b).$

Per il prodotto di due assiali si ha:

[6] $$v\wedge\cdot u\wedge=\mathbf{H}(v,u)-v\times u.$$

Dim. $(v\wedge\cdot u\wedge)x=v\wedge(u\wedge x)=v\times x\cdot u-v\times u\cdot x=$
$=\{\mathbf{H}(v,u)-v\times u\}x$; c. d. d.

Mediante le [5], [6] si esprime con *numeri* (omotetie) e *diadi* il prodotto di 3, 4,... assiali; ma è inutile scrivere tali formule.

Per le potenze di una assiale si ha:

$$[7] \quad \begin{cases} (u\wedge)^2 = \mathrm{H}(u, u) - u^2 \\ (u\wedge)^3 = -u^2 \cdot u\wedge \\ (u\wedge)^4 = -u^2 \cdot (u\wedge)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (u\wedge)^n = -u^2 \cdot (u\wedge)^{n-2} \ \textit{per } n \textit{ intero non minore di } 3. \end{cases}$$

Dim. La 1ª delle [7] è conseguenza immediata della [6]. Operando nella 1ª con $u\wedge$, a sinistra o a destra, si ha, per le [5] la 2ª; e così di seguito.

3. Prodotti con fattori che sono omotetie o dilatazioni.

Vi è appena bisogno di osservare che:

Il prodotto di 2, 3,... omotetie vettoriali (numeri) è pure una omotetia (numero) e tale prodotto, oltre che associativo è anche commutativo.

In un prodotto contenente 1, 2, 3,... fattori che sono omotetie, questi fattori possono esser riuniti, indipendentemente dall'ordine, in un solo fattore omotetia; cioè

$$\alpha m\beta \ldots n\gamma = (mn)\alpha\beta \ldots \gamma = \alpha\beta \,..\, \gamma(mn) = ecc.$$

In particolare $m\alpha = \alpha m$.

Il prodotto di una **diade**, o assiale, o **dilatazione**, *per una* **omotetia** (*numero*) (*o viceversa*) *è pure una* **diade, assiale, dilatazione** [cfr. § 2; n. 1, [4]; n. [2]; n. 4, [1]], *e se h è il numero che individua l'omotetia* $h\odot$ *si ha precisamente*

$$h\mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(hu, v) = \mathrm{H}(u, hv), \quad h(u\wedge) = (hu)\wedge,$$
$$h\begin{pmatrix} mi, & nj, & pk \\ i, & j, & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hmi, & hnj, & hpk \\ i, & j, & k \end{pmatrix},$$

vale a dire l'assiale non cambia di asse e la dilatazione non cambia le direzioni unite.

Per i prodotti di *dilatazioni* si hanno le proprietà seguenti.

Un prodotto di due (o più) **dilatazioni** *può* **non** *essere una dilatazione.*

Dim. Se α, β sono dilatazioni è noto [cfr. § 2, n. 4] che *deve* essere $K\alpha = \alpha$, $K\beta = \beta$; allora, siccome $K(\beta\alpha) = K\alpha \cdot K\beta = \alpha\beta$, affinchè $\beta\alpha$ sia una dilatazione deve essere $K(\beta\alpha) = \beta\alpha$, cioè $\beta\alpha = \alpha\beta$ il che può non essere. Ad es., se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori non paralleli, $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \neq 0$, e non ortogonali, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq 0$ allora $H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, $H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ sono dilatazioni, ma [cfr. n. 1, [3]]

$$H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \cdot H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \cdot H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

non è dilatazione poichè $KH(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \neq H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Se due (o più) dilatazioni hanno a comune le direzioni unite, allora i loro prodotti, in ordine qualunque, sono tutti uguali fra loro, e sono dilatazioni aventi le stesse direzioni unite dei fattori. Precisamente se

$$\alpha = \begin{pmatrix} m\boldsymbol{i}, & n\boldsymbol{j}, & p\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} m'\boldsymbol{i}, & n'\boldsymbol{j}, & p'\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix},$$

si ha:

$$\beta\alpha = \alpha\beta = \begin{pmatrix} mm'\boldsymbol{i}, & nn'\boldsymbol{j}, & pp'\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

Dim. Da $\alpha\boldsymbol{i} = m\boldsymbol{i}$, $\beta\boldsymbol{i} = m'\boldsymbol{i}$ si trova subito

$$\beta\alpha\boldsymbol{i} = m\beta\boldsymbol{i} = mm'\boldsymbol{i}, \quad \alpha\beta\boldsymbol{i} = m'\alpha\boldsymbol{i} = m'm\boldsymbol{i}, \text{ ecc.; c. d. d.}$$

Qualsiasi potenza di una dilatazione è pure una dilatazione che ha a comune con la data le direzioni unite. Precisamente: se

$$\alpha = \begin{pmatrix} m\boldsymbol{i}, & n\boldsymbol{j}, & p\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

e h è un intero, anche negativo per α invertibile, allora

$$\alpha^h = \begin{pmatrix} m^h\boldsymbol{i}, & n^h\boldsymbol{j}, & p^h\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

Dim. Per h positivo risulta subito dal teorema precedente. Per h negativo, e α invertibile, basta osservare che da $\alpha i = mi$ segue subito $i = \alpha^{-1}(mi) = m\alpha^{-1}i$, cioè $\alpha^{-1} i = m^{-1} i$; ecc.

Nelle ipotesi fatte vale quindi per le dilatazioni $\alpha, \beta, \ldots$ l'ordinario algoritmo algebrico. Ad es., se per l'intero r hanno significato *unico* le espressioni $\sqrt[r]{m}$, $\sqrt[r]{n}$, $\sqrt[r]{p}$, allora si può definire come *radice r-esima* di α, $\sqrt[r]{\alpha}$, $\alpha^{1/r}$ la dilatazione la cui potenza r-esima vale α, e si ha

$$\sqrt[r]{\alpha} = \begin{pmatrix} \sqrt[r]{m}\cdot i, & \sqrt[r]{n}\cdot j, & \sqrt[r]{p}\cdot k \\ i, & j, & k \end{pmatrix}.$$

4. Prodotti nulli.

Per i prodotti nulli abbiamo le notevoli proprietà seguenti.

1° *Affinchè il prodotto* $\alpha\beta$ *sia nullo*, $\alpha\beta = 0$, *è* **necessario,** *ma in generale,* **non sufficiente,** *che una almeno delle omografie* α, β *sia degenere.*

Dim. Da $\alpha\beta = 0$ segue $I_3(\alpha\beta) = I_3\alpha \cdot I_3\beta = 0$, per il che è *necessario* che sia $I_3\alpha = 0$, ovvero $I_3\beta = 0$, cioè che α ovvero β sia degenere. Ma *non viceversa,* poichè da $I_3(\alpha\beta) = 0$ non può seguire necessariamente $\alpha\beta = 0$, come risulta dal seguente esempio:

$$(a) \qquad H(u, v) \cdot H(a, b) = u \times b \cdot H(a, v)$$

prodotto che è diverso da zero quando $u \times b \neq 0$ e a, v non sono nulli, pur essendo degeneri le due diadi fattori del prodotto.

2° *Se un fattore di un prodotto è nullo il prodotto è pure nullo, ma non viceversa.* Vale a dire: *da* $\alpha\beta = 0$ **non** *segue necessariamente* $\alpha = 0$ *ovvero* $\beta = 0$, *e in particolare da* $\alpha^2 = 0$ **non** *segue necessariamente* $\alpha = 0$.

Dim. La prima parte del teorema è evidente poichè

$$0\alpha x = 0(\alpha x) = 0.$$

La seconda parte è dimostrata dall'esempio (a) precedente nel caso $u \times b = 0$ con u, v, a, b non nulli.

3° *Da* $\beta\alpha = 0$ **non** *segue necessariamente* $\alpha\beta = 0$.

Per $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vettori non nulli, si ha analogamente ad (a),

$$(b) \qquad \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b});$$

ora il prodotto (a) *è nullo* per $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b} = 0$ e il prodotto (b) *non è nullo* per $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} \neq 0$.

4° *Se il numero reale* m *non è nullo, allora da* $\beta\alpha = m$ *segue* $\alpha\beta = m$ *cioè si ha* $\beta\alpha = \alpha\beta$.

Dim. Da $\beta\alpha = m$ segue $\mathrm{I}_3(\beta\alpha) = \mathrm{I}_3\beta \cdot \mathrm{I}_3\alpha = m^3 \neq 0$ e quindi $\mathrm{I}_3\beta \neq 0$ e $\mathrm{I}_3\alpha \neq 0$, cioè α e β sono omografie proprie. Allora operando in $\beta\alpha = m$ con β^{-1} a sinistra si ha $\alpha = m\beta^{-1}$, ed operando in questa con β a destra si ha $\alpha\beta = m$; c. d. d.

5. *Se un prodotto di due omografie è nullo e una di esse è omografia propria, allora l'altra è nulla.*

Dim. Sia α propria e $\beta\alpha = 0$; operando nei dne membri con α^{-1} a destra si ha $\beta = 0 \cdot \alpha^{-1} = 0$; c. d. d.

6° *Dalla condizione* $\alpha\gamma = \beta\gamma$, *ovvero* $\gamma\alpha = \gamma\beta$, **non** *segue necessariamente* $\alpha = \beta$; *ma segue sempre* $\alpha = \beta$ *purchè* γ *sia omografia propria.*

Dim. La condizione $\alpha\gamma = \beta\gamma$ equivale ad $(\alpha - \beta)\gamma = 0$ che *non* dà necessariamente $\alpha - \beta = 0$, cioè $\alpha = \beta$. Ma se γ è propria, allora operando con γ^{-1} a destra nella condizione $\alpha\gamma = \beta\gamma$ si ha appunto $\alpha = \beta$. Lo stesso per la condizione $\gamma\alpha = \gamma\beta$.

5. Operatori I, V applicati a prodotti e potenze.

Alcune delle formule seguenti sono già state date nelle parti che precedono; noi le riportiamo, insieme alle nuove, per comodo del lettore.

$$[1] \qquad \mathrm{I}_r(\beta\alpha) = \mathrm{I}_r(\alpha\beta) \qquad [\text{cfr. § 1, n. 6, [4]}]$$

$$[2] \quad \begin{cases} \mathrm{I}_1(\beta\alpha) = \mathrm{I}_1\alpha \cdot \mathrm{I}_1\beta + \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_2\beta - \mathrm{I}_2(\alpha + \beta) \\ \mathrm{I}_2(\beta\alpha) = \mathrm{I}_2\alpha \cdot \mathrm{I}_2\beta + \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{I}_1\alpha + \mathrm{I}_3\beta \cdot \mathrm{I}_1\beta - \mathrm{I}_2(\mathrm{R}\alpha + \mathrm{R}\beta) \\ \mathrm{I}_3(\beta\alpha) = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{I}_3\beta \qquad [\text{cfr. § 1, n. 4, [8]}] \end{cases}$$

$$[3] \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\mathrm{V}(\beta\alpha) = 2\mathrm{V}(\mathrm{D}\beta \cdot \mathrm{D}\alpha) + (\mathrm{I}_1\beta - \beta)\mathrm{V}\alpha + (\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\mathrm{V}\beta + (\mathrm{V}\beta)\wedge\mathrm{V}\alpha = \\ & \qquad = (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{i})\wedge\beta\boldsymbol{i} + (\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{j})\wedge\beta\boldsymbol{j} + (\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{k})\wedge\beta\boldsymbol{k} \\ & \qquad \textit{con } \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \textit{ terna unitaria-ortogonale} \end{aligned} \right.$$

$$[4] \qquad \mathrm{V}\alpha^2 = (\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\wedge\mathrm{V}\alpha$$

$$[5] \qquad \mathrm{I}_1\alpha^{-1} = \frac{\mathrm{I}_2\alpha}{\mathrm{I}_3\alpha}, \quad \mathrm{I}_2\alpha^{-1} = \frac{\mathrm{I}_1\alpha}{\mathrm{I}_3\alpha}, \quad \mathrm{I}_3\alpha^{-1} = \frac{1}{\mathrm{I}_3\alpha}, \ \alpha \textit{ propria} \ [\text{cfr. § 1, n. 6, [5]}]$$

$$[6] \qquad \mathrm{V}\alpha^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{I}_3\alpha}\alpha\mathrm{V}\alpha, \ \alpha \textit{ propria.}$$

$$[7] \qquad \mathrm{V}(\alpha\cdot\beta\cdot\mathrm{K}\alpha) = \mathrm{R}\alpha\mathrm{V}\beta$$

$$[8] \qquad \mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha\cdot\beta) = \alpha\mathrm{V}(\beta\alpha)$$

$$[9] \qquad \mathrm{V}(\alpha\cdot\mathrm{R}\beta) = \mathrm{K}\beta\mathrm{V}(\beta\alpha).$$

Dim. [2]. Sviluppando $\mathrm{I}_2(\alpha+\beta) = \boldsymbol{i}\times(\alpha+\beta)\boldsymbol{j}\wedge(\alpha+\beta)\boldsymbol{k}+\ldots+\ldots$ si ha la 1ª delle [2]. La 2ª si ottiene dalla 1ª osservando che si ha $\mathrm{I}_2(\beta\alpha) = \mathrm{I}_1\mathrm{R}(\beta\alpha) = \mathrm{I}_1(\mathrm{R}\beta\cdot\mathrm{R}\alpha)$ ecc. Queste due formule sono di poca importanza, mentre è utilissima la 3ª delle [2].

Dim. [3]. Posto, per abbreviare la scrittura:

$$\alpha' = \mathrm{D}\alpha, \ \boldsymbol{u} = \mathrm{V}\alpha, \quad \beta' = \mathrm{D}\beta, \ \boldsymbol{v} = \mathrm{V}\beta$$

si ha per formule già note

$$\begin{aligned} \beta\alpha &= (\beta' + \boldsymbol{v}\wedge)(\alpha' + \boldsymbol{u}\wedge) = \beta'\alpha' + \beta'\cdot\boldsymbol{u}\wedge + \boldsymbol{v}\wedge\cdot\alpha' + \boldsymbol{v}\wedge\cdot\boldsymbol{u}\wedge = \\ &= \beta'\alpha' - \mathrm{K}(\boldsymbol{u}\wedge\beta') + \boldsymbol{v}\wedge\alpha' + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}; \end{aligned}$$

applicando 2V ai due membri si ha la 1ª forma [3].

Dalla 1ª delle [1] del n. 2 si ha:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{V}(\beta\alpha)\times\boldsymbol{x} &= -\mathrm{I}_1(\boldsymbol{x}\wedge\beta\alpha) = -\mathrm{I}_1(\alpha\cdot\boldsymbol{x}\wedge\beta) = \\ &= -\boldsymbol{i}\times(\alpha\cdot\boldsymbol{x}\wedge\beta\boldsymbol{i}) - \ldots = \{(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{i})\wedge\beta\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots\}\times\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

che dimostra la 2ª forma della [3].

Dim. [4]. Risulta subito da [3] per $\beta = \alpha$.

Dim. [6]. Risulta da $\alpha\mathrm{V}\alpha = \mathrm{V}\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha\cdot\mathrm{V}\mathrm{R}\alpha^{-1} = -\mathrm{I}_3\alpha\cdot\mathrm{V}\alpha^{-1}$.

Dim. [7]. Per $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vettori arbitrari si ha:

$$\begin{aligned} & 2\mathrm{V}(\alpha\cdot\beta\cdot\mathrm{K}\alpha)\times\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\times\alpha\beta\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\times\alpha\beta\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{y} = \\ &= \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{y}\times\beta\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{x} - \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{x}\times\beta\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{y} = 2\mathrm{V}\beta\times(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{y} = \\ &= 2\mathrm{V}\beta\times\mathrm{K}\mathrm{R}\alpha(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = 2(\mathrm{R}\alpha\mathrm{V}\beta)\times\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}, \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

Dim. [8]. Se nella [7] si pone $R\alpha\cdot\beta$ al posto di β e si pone $K\alpha$ al posto di α si ha:

$$V(K\alpha\cdot R\alpha\cdot\beta\cdot\alpha) = RK\alpha V(R\alpha\cdot\beta),\quad I_3\alpha\cdot V(\beta\alpha) = RK\alpha V(R\alpha\cdot\beta);$$

operando con α nei due membri

$$I_3\alpha\cdot\alpha V(\beta\alpha) = I_3\alpha\cdot V(R\alpha\cdot\beta)$$

che, per $I_3\alpha \neq 0$, dimostra la [8], e la dimostra pure, a causa del principio di continuità, anche per $I_3\alpha = 0$.

Dim. [9]. Dalla [8] e ricordando che $VK\alpha = -V\alpha$ si ha:

$$V(\alpha\cdot R\beta) = -V(RK\beta\cdot K\alpha) = -K\beta V(K\alpha\cdot K\beta) = K\beta V(\beta\alpha),\quad \text{c. d. d.}$$

Esercizi

1. $\begin{cases} I_2(\alpha+\beta) = I_2\alpha\, I_2\beta + I_1\alpha\cdot I_1\beta - I_1(\alpha\beta) \\ I_2(\alpha+m) = I_2\alpha + 2I_1\alpha\cdot m + 3m^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} I_3(\alpha+\beta) = I_3\alpha + I_3\beta + I_1(K\alpha\cdot R\beta + K\beta\cdot R\alpha) \\ I_3(\alpha+m) = I_3\alpha + I_2\alpha\cdot m + I_1\alpha\cdot m^2 + m^3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} I_1(\alpha + u\wedge\beta) = I_1\alpha - 2u\times V\beta \\ I_2(\alpha + u\wedge\beta) = I_2\alpha + u\times \{R\beta u - 2\alpha V\beta - 2V(K\alpha\cdot\beta)\} \\ I_3(\alpha + u\wedge\beta) = I_3\alpha + u\times\{\alpha\cdot RK\beta u + 2V(R\alpha\cdot K\beta)\} \\ R(\alpha + u\wedge\beta) = R\alpha + \beta\cdot(K\alpha u)\wedge + H\{2V(K\beta\cdot\alpha) + RK\beta u, u\} \end{cases}$

4. $\begin{cases} I_1\{\alpha + H(u,v)\} = I_1\alpha + u\times v \\ I_2\{\alpha + H(u,v)\} = I_2\alpha + u\times C\alpha v \\ I_3\{\alpha + H(u,v)\} = I_3\alpha + v\times R\alpha u \\ R\{\alpha + H(u,v)\} = R\alpha - v\wedge\cdot\alpha\cdot u\wedge \end{cases}$

5. $I_1(\alpha\cdot C\alpha) = 2I_2\alpha,\quad I_1(\alpha\cdot D\alpha) = I_1(D\alpha)^2$

6. $2I_1(\alpha\beta) = (I_1\alpha + I_1\beta)^2 - I_1(\alpha^2+\beta^2)$

7. $V(\alpha\cdot\beta\cdot K\alpha^n) = R\alpha\cdot V(\beta\cdot K\alpha^{n-1})$, per n intero positivo

8. $V(\alpha\beta\alpha) = R\alpha V\beta + \beta\, CK(\alpha\beta)V\alpha$

9. $V\alpha^{2n} = [\Sigma_{r\,1}^{n} R\alpha^{n-r}\cdot CK\alpha^{2r-1}]V\alpha$

10. $V\alpha^{2n+1} = [\Sigma_{r\,0}^{n} R\alpha^{n-r}\cdot CK\alpha^{2r}]V\alpha$

11. $\alpha V(\beta\alpha) = V(R\alpha\cdot\beta)$ [cfr. la [8] del testo]

12. $\alpha V(\beta\cdot K\alpha) = V(R\alpha\cdot\beta) - \alpha\cdot(CK\beta)V\alpha$

13. $K\beta V(\beta\alpha) = V(\alpha\cdot R\beta)$ [cfr. la [9] del testo]

14. $\beta V(K\beta\cdot\alpha) = V(\alpha\cdot R\beta) - (C\alpha)\beta V\beta$

14'. $V(\alpha \cdot \beta \cdot RK\alpha) = \alpha V(K\alpha \cdot \alpha \cdot \beta)$
15. $\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge = \boldsymbol{u} \wedge CK\alpha - (K\alpha \boldsymbol{u}) \wedge$
16. $\boldsymbol{u} \wedge \alpha = CK\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge - (\alpha \boldsymbol{u}) \wedge$
17. $C\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge = \boldsymbol{u} \wedge K\alpha + (K\alpha \boldsymbol{u}) \wedge$
18. $\boldsymbol{u} \wedge C\alpha = K\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge + (\alpha \boldsymbol{u}) \wedge$
19. $R\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge = (\alpha \boldsymbol{u}) \wedge \cdot \alpha$
20. $\boldsymbol{u} \wedge R\alpha = \alpha \cdot (K\alpha \boldsymbol{u}) \wedge$
21. $\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge \beta = \boldsymbol{u} \wedge CK\alpha \cdot \beta - (K\alpha \boldsymbol{u}) \wedge \beta = \alpha \cdot CK\beta \cdot \boldsymbol{u} \wedge - \alpha \cdot (\beta \boldsymbol{u}) \wedge$
22. $R\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge \beta = (\alpha \boldsymbol{u}) \wedge \alpha\beta$
23. $I_1(\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge \beta) = -2\boldsymbol{u} \times V(\beta\alpha) = -2\boldsymbol{u} \times \{(C\alpha)V\beta - V(K\alpha \cdot \beta)\}$
24. $I_2(\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge \beta) = \boldsymbol{u} \times R(\beta\alpha)\boldsymbol{u}$
25. $R(\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge \beta) = R\alpha \cdot H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \cdot R\beta$
26. $2V(\alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge \beta) = \{C\beta \cdot CK\alpha - C(K\alpha \cdot \beta)\}\boldsymbol{u}$
27. $\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge = - CH(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot CK\alpha + CH(\boldsymbol{u}, K\alpha \boldsymbol{v}) = - R' \{\alpha, H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\}$
28. $I_1(\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge) = -\boldsymbol{v} \times C\alpha \boldsymbol{u}$
29. $I_2(\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \times R\alpha \boldsymbol{v}$
30. $2V(\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge) = \alpha(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) - 2H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})V\alpha =$
$= K\alpha(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) - 2H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})V\alpha$
31. $R(\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge) = \boldsymbol{u} \times R\alpha \boldsymbol{v} \cdot H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$
32. $V(\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge - \boldsymbol{v} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge) = D\alpha(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$
33. $I_3(\boldsymbol{u} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{v} \wedge - \boldsymbol{v} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{u} \wedge) = 2\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times K\alpha(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \alpha V\alpha$
34. $\boldsymbol{i} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{i} \wedge + \boldsymbol{j} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{j} \wedge + \boldsymbol{k} \wedge \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{k} \wedge = - CK\alpha$
35. $2V(\beta\alpha) = (K\alpha \boldsymbol{i}) \wedge \beta \boldsymbol{i} + (K\alpha \boldsymbol{j}) \wedge \beta \boldsymbol{j} + (K\alpha \boldsymbol{k}) \wedge \beta \boldsymbol{k}$ [cfr. la [3] del testo]
36. $R\{m + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}) + H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b})\} = m^2 + C\{H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) + H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})\} +$
$+ H(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$
37. $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm \alpha\beta \pm \beta\alpha + \beta^2$ ecc. per $(\alpha \pm \beta)^3, \ldots$

§ 5 Isomerie e similitudini vettoriali.

1. Proprietà fondamentali delle isomerie.

Chiameremo ***isomeria vettoriale***, o semplicemente ***isomeria***, ogni *omografia vettoriale* α tale che

[1] $$(\alpha \boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{x}^2, \text{ per } \boldsymbol{x} \text{ vettore arbitrario,}$$

cioè tale che: *conserva il* **modulo** (*o* **lunghezza**) *del qualsiasi vettore al quale viene applicata.*

Interessa osservare subito che:

Una **isomeria** *è sempre* **omografia propria.**

Dim. Se α è *omografia degenere*, esiste almeno un vettore non nullo u tale che $\alpha u = 0$ e quindi tale che $(\alpha u)^2 = 0 \neq u^2$ e quindi, per la [1] la α *non* può essere una isomeria.

Per riconoscere se una omografia α è, o pur no, una **isomeria**, oltre che del criterio [1], assunto per definizione, si può far uso dei criteri espressi dal teorema seguente:

Affinchè l'omografia α sia una **isomeria** *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta una qualunque delle condizioni* [1]-[4] *che sono tra loro* **equivalenti**, *cioè tali che due qualunque di esse sono l'una conseguenza dell'altra:*

[2] $(\alpha x) \times \alpha y = x \times y$, *per* x, y *vettori arbitrari,*
[3] $K\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot K\alpha = 1$ (*esattamente,* $= 1\odot$)
[4] α è propria e $K\alpha = \alpha^{-1}$ (*e quindi* $K\alpha^{-1} = \alpha$).

Dim. La [1] vale per qualsiasi vettore; allora si ha, per la [1]:

$$|\alpha(x+y)|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2x \times y,$$
$$|\alpha(x+y)|^2 = (\alpha x + \alpha y)^2 = (\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 + 2(\alpha x) \times \alpha y =$$
$$= x^2 + y^2 + 2(\alpha x) \times \alpha y;$$

dal confronto di queste due risulta la [2], cioè: *dalla* [1] *segue la* [2]. Viceversa, *dalla* [2] *segue la* [1], perchè se nella [2] si pone x al posto di y si ottiene la [1]. Dunque: *le* [1], [2] *sono equivalenti.*.

La [2], per il teorema di commutazione *equivale* ad

$$x \times K\alpha \cdot \alpha y = x \times y;$$

ma x è arbitrario e quindi la [2] *equivale* a $K\alpha \cdot \alpha y = y$, che per l'arbitrarietà di y equivale a $K\alpha \cdot \alpha = 1$. Ma α soddisfacendo a $K\alpha \cdot \alpha = 1$ è propria [cfr. § 4, n. 4, 4°] e quindi la condizione $K\alpha \cdot \alpha = 1$ equivale a $K\alpha = \alpha^{-1}$ e, in conseguenza, ad $\alpha \cdot K\alpha = 1$. Dunque: *le* [1], [2], [3] *sono tra loro equivalenti.*

La condizione [4] equivale ad $\alpha \cdot K\alpha = 1$, cioè alle [3] e quindi: *le condizioni* [1]-[4] *sono tra loro equivalenti* (1).

---

(1) Dalle [1], [2] risulta

$$\cos(\alpha x, \alpha y) = \cos(x, y), \text{ cioè } \operatorname{ang}(\alpha x, \alpha y) = \operatorname{ang}(x, y),$$

vale a dire: *una isomeria* **conserva**, *oltre che le* **lunghezze**, *anche gli* **angoli**. Peraltro una omografia che conservi gli angoli (come ad es. una omotetia non nulla diversa da ± 1) può *non essere* una isomeria (cfr. le *similitudini*].

Giova osservare, come risulta subito da una qualunque delle [1], [3], [4], che:

Se l'omografia α *è isomeria, anche la sua* **coniugata** $K\alpha$ *è pure isomeria.* O, in altri termini: *se* α *è omografia, allora* α *e* $K\alpha$ *sono* **entrambe,** *o pur no, isomerie.*

Tra le molte proprietà delle *isomerie* ci limitiamo, per ora, a citare le seguenti, nelle quali α è *isomeria* e $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *vettori* arbitrari.

[5] $$(I_3\alpha)^2 = 1$$

L'invariante terzo di una isomeria vale $+1$ *ovvero* -1. Il che conferma che α è omografia propria.

Dim. Da [3] si ha: $I_3(K\alpha\cdot\alpha) = (I_3\alpha)^2 = 1$; c. d. d.

[6] $$I_1\alpha = I_3\alpha\cdot I_2\alpha, \quad I_2\alpha = I_3\alpha\cdot I_1\alpha.$$

Dim. È noto [cfr. § 4, n. 5, [5]] che $I_1\alpha = I_3\alpha\cdot I_2\alpha^{-1}$, che per la [4] dà la 1ª forma [6]. Moltiplicando per $I_3\alpha$ e tenendo conto della [5] si ha subito la 2ª forma

[7] $$\alpha V\alpha = I_3\alpha\cdot V\alpha, \quad V\alpha = I_3\alpha\cdot\alpha V\alpha$$

Se il vettore di una isomeria non è nullo, la sua direzione è **unita** *per l'isomeria.*

Dim. È noto [cfr. § 4, n. 5, [6]] che $\alpha V\alpha = -I_3\alpha\cdot V\alpha^{-1}$; allora per la [4] si ha

$$\alpha V\alpha = -I_3\alpha\cdot VK\alpha = I_3\alpha\cdot V\alpha$$

che dimostra la 1ª forma [7]. La 2ª si ottiene dalla 1ª moltiplicandola per $I_3\alpha$ e tenendo conto della [5].

[8] $$R\alpha = I_3\alpha.\alpha, \quad \alpha = I_3\alpha.R\alpha.$$

Dim. È noto [cfr. § 3, n. 1, [3]] che $R\alpha\cdot K\alpha = I_3\alpha$; allora da [4] si ha $R\alpha\cdot\alpha^{-1} = I_3\alpha$ da cui segue subito la 1ª forma [8]. La 2ª forma si ottiene dalla 1ª moltiplicando per $I_3\alpha$ e tenendo conto della [5].

[9] $$\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = I_3\alpha.(\alpha\boldsymbol{u})\wedge\alpha\boldsymbol{v}, \quad (\alpha\boldsymbol{u})\wedge\alpha\boldsymbol{v} = I_3\alpha.\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}).$$

Dim. Da [8] si ha:

$$\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = I_3\alpha\cdot R\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = I_3\alpha\cdot(\alpha\boldsymbol{u})\wedge\alpha\boldsymbol{v}, \text{ ecc.; c. d. d.}$$

[10] *I prodotti (funzionali) e le potenze di isomerie vettoriali sono pure delle isomerie.*

Dim. Se α, β sono isomerie si ha, dalle proprietà precedenti e da altre ben note:

$$\mathrm{K}(\alpha\beta) = \mathrm{K}\beta \cdot \mathrm{K}\alpha = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} = (\alpha\beta)^{-1};$$
$$\mathrm{K}\alpha^{-1} = \mathrm{K}\mathrm{K}\alpha = \alpha; \text{ ecc.; c. d. d.}$$

2. Riduzione delle isomerie a forma canonica.

I teoremi seguenti, 1°-6°, esprimono importanti proprietà delle *isomerie vettoriali*, dalle quali ricaveremo [cfr. n. 3] i caratteri geometrici e meccanici delle isomerie.

In ciò che segue supponiamo che α sia una *isomeria vettoriale.*

1°. *Affinchè l'isomeria α, insieme alla sua coniugata,* $\mathrm{K}\alpha$, *sia una* **omotetia vettoriale** (*numero necessariamente non nulla*), *è necessario e sufficiente che si abbia*

[1] $$\alpha = \mathrm{I}_3\alpha, \textit{ o, il che equivale, } \mathrm{K}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha, \quad [\textit{esattamente } \alpha = \mathrm{K}\alpha = (\mathrm{I}_3\alpha)\odot].$$

Dim. Se $\alpha = \mathrm{I}_3\alpha$, il che implica $\mathrm{K}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha$, allora α è *omotetia.*

Viceversa. Se α è omotetia, allora $\alpha = m$ [esattamente $\alpha = m\odot$] con m numero reale non nullo; e poichè $\mathrm{R}m = m^2$ e $m^2 = m \cdot \mathrm{I}_3\alpha$ [cfr. n. 1, [8]] si ha $m = \mathrm{I}_3\alpha$ e quindi valgono le [1]. Oppure: se α è isomeria e $\alpha = m$ si ha $\mathrm{I}_3\alpha = \pm 1$ e $\mathrm{I}_3\alpha = m^3$, da cui $m^3 = \pm 1$, cioè $m = \pm 1$ ecc.

2°. *Qualsiasi direzione unita per α è pure unita per tutte le potenze di α* [cfr. § 1, n. 3, 2°] *e in particolare anche per* $\mathrm{K}\alpha$ *che è identica ad* α^{-1} [cfr. n. 1, [4]].

Ogni direzione **normale** *ad una direzione unita di α è trasformata da α in una direzione* **normale** *alla stessa direzione unita. Vale a dire: se i, u sono vettori non nulli*

[2] $$\left\{\begin{array}{l}\text{da } i \wedge \alpha i = 0, \textit{ (che implica } i \wedge \mathrm{K}\alpha i = 0) \textit{ e } i \times u = 0, \\ \qquad \textit{segue } i \times \alpha u = 0 \textit{ e } i \times \mathrm{K}\alpha u = 0.\end{array}\right.$$

Dim. La prima parte del teorema è già nota [cfr. citazione nell'enunciato].

Dall'ipotesi [2] si ha $\alpha i = mi$, $\mathrm{K}\alpha i = ni$, con m, n numeri reali non nulli. Da queste e sempre per le ipotesi [2] si ha $u \times \alpha i = 0$, $u \times \mathrm{K}\alpha i = 0$ che per il teorema di commutazione dànno le [2], cioè provano che anche αu e $\mathrm{K}\alpha u$ sono normali alla direzione unita i.

3°. *Se* α **non è omotetia** [cfr. 1°], *allora esiste una, ed una sola, direzione unita per* α *tale che, essendo* i *un vettore non nullo parallelo a tale direzione, si ha*

[3] $$\alpha i = \mathrm{I}_3\alpha \cdot i, \quad \mathrm{K}\alpha i = \mathrm{I}_3\alpha \cdot i;$$

anzi se α **non è dilatazione,** *cioè* $\mathrm{V}\alpha \neq 0$ [cfr. § 2, n. 2, [1]] *allora*

[4] $$i \text{ è parallelo a } \mathrm{V}\alpha, \text{ cioè } i \wedge \mathrm{V}\alpha = 0.$$

Se, invece, α **è omotetia** *allora cfr.* [1°] *le* [3] *valgono* per qualsiasi vettore i.

Dim. *a*) Se $\mathrm{V}\alpha = 0$, cioè α è *dilatazione* [cfr. § 2, n. 5, [6]] ed essendo i, j, k terna unitaria-ortogonale unita per la dilatazione α, allora si ha, come è noto [cfr. § 2, n. 4]

$$\alpha = \begin{pmatrix} mi, & nj, & pk \\ i, & j, & k \end{pmatrix} \text{ con } \mathrm{I}_3\alpha = mnp.$$

Ma α è isomeria, e poichè $\alpha i = mi, \ldots$, i numeri m, n, p devono avere l'1 per valore assoluto. Allora: per $\mathrm{I}_3\alpha = 1$ i numeri m, n, p saranno tutti uguali a $+1$, ovvero uno eguale a $+1$ e gli altri due a -1; per $\mathrm{I}_3\alpha = -1$ i numeri m, n, p saranno tutti eguali a -1, ovvero uno eguale a -1 e gli altri due a $+1$. Quindi, a meno dell'*ordine* dei vettori i, j, k si avrà

$$\text{per } \mathrm{I}_3\alpha = 1, \ \alpha = \begin{pmatrix} i, & j, & k \\ i, & j, & k \end{pmatrix} = 1, \text{ ovvero } \alpha = \begin{pmatrix} i, & -j, & -k \\ i, & j, & k \end{pmatrix},$$

$$\text{per } \mathrm{I}_3\alpha = -1, \ \alpha = \begin{pmatrix} -i, & -j, & -k \\ i, & j, & k \end{pmatrix} = -1, \text{ ovvero } \alpha = \begin{pmatrix} -i, & j, & k \\ i, & j, & k \end{pmatrix}$$

e in tutti i casi valgono le [3] per la direzione unita i.

b) Se, poi, $\mathrm{V}\alpha \neq 0$ allora, essendo $\alpha\mathrm{V}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{V}\alpha$ [cfr. n. 1, [7]], la direzione $\mathrm{V}\alpha$ sodisfa alla prima delle [3] e anche alla seconda, poichè operando nella prima con $I_3\alpha \cdot K\alpha$ si ha

$$I_3\alpha \cdot K\alpha \cdot \alpha \boldsymbol{i} = (I_3\alpha)^2 K\alpha \boldsymbol{i}, \quad \text{da cui} \quad K\alpha \boldsymbol{i} = I_3\alpha \cdot \boldsymbol{i},$$

il che dimostra anche la [4].

c) Resta da dimostrare che per $\alpha \mathrel{=\!\!\!|} I_3\alpha$ [cfr. 1°] i vettori $\boldsymbol{i}$ sodisfacenti alle [3] hanno tutti una stessa direzione che è funzione di α soltanto.

Se i vettori, *non paralleli*, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}'$ sodisfano, ad es., alla prima delle [3], e in conseguenza anche alla 2ª poichè $(I_3\alpha)^2 = 1$, allora si ha

$$(\alpha \boldsymbol{i}) \wedge \alpha \boldsymbol{i}' = (I_3\alpha)^2 \cdot \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}'$$

che per la [9] del n. 1 dà $\alpha(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}') = I_3\alpha \cdot \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}'$. Dunque, la 1ª delle [3] vale per i tre vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}'$ *non complanari* e quindi da

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}' + z\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}' \quad \text{si ha} \quad \alpha \boldsymbol{u} = I_3\alpha \cdot \boldsymbol{u},$$

che valendo per $\boldsymbol{u}$ *arbitrario* dà $\alpha = I_3\alpha$, *contrariamente all'ipotesi.*

Da *a*), *b*, *c*) e da 1° si deduce il teorema.

4°. *Se il vettore* **unitario** $\boldsymbol{i}$, *avente direzione unita per* α, *sodisfa alle* [3], *allora qualunque sia il vettore* **unitario** $\boldsymbol{u}$ *normale al vettore* $\boldsymbol{i}$ [$\boldsymbol{u}^2 = 1$, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{u} = 0$] *si ha sempre*

$$\boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{u} = (I_1\alpha - I_3\alpha)/2; \tag{5}$$

vale a dire: una qualsiasi direzione normale ad $\boldsymbol{i}$ *è trasformata da* α *in una direzione* [*pure normale ad* $\boldsymbol{i}$, cfr. 2°] *che forma con la direzione data un angolo indipendente dalla direzione stessa, cioè un angolo funzione soltanto di* α.

Dim. Applicando proprietà ben note, e che ci risparmiamo di citare, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{i} \wedge \alpha \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u}) \times I_3\alpha \cdot (\alpha \boldsymbol{i} \wedge \alpha \boldsymbol{u}) = \\ &= (I_3\alpha)^2 (\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u}) \times \alpha(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u} \,|\, I_1\alpha \cdot \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u} - \boldsymbol{i} \wedge K\alpha \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \wedge K\alpha \boldsymbol{i} \,| = \\ &= (\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u}) \times |\, (I_1\alpha - I_3\alpha) \cdot \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{u} - \boldsymbol{i} \wedge K\alpha \boldsymbol{u} \,| = \\ &= I_1\alpha - I_3\alpha - \boldsymbol{u} \times K\alpha \boldsymbol{u} = I_1\alpha - I_3\alpha - \boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{u}, \end{aligned}$$

dalla quale risulta subito la [5].

5°. *Stando per $\boldsymbol{i}$ le ipotesi poste nel teor.* 4°, *si ha*

[6] $$\alpha = \cos\varphi + (\mathrm{I}_3\alpha - \cos\varphi)\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{i}\wedge$$

essendo φ uno qualunque dei numeri reali tali che

[7] $$\cos\varphi = (\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{I}_3\alpha)/2, \quad \operatorname{sen}\varphi = \boldsymbol{i}\times \mathrm{V}\alpha.$$

Dim. Sia $\boldsymbol{u}$ vettore *unitario normale* ad $\boldsymbol{i}$. Anche il vettore $\alpha\boldsymbol{u}$ è normale ad $\boldsymbol{i}$ [cfr. 2°] e quindi $\boldsymbol{u}\wedge\alpha\boldsymbol{u}$ è *parallelo* ad $\boldsymbol{i}$. Si può dunque fissare, e in infiniti modi, un numero reale relativo φ tale che [cfr. [5]]

(a) $$\cos\varphi = \boldsymbol{u}\times\alpha\boldsymbol{u} = (\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{I}_3\alpha)/2, \text{ e } \boldsymbol{u}\wedge\alpha\boldsymbol{u} = \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i};$$

e per tale φ si ha ovviamente

(b) $$\alpha\boldsymbol{u} = \cos\varphi\cdot\boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{u}.$$

Sia ora x un vettore arbitrario. Si ha identicamente:

$$x = x\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + \{x - x\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\};$$

ma il vettore $x - x\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$ è *normale* ad $\boldsymbol{i}$ e quindi, per le [3], [4],

$$\begin{aligned}\alpha x &= x\times\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{I}_3\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\{x - x\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\} + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge\{x - x\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\} = \\ &= \mathrm{I}_3\alpha\cdot\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})x + \cos\varphi\cdot x - \cos\varphi\cdot\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})x + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge x,\end{aligned}$$

da cui si ha subito

$$\alpha x = \{\cos\varphi + (\mathrm{I}_3\alpha - \cos\varphi)\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}) + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge\}\,x$$

che per l'arbitrarietà di x dimostra la [6].

La 1ª delle [7] risulta dalle [5], (a), oppure dalla [5] e dalla (b) moltiplicata ($\times$) per $\boldsymbol{u}$. La 2ª delle [7] si ha osservando che dalla [6] si trae subito $\mathrm{V}\alpha = \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}$.

6°. *Col variare di $\boldsymbol{i}$ nella* **classe totale** *dei* **vettori unitari** *e col variare di φ, indipendentemente da $\boldsymbol{i}$, nella* **classe totale** *dei* **numeri reali relativi**, *l'* **omografia vettoriale**, *funzione di φ ed $\boldsymbol{i}$,*

[8] $$\alpha = \cos\varphi + (\pm 1 - \cos\varphi)\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}) + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge$$

percorre la **classe totale** *delle* **isomerie vettoriali.**

Per la **dilatazione** *e il* **vettore** *di α si ha*:

$$[9] \qquad D\alpha = \cos\varphi + (\pm 1 - \cos\varphi)H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}), \quad V\alpha = \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{i}.$$

Dim. Ad ogni isomeria si può dare [cfr. 5°] la forma [8]. Viceversa se l'omografia α ha la forma [8] allora essa è una isomeria, perchè [cfr. n. 1, [1]] essendo x vettore arbitrario si ha

$$\begin{aligned}(\alpha x)^2 &= \{\cos\varphi\cdot x + (\pm 1 - \cos\varphi)\boldsymbol{i}\times x\cdot\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge x\}^2 = \\ &= \cos^2\varphi\cdot x^2 + (1+\cos^2\varphi \mp 2\cos\varphi)(\boldsymbol{i}\times x)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\cdot(x^2 - (\boldsymbol{i}\times x)^2) + \\ &\quad + 2\cos\varphi\cdot(\pm 1 - \cos\varphi)(\boldsymbol{i}\times x)^2 = \\ &= (\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)x^2 + (\boldsymbol{i}\times x)^2\{1+\cos^2\varphi \mp 2\cos\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \pm 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi\} = \\ &= x^2 + (\boldsymbol{i}\times x)^2(1 - \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) = x^2.\end{aligned}$$

La seconda delle [9] si ottiene subito operando con V nella [8]; da questa viene subito la prima [cfr. § 2, n. 5].

3. Classificazione delle isomerie; rotori e anti-rotori. Siccome nella forma generica [6] del n. 2 [cfr. [8]] delle isomerie comparisce esplicitamente l'*invariante terzo*, è naturale classificare le isomerie secondo che l'invariante terzo vale $+1$ o -1, i soli valori che esso può assumere. Chiameremo:

rotore	ogni *isomeria* α tale che	$I_3\alpha = +1$,
anti-rotore	» » » » »	$I_3\alpha = -1$.

Inoltre, tenuto cónto che la [8] del n. 2 dà la generica isomeria α in funzione di φ (numero) ed $\boldsymbol{i}$ (vettore unitario), vien pure naturale ed opportuno, esprimere *rotori* ed *anti-rotori* in funzione di φ ed $\boldsymbol{i}$ con le notazioni seguenti:

$$[1] \quad \operatorname{Rotor}(\varphi, \boldsymbol{i}) = \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge$$
$$[2] \quad \operatorname{aRotor}(\varphi, \boldsymbol{i}) = \cos\varphi - (1 + \cos\varphi)H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i}\wedge.$$

I *rotori* e gli *anti-rotori* dànno tutti i *moti geometrici* (1); i *rotori* dànno tutti i *moti meccanici*, anzi permettono di

---

(1) C. Burali-Forti. *Isomerie vettoriali e moti geometrici* (Mem. Acc. Torino, Serie II, Vol. LXV, a. 1914).

trattare in modo semplicissimo e puramente geometrico, i moti meccanici finiti, continui, infinitesimi e tutto ciò che riguarda la loro composizione [1]. Sarebbe troppo lungo sviluppare qui tutte le proprietà geometriche e meccaniche delle isomerie; ci limitiamo ad indicarne alcune tra le più importanti.

a) *Il* Rotor $(\varphi, \boldsymbol{i})$ *applicato al vettore generico*, x, *produce il vettore che si ottiene dando ad* x *la rotazione di* φ *radianti intorno ad* $\boldsymbol{i}$ *(senso determinato dal verso di* $\boldsymbol{i}$ *e dal segno di* φ*).*

Infatti. Si ha subito dalla [1]

$$\boldsymbol{i} \times \mathrm{Rotor}\,(\varphi, \boldsymbol{i})x = \boldsymbol{i} \times x$$

ed inoltre [cfr. n. 2, 5, [6]] la componente normale rispetto ad $\boldsymbol{i}$ di x vien ruotata di φ radianti intorno ad $\boldsymbol{i}$.

b) Casi particolari notevoli per i *rotori* sono:

[3] $\mathrm{Rotor}\,(0, \boldsymbol{i}) = 1$, *identità*

[4] $\mathrm{Rotor}\,(\pi, \boldsymbol{i}) = 2\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) - 1$, **simmetria** rispetto ad $\boldsymbol{i}$.

c) Caso particolare notevole per gli *antirotori* è:

[5] $\mathrm{aRotor}\,(0, \boldsymbol{i}) = 1 - 2\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$, **specchiamento** *rispetto a giacitura normale ad* $\boldsymbol{i}$; vale a dire: $\mathrm{aRotor}\,(0, \boldsymbol{i})x$ *è il simmetrico del vettore* x *rispetto alla giacitura normale ad* $\boldsymbol{i}$.

Infatti. Se x_1 è il simmetrico considerato si ha ovviamente

$$x_1 + x = 2\,\{x - x \times \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}\} = 2x - \mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})x$$

da cui $x_1 = \{1 - 2\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})\}\,x$, c. d. d.

d) Gli *anti-rotori* si ottengono tutti come prodotti funzionali, commutabili, di un *rotore* per uno *specchiamento*

---

(1) C. Burali-Forti e T. Boggio. *Meccanica razionale* (Collezione Lattes. Torino, 1921).

poichè si ha:

[6] $$\mathrm{aRotor}(\varphi, \boldsymbol{i}) = \mathrm{Rotor}(\varphi, \boldsymbol{i}) . \mathrm{aRotor}(0, \boldsymbol{i}) = = \mathrm{aRotor}(0, \boldsymbol{i}) \cdot \mathrm{Rotor}(\varphi, \boldsymbol{i}).$$

Infatti dalle [1], [5] si ha, ad es.,

$$\mathrm{Rotor}(\varphi, i) \cdot \mathrm{aRotor}(0, i) = \cos\varphi + (1 - \cos\varphi) \cdot \mathrm{H}(i, i) + \mathrm{sen}\,\varphi \cdot i \wedge - - 2\cos\varphi \cdot \mathrm{H}(i, i) - 2(1 - \cos\varphi) \cdot \mathrm{H}(i, i) = = \cos\varphi - (1 + \cos\varphi) \cdot \mathrm{H}(i, i) + \mathrm{sen}\,\varphi \cdot i \wedge = \mathrm{aRotor}(\varphi, i).$$

4. Similitudini vettoriali.

Chiameremo ***similitudine vettoriale***, o semplicemente ***similitudine***, ogni *omografia vettoriale* α tale che

[1] $\mathrm{ang}(\alpha x, \alpha y) = \mathrm{ang}(x, y)$, per x, y vettori arbitrari non nulli, cioè omografia tale che: *conserva l'* **angolo** *dei due qualsiasi vettori non nulli ai quali viene applicata* [cfr. n. 1 definizione di isomeria].

Interessa osservare subito che:

Una **similitudine** *è sempre* **omografia propria.**

Dim. Se α è *omografia degenere*, esiste almeno un vettore, non nullo, x tale che $\alpha x = 0$; ma allora la [1] non può esser verificata poichè l'angolo di αx con αy è *indeterminato* mentre è determinato l'angolo (x, y).

Si noti anche che alla [1] si può dare la forma

[1'] $$\frac{(\alpha x) \times \alpha y}{\mathrm{mod}\,(\alpha x) \cdot \mathrm{mod}\,(\alpha y)} = \frac{x \times y}{\mathrm{mod}\, x \cdot \mathrm{mod}\, y}$$

poichè [cfr, E. C. V.] si ha $u \times v = \mathrm{mod}\, u \cdot \mathrm{mod}\, v \cdot \cos(u, v)$ e il $\cos(u, v)$ *individua* l'$\mathrm{ang}(u, v)$, qualunque siano i vettori, non nulli, u, v.

La condizione di *similitudine* si può esprimere anche così:

L'omografia propria α *è una* **similitudine** *solamente quando:* **conserva il rapporto dei moduli dei due qualsiasi vettori ai quali viene applicata,** cioè:

[2] $(\alpha x)^2/(\alpha y)^2 = x^2/y^2$, *per* x, y *vettori arbitrari non nulli.*

Dim. Bisogna dimostrare che le condizioni [1], [2] sono *equivalenti*.

Essendo x, y *vettori* arbitrari non nulli ed O un *punto* qualunque, si considerano le due figure:

A, formata dai punti O, $O + \alpha x$, $O + \alpha y$,
B, » » » O, $O + x$, $O + y$

e la *corrispondenza* tra A e B che ad O, $O + \alpha x$, $O + \alpha y$ fa corrispondere, rispettivamente, O, $O + x$, $O + y$.

Se vale la [1], ovvero la [2], allora le figure A, B, rispetto alla corrispondenza considerata, risultano *simili*, e, *in conseguenza*, vale la [2], ovvero la [1]. Dunque le [1], [2] sono *equivalenti*; c. d. d.

Le [1], [2], ciascuna delle quali *caratterizza* le *similitudini*, esprimono importanti *proprietà geometriche* delle *similitudini* vettoriali. Formalmente, e con riferimento alle *isomerie*, si ha il teorema:

Le **similitudini vettoriali** *sono, tutte e sole, le omografie che sono il prodotto di una* **isomeria vettoriale** *per un* **numero reale relativo** (**omotetia vettoriale**).

Dim. Sia α una *similitudine*. Dalla [2] risulta subito che esiste un numero reale relativo m, funzione di α soltanto, tale che $(\alpha x)^2/x^2 = m^2$, cioè tale che $(\alpha x)^2 = m^2 x^2$; vale a dire tale che

$$\left(\frac{\alpha}{m} x\right)^2 = x^2.$$

Ma allora α/m è *isomeria* [cfr. n. 1, [1]] e quindi: la *similitudine* α è il *prodotto* di una *isomeria* per un *numero*.

Viceversa. Sia β una *isomeria*, m un *numero* e $\alpha = m\beta$. Allora per tale α la [1], e la [2], è sodisfatta e quindi α è una similitudine, vale a dire: il *prodotto* di una *isomeria* per un *numero* è una *similitudine*.

Segue da questo teorema un nuovo criterio per riconoscere quand'è che una omografia è una similitudine:

L'omografia α *è una* **similitudine** (*non esclusa l'* **isomeria** *per* $m = \pm 1$) *quando esiste un numero reale, non nullo,* m *tale che*

[3] $$\mathrm{K}\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathrm{K}\alpha = m^2 \text{ (esattamente, } = m^2 \odot).$$

Dim. La [3] equivale a

$$\mathrm{K}\frac{\alpha}{m}\cdot\frac{\alpha}{m}=\frac{\alpha}{m}\cdot\mathrm{K}\frac{\alpha}{m}=1$$

il che prova [cfr. n. 1, [3]] che α/m è *isomeria*; ecc.

Osserviamo che le *isomerie* sono state definite come quelle omografie che *conservano le lunghezze*; è allora ovvio che *le isomerie conservano anche gli angoli.* Viceversa le omografie che *conservano gli angoli* sono non soltanto le isomerie, ma sibbene le *similitudini* (tra le quali sono comprese anche le isomerie), cioè i prodotti di isomerie per numeri.

Anticipando su nozioni che stabiliremo in seguito, facciamo una importante osservazione.

Sia u un *vettore* funzione del punto P, variabile in un certo campo. L'operatore λ tale che

$$\lambda P=O+u,$$

ove O è punto fisso, individua una *trasformazione dei punti* P, variabili in un campo Σ, nei punti $\lambda P=O+u$ variabili in un campo Σ'. La *rappresentazione di* Σ *in* Σ' è *conforme* solamente quando du/dP è una similitudine, vale a dire

$$\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\frac{du}{dP}=m^2$$

essendo m numero non nullo funzione di P.

Da ciò l'importanza delle *similitudini vettoriali* che libera le *rappresentazioni conformi* da qualsiasi elemento di riferimento.

5. Direzioni principali di una omografia e riduzione di una omografia generica al prodotto di una dilatazione per una isomeria.

Una terna di direzioni due a due ortogonali, si chiamerà *terna principale rispetto alla omografia* α, quando essa è trasformata da α in una terna di direzioni pure due a due ortogonali.

Le direzioni *unite* di una *dilatazione* α sono *direzioni principali* di α, poichè esse sono trasformate in se stesse da α.

Essendo α una generica omografia si hanno i teoremi seguenti:

1.° *Una* **terna unita** *per la* **dilatazione** $K\alpha\cdot\alpha$ (ovvero $\alpha\cdot K\alpha$), *è* **terna principale** *per* α, (o per $K\alpha$); *e viceversa.* In particolare: *una omografia generica* α (*o la sua coniugata* $K\alpha$) *ammette sempre almeno una* **terna principale,** *che è* **terna unita** *della* **dilatazione** $K\alpha\cdot\alpha$ (*ovvero* $\alpha\cdot K\alpha$).

Dim. Che $K\alpha\cdot\alpha$, $\alpha\cdot K\alpha$ siano *dilatazioni* risulta subito dal fatto che [cfr. § 2, n. 4].

$$K(K\alpha\cdot\alpha)=K\alpha\cdot KK\alpha=K\alpha\cdot\alpha,\quad K(\alpha\cdot K\alpha)=KK\alpha\cdot K\alpha=\alpha\cdot K\alpha.$$

Se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ è terna *unita* per la dilatazione $K\alpha\cdot\alpha$, allora:

$$(\alpha\boldsymbol{j})\times\alpha\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\times K\alpha\cdot\alpha\boldsymbol{k}=0,\ \text{e analoghe per } \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} \text{ e } \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$$

perchè $K\alpha\cdot\alpha\boldsymbol{k}$ è *parallelo* a $\boldsymbol{k}$ ed *ortogonale* ad $\boldsymbol{j}$. Ciò prova che: *la terna* $\alpha\boldsymbol{i}$, $\alpha\boldsymbol{j}$, $\alpha\boldsymbol{k}$ *é ortogonale*, e quindi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ è **terna principale** *per* α. Analogamente per $K\alpha$.

Viceversa. Se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ è *principale* per α, allora:

$$0=(\alpha\boldsymbol{j})\times\alpha\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times K\alpha\cdot\alpha\boldsymbol{i},\quad 0=(\alpha\boldsymbol{k})\times\alpha\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\times K\alpha\cdot\alpha\boldsymbol{i},$$

vale a dire $K\alpha\cdot\alpha\boldsymbol{i}$ è parallelo ad $\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}$, cioè ad $\boldsymbol{i}$, e quindi: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ è **terna unita** *per la dilatazione* $K\alpha\cdot\alpha$. Analogamente per $K\alpha$.

2.° *Una terna* **principale** *per* α (*o per* $K\alpha$) *è trasformata da* α (*o da* $K\alpha$) *in una terna che è principale per* $K\alpha$ (*o per* α).

Dim. La terna $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sia *principale* per α, cioè *unita* per $K\alpha\cdot\alpha$ [cfr. 1°]. Si ha, ad es., $K\alpha\cdot\alpha\boldsymbol{i}=m\boldsymbol{i}$, con m numero, e quindi

$$(\alpha\cdot K\alpha)\alpha\boldsymbol{i}=\alpha(K\alpha\cdot\alpha)\boldsymbol{i}=\alpha(m\boldsymbol{i})=m(\alpha\boldsymbol{i})$$

e analogamente per $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, il che prova che: $\alpha\boldsymbol{i}$, $\alpha\boldsymbol{j}$, $\alpha\boldsymbol{k}$ *è terna* **unita** *per* $\alpha\cdot K\alpha$, cioè [cfr. 1°] *è terna* **principale** *per* $K\alpha$. Analogamente per $K\alpha$.

3.° *Una omografia è sempre* **esprimibile** *come* **prodotto di una isomeria per una dilatazione.** *Si ha formalmente*:

[1] $$\alpha=\mu\sigma=\lambda\mu\quad e\ quindi\quad K\alpha=\sigma\mu^{-1}=\mu^{-1}\lambda\,,$$

ove μ *è* **isomeria** *che trasforma le* **direzioni principali** *di* α

in quelle di Kα, *e* σ, λ *sono* **dilatazioni** *aventi per direzioni* **unite** *le direzioni* **principali** *di* α, Kα *e i medesimi coefficienti di dilatazione lungo le corrispondenti direzioni unite.* In particolare: *sono determinati i numeri reali* a, b, c *tali che, se* i, j, k *e* i', j', k' *sono terne di* **vettori unitari paralleli alle direzioni principali di** α **e** Kα, *si ha*:

$$[2] \qquad \alpha = \begin{pmatrix} ai', & bj', & ck' \\ i, & j, & k \end{pmatrix} = a\mathrm{H}(i, i') + b\mathrm{H}(j, j') + c\mathrm{H}(k, k'),$$

$$[3] \quad \mathrm{K}\alpha = \begin{pmatrix} ai, & bj, & ck \\ i', & j', & k' \end{pmatrix} = a\mathrm{H}(i', i) + b\mathrm{H}(j', j) + c\mathrm{H}(k', k),$$

$$[4] \quad \sigma = \begin{pmatrix} ai, & bj, & ck \\ i, & j, & k \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} ai', & bj', & ck' \\ i', & j', & k' \end{pmatrix}, \ \textit{per}\ \textbf{definire}\ \sigma\ \textit{e}\ \lambda,$$

$$[5] \qquad \mathrm{K}\alpha \cdot \alpha = \sigma^2, \quad \alpha \cdot \mathrm{K}\alpha = \lambda^2,$$

$$[6] \qquad \mu = \begin{pmatrix} i', & j', & k' \\ i, & j, & k \end{pmatrix}, \ \textit{che}\ \textbf{definisce}\ \mu.$$

Dim. La α ha certamente la 1ª forma [2] poichè [cfr. 2°] i vettori αi, αj, αk sono paralleli ad i', j', k'. Da [2] si ha $(\alpha i) \times i' = a$ e quindi $i \times \mathrm{K}\alpha i' = a$; ma [cfr. 2°] $\mathrm{K}\alpha i'$ è parallelo ad i, ecc., e quindi vale la 1ª forma [3] per Kα. Le seconde forme [2], [3] risultano dalle prime.

Definite le dilatazioni σ, λ con le [4] si ha, ad es., dalle [2], [3],

$$\alpha i = ai', \quad \mathrm{K}\alpha \cdot \alpha i = a\mathrm{K}\alpha i' = a^2 i, \ \text{ecc.}$$

che dimostrano le [5].

Dalle [2], [3], [4], [6] si ha:

$$\alpha i = ai' = a\mu i = \mu a i = \mu\sigma i, \quad \alpha i = ai' = \lambda i' = \lambda\mu i, \ \text{ecc.}$$

e restano quindi dimostrate le [1].

4.° *Data la omografia* α, *l'equazione, nella omografia incognita* ξ,

$$[7] \qquad \mathrm{K}\xi \cdot \xi = \alpha \quad \text{ovvero,} \quad \xi \cdot \mathrm{K}\xi = \alpha,$$

ammette soluzioni nel **solo caso** *che* α *sia il* **quadrato di una dilatazione.** *Se tale condizione è sodisfatta e* σ *è dilatazione* *tale che* $\alpha = \sigma^2$ [1] *allora le infinite soluzioni della* [7] *sono*

$$[8] \qquad \xi = \rho\sigma \quad \text{ovvero} \quad \xi = \sigma\rho$$

essendo ρ *una arbitraria isomeria. I teoremi 1º, 2º, 3º dicono quali sono le direzioni principali di* ξ *date dalla* [8].

Dim. Se la direzione di $\boldsymbol{i}$ è *unita* per la *dilatazione* $\mathrm{K}\xi\cdot\xi$, allora si ha $\mathrm{K}\xi\cdot\xi\boldsymbol{i} = m\boldsymbol{i}$ da cui, per $\boldsymbol{i}$ unitario, $(\mathrm{K}\xi\cdot\xi\boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{i} = m$ e quindi $(\xi\boldsymbol{i})^2 = m$; il che prova che $\mathrm{K}\xi\cdot\xi$ è il quadrato di una dilatazione, come, del resto, può anche ricavarsi dalla [5]. Ciò posto e se σ è dilatazione tale che $\sigma^2 = \alpha$, allora dai teoremi precedenti si ricavano le soluzioni generali [8] delle equazioni [7].

Esercizi.

(1) Se α è isomeria, allora $\alpha^2 = \mathrm{I}_1\alpha\cdot\alpha + \mathrm{I}_3\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha - \mathrm{I}_2\alpha$.

(2) Se α è isomeria non numero reale ($\alpha \neq \mathrm{I}_3\alpha$) allora i vettori $\boldsymbol{u}$ tali che $\alpha\boldsymbol{u} = \mathrm{I}_3\alpha\cdot\boldsymbol{u}$, o, il che equivale, $\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u} = \mathrm{I}_3\alpha\cdot\boldsymbol{u}$ sono dati da

$$(\alpha + \mathrm{K}\alpha + \mathrm{I}_3\alpha - \mathrm{I}_1\alpha)\boldsymbol{x}$$

per $\boldsymbol{x}$ vettore arbitrario non nullo; e se α non è dilatazione ($\mathrm{V}\alpha \neq 0$) allora i vettori $\boldsymbol{u}$ sono i vettori paralleli a $\mathrm{V}\alpha$.

(3) Qualunque sia l'isomeria α si ha identicamente

$$\alpha = (\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{I}_3\alpha)/2 + \{\mathrm{I}_3\alpha - (\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{I}_3\alpha)/2\}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (\mathrm{V}\alpha)\wedge,$$

ove $\boldsymbol{u}$ è vettore unitario che, per $\alpha = \mathrm{I}_3\alpha$ è arbitrario e per $\alpha \neq \mathrm{I}_3\alpha$ è uno dei vettori dell'esercizio (2).

(4) Alla isomeria vettoriale α si può dare la forma generica

$$\alpha = \cos\varphi + (\mathrm{I}_3\alpha - \cos\varphi)\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{u}\wedge$$

---

[1] Se α è il quadrato di una dilatazione si avrà

$$\alpha = \begin{pmatrix} m^2\boldsymbol{i}, & n^2\boldsymbol{j}, & p^2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

con m, n, p numeri positivi. Se $\alpha = \sigma^2$ allora si hanno *otto* valori di σ compendiati da $\begin{pmatrix} \varepsilon m\boldsymbol{i}, & \varepsilon' n\boldsymbol{j}, & \varepsilon'' p\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$ con $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = \varepsilon''^2 = 1$.

ove u è vettore unitario tale che $\alpha u = \mathrm{I}_3\alpha \cdot u$, φ è tale che

$$\cos\varphi = (\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{I}_3\alpha)/2, \quad \operatorname{sen}\varphi = \mathrm{V}\alpha \times u$$

e per le derivate di α rispetto a φ si ha

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = u\wedge\alpha = \alpha\cdot u\wedge, \quad \frac{\partial^n\alpha}{\partial\varphi^n} = (u\wedge)^n\cdot\alpha = \alpha\cdot(u\wedge)^n.$$

(5) $\mathrm{Rotor}(\varphi, u) = \mathrm{e}^{\varphi u\wedge}$, per $u^2 = 1$.

(6) $\mathrm{Rotor}(\psi, u)\cdot\mathrm{Rotor}(\varphi, u) = \mathrm{aRotor}(\psi, u)\cdot\mathrm{aRotor}(\varphi, u) =$
$= \mathrm{Rotor}(\varphi + \psi, u)$,

(7) $\mathrm{Rotor}(\psi, u)\cdot\mathrm{aRotor}(\varphi, u) = \mathrm{aRotor}(\varphi, u)\cdot\mathrm{Rotor}(\psi, u) =$
$= \mathrm{aRotor}(\varphi + \psi, u)$.

(8) $\{\mathrm{Rotor}(\varphi, u)\}^n = \mathrm{Rotor}(n\varphi, u)$, n intero.

(9) $\begin{cases} \{\mathrm{aRotor}(\varphi, u)\}^{2n} = \mathrm{Rotor}(2n\varphi, u) \\ \{\mathrm{aRotor}(\varphi, u)\}^{2n+1} = \mathrm{aRotor}((2n+1)\varphi, u). \end{cases}$

(10) Sia u vettore non nullo. Applicando ad un qualsiasi vettore x l'operatore $\mathrm{Rotor}(\pi, u)$ si ottiene il *simmetrico* di x rispetto ad u; applicando invece l'operatore $\mathrm{aRotor}(0, u)$ si ottiene il simmetrico di x rispetto alla giacitura normale ad u, cioè lo *specchiamento* di x rispetto alla giacitura stessa. Si può porre

$$\mathrm{sym}\, u = \mathrm{Rotor}(\pi, u), \quad \mathrm{spec}\, u = \mathrm{aRotor}(0, u)$$

e si hanno le formule:

$$\mathrm{sym}\, u = \{2\mathrm{H}(u, u) - u^2\}/u^2, \quad \mathrm{spec}\, u = -\,\mathrm{sym}\, u;$$

notando che $\mathrm{Rotor}(0, u) = 1$ e $\mathrm{aRotor}(\pi, u) = -1$ dànno, rispettivamente, l'*identità* e l'*equinversione*.

(11) Valgano le notazioni (10) e siano u, v vettori non nulli. Si ha

$$\mathrm{sym}\, v\cdot\mathrm{sym}\, u = \mathrm{spec}\, v\cdot\mathrm{spec}\, u = \mathrm{Rotor}\,\{2\,\mathrm{ang}\,(u, v),\ u\wedge v\}$$
$$\mathrm{spec}\, v\cdot\mathrm{sym}\, u = \mathrm{sym}\, v\cdot\mathrm{spec}\, u = \mathrm{aRotor}\,\{\pi + 2\,\mathrm{ang}\,(u, v),\ u\wedge v\}.$$

(12) Se essendo a, b, c vettori non complanari, si pone

$$\alpha = \mathrm{ang}\,(a\wedge b,\ a\wedge c), \quad \beta = \mathrm{ang}\,(b\wedge c,\ b\wedge a), \quad \gamma = \mathrm{ang}\,(c\wedge a,\ c\wedge b)$$

allora si ha:

$$\mathrm{Rotor}\,(2\gamma, c)\cdot\mathrm{Rotor}\,(2\beta, b)\cdot\mathrm{Rotor}\,(2\alpha, a) = 1, \text{ per } a\wedge b\times c < 0$$
$$\mathrm{Rotor}(-2\gamma, c)\cdot\mathrm{Rotor}(-2\beta, b)\cdot\mathrm{Rotor}(-2\alpha, a) = 1, \text{ per } a\wedge b\times c > 0.$$

(13) Si estendano i teoremi (12) ad una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di 4 o più vettori.

(14) La relazione tra i Rotor e aRotor è data da:

$$\mathrm{aRotor}(\varphi, u) = \mathrm{spec}\, u \cdot \mathrm{Rotor}(\varphi, u) = \mathrm{Rotor}(\varphi, u) \cdot \mathrm{spec}\, u$$
$$\mathrm{Rotor}(\varphi, u) = \mathrm{spec}\, u \cdot \mathrm{aRotor}(\varphi, u) = \mathrm{aRotor}(\varphi, u) \cdot \mathrm{spec}\, u$$

perchè $(\mathrm{spec}\, u)^2$ è l'identità, o più semplicemente da

$$\mathrm{aRotor}(\varphi, u) = -\mathrm{Rotor}(\pi + \varphi, u).$$

(15) Per le *isomerie ad invariante terzo positivo*, cioè per i *rotori*, si esamini *Meccanica Razionale* (Collezione Lattes) l. c. pp. 56–108 per i moti meccanici, *finiti*, *continui*, *istantanei*, loro composizione ecc.

(16) Sia $\lambda = \mathrm{Rotor}(\varphi, u)$, con $u^2 = 1$, un rotor funzione della variabile numerica t, con φ ed u funzioni, in generale, di t, e indichiamo con gli apici le derivate rispetto a t. Esistono i vettori u, u_1, funzioni di t tali che

$$\lambda' = u \wedge \lambda, \quad \mathrm{K}\lambda' = u_1 \wedge \mathrm{K}\lambda,$$

ed u, u_1, insieme alle loro derivate, sono legati dalle relazioni

$$u_1 = -\mathrm{K}\lambda u, \ u = -\lambda u_1; \quad u_1' = -\mathrm{K}\lambda u', \ u' = -\lambda u_1'.$$

ed u, u_1 sono esprimibili mediante φ ed u e le loro derivate, da

$$u = \varphi' u + \mathrm{sen}\, \varphi \cdot u' + (1 - \cos\varphi) \cdot u \wedge u',$$
$$u_1 = -\varphi' u - \mathrm{sen}\, \varphi \cdot u' + (1 - \cos\varphi) \cdot u \wedge u'$$

e la secoada di queste si ottiene dalla prima cambiando φ in $-\varphi$, come si ottiene $\mathrm{K}\lambda = \lambda^{-1}$ da λ.

(17) Stando le notazioni (16) e se n è intero non nullo, positivo o negativo, si ha

$$(\lambda^n)' = u^{(n)} \wedge \lambda^n, \quad (\mathrm{K}\lambda^n)' = u_1^{(n)} \wedge \mathrm{K}\lambda^n, \text{ con}$$
$$u^{(n)} = (1 + \lambda + \ldots + \lambda^{n-1}) u = (1 - \lambda)^{-1}(1 - \lambda^n) u,$$
$$u_1^{(n)} = (1 + \mathrm{K}\lambda + \ldots + \mathrm{K}\lambda^{n-1}) u_1 = (1 - \mathrm{K}\lambda)^{-1}(1 - \mathrm{K}\lambda^n) u,$$

e si ha anche

$$u^{(-n)} = u_1^{(n)}, \quad u_1^{(-n)} = u^{(n)}.$$

§ 6. Iperomografie.

1. Definizione e proprietà fondamentali.

Chiameremo ***iperomografia***, o anche ***omografia di ordine 2***, ogni *operatore lineare* tra *vettori* e *omografie*. Vale a dire l'operatore μ è una *iperomografia*, quando, qualunque siano i *vettori* x, y e il *numero reale* m, si ha:

[1] μx è una *omografia*, $\mu(x+y)=\mu x+\mu y$, $\mu(mx)=m\mu x$.

Ad es., se u è vettore, l'operatore composto $u\times$ è una *iperomografia*, perchè per x vettore arbitrario

$$(u\times)x=u\times x$$

è *numero* (speciale omografia). Si noti che, essendo α una omografia si ha $u\times\alpha x=(\mathrm{K}\alpha u)\times x$ e quindi

$$u\times\alpha=(\mathrm{K}\alpha u)\times$$

vale a dire anche $u\times\alpha$ è iperomografia e della stessa specie della iperomografia $v\times$ con v vettore.

Se μ è *iperomografia* converremo di scrivere, qualunque siano i vettori x, y, μxy al posto di $(\mu x)y$,

[2] $$\mu xy=(\mu x)y,$$

cioè μxy indica, brevemente, il vettore che si ottiene applicando al *vettore* y l'*omografia* μx.

Riprendendo l'esempio precedente si ha appunto

$$\{(u\times\alpha)x\}y=u\times\alpha x\cdot y$$

che è un multiplo del vettore y.

Si hanno le seguenti notevoli proprietà, conseguenze della definizione di iperomografia e di teoremi ben noti.

Se α è una **omografia** *funzione* **lineare** *del* **vettore** *generico x, allora esiste una, ed una sola,* **iperomografia** *μ tale che*

$$\alpha=\mu x$$

qualunque sia il vettore x [Intr. II, n. 7, 1°].

La **somma** *di due, o più,* **iperomografie** *è una* **iperomografia** [Intr. II, n. 4].

Uno qualunque dei due prodotti funzionali di una **omografia** *e di una* **iperomografia** *è una* **iperomografia.** *Cioè, se* α *è* **omografia** *e* μ *è una* **iperomografia,** allora

$$\alpha \bigcirc \mu, \ \mu \bigcirc \alpha \ (\textit{brevemente } \alpha\mu, \ \mu\alpha) \ \textit{sono } \textbf{iperomografie.}$$

Dim. Se x è *vettore,* allora μx è *omografia* e $\alpha(\mu x) = (\alpha\mu)x$ è pure *omografia;* quindi $\alpha\mu$ è *iperomografia.* Nella stessa ipotesi per x allora αx è vettore e $\mu(\alpha x) = (\mu\alpha)x$ è *omografia;* quindi $\mu\alpha$ è *iperomografia.*

In particolare: *Uno qualunque dei due prodotti (eguali tra loro) di una* **iperomografia** *per un* **numero reale** *è una* **iperomografia.** *Cioè, se* μ *è iperomografia e* m *è numero si ha*

$$m\mu = \mu m \quad e \quad m\mu \ \textit{è iperomografia.}$$

Dim. Ciò risulta da [1] osservando che m (o meglio $m\odot$) è una particolare omografia.

Giova tener presente che: *il prodotto di due* **iperomografie** *non è una* **iperomografia,** poichè se μ, ν sono iperomografie e x è vettore $\mu(\nu x)$, per un teorema precedente, è una *iperomografia* e *non* una *omografia.*

Osservazione. Essendo m un intero non nullo, si può chiamare ***omografia dell'ordine*** m, brevemente H_m, ogni *operatore* μ *tra* m*-uple di* **vettori** *e* **vettori,** *e operatore* **lineare** *rispetto a* **ciascun** *vettore della* m*-upla.*

Generalizzando la notazione [2] ed essendo μ_m una H_m risulta subito che

$$\mu_m x_1 x_2 \dots x_m \ \text{è un } \textit{vettore}$$

e quindi, per r intero non nullo minore di m,

$$\mu_m x_1 x_2 \dots x_r \ \text{è una } H_{m-r}.$$

Si noti che H_1 indica la classe delle ordinarie *omografie.* Si può, per analogia, convenire di indicare con H_0 la classe *vettore.*

Risulta facilmente che: *i due prodotti di una* H_m *per una* H_n *sono delle* H_{m+n-1}, il che concorda con quanto abbiamo detto precedentemente.

A noi basta lo studio delle H_0 (*vettori*), H_1 (*omografie*), H_2 (*iperomografie*); abbiamo già fatto quello delle H_0 [E. C. V.] e delle H_1 [§§ precedenti]; faremo ora quello delle H_2. La teoria generale delle H_m, anche in uno spazio a n dimensioni, si trova ampiamente sviluppata nel libro già citato *Espaces courbes. Critique de la rélativité* [Première partie, III-V].

2. Operatori I_1, K, D, V applicati alle iperomografie.

Se f è *operatore* tra *omografie* ed enti di una classe U, e μ è una *iperomografia*, allora il *prodotto funzionale* di μ per f, cioè $f\mu$, è un *operatore tra* **vettori** *e gli* U, perchè, per x vettore arbitrario si ha, per le note leggi generali del *prodotto funzionale*

$$(f\mu)x = f(\mu x)$$

e sappiamo che μx è *omografia.*

Stando le ipotesi ora fatte per f *e* μ, *ed inoltre se* f *è operatore* **lineare** *tra omografie e gli* U, *allora* $f\mu$ *è un* **operatore lineare** *tra vettori e gli* U; il che è evidente.

Se al posto di f poniamo i noti operatori *lineari* I_1, K, D, V (i primi tre tra *omografie* e *omografie*, l'ultimo tra *omografie* e *vettori*) si ottengono, per μ iperomografia arbitraria, gli operatori

$$[1] \qquad I_1\mu,\ K\mu,\ D\mu,\ V\mu$$

e si hanno le proprietà, che occorre tener ben presenti:

$$[2] \qquad \begin{cases} I_1\mu,\ K\mu,\ D\mu \text{ sono } \textit{iperomografie} \\ \qquad V\mu \text{ è } \textit{omografia.} \end{cases}$$

Dim. Infatti: μx è *omografia*; $I_1\mu x$ è *numero* (particolare *omografia*); $K\mu x$, $D\mu x$ sono *omografie*; $V\mu x$ è *vettore*; e poichè $I_1\mu$, $K\mu$, $D\mu$, $V\mu$ sono *operatori lineari* per i *vettori* resta dimostrato il teorema.

OSSERVAZIONE. Anche $I_2\mu$, $I_3\mu$ sono operatori tra *vettori* e *numeri*, ma *non sono* operatori *lineari*. Ne segue che mentre $I_1\mu$ è operatore utile, $I_2\mu$ e $I_3\mu$ non lo sono.

Essendo μ *una* **iperomografia** *e* α *una* **omografia,** *per la* **iperomografia** [cfr. n. 1] $\mu\alpha$ *si ha*:

$$
[3] \qquad \begin{cases} I_1(\mu\alpha) = I_1\mu \cdot \alpha, & K(\mu\alpha) = K\mu \cdot \alpha \\ D(\mu\alpha) = D\mu \cdot \alpha, & V(\mu\alpha) = V\mu \cdot \alpha; \end{cases}
$$

vale a dire per $f = I_1$, K, D, V *si ha sempre*

$$
[3'] \qquad f(\mu\alpha) = f\mu \cdot \alpha
$$

cioè l'f *di* $\mu\alpha$ *è il prodotto funzionale di* α *per* $f\mu$.

Dim. Infatti per le leggi generali del prodotto funzionale e le proprietà precedenti si ha

$$
f(\mu\alpha)x = f(\mu \cdot \alpha x) = (f\mu \cdot \alpha)x
$$

che valendo per x vettore arbitrario dimostra la [3′] e anche le [3].

Giova osservare che per le iperomografia $\alpha\mu$ [cfr. n. 1] *non* si hanno formule analoghe alla [3], poichè pur essendo

$$
f(\alpha\mu)x = f(\alpha \cdot \mu x)
$$

l'f del prodotto delle due omografie α, μx non può applicarsi alla omografia α. Si noti ancora che per $f = K$ si ha

$$
K(\alpha\mu)x = K(\alpha \cdot \mu x) = K\mu x \cdot K\alpha
$$

e rimanendo x nel primo fattore non si può esprimere, con le notazioni fin qui stabilite, il $K(\alpha\mu)$ in funzione di $K\alpha$ e di $K\mu$. Osservazione analoga per V.

3. Operatori k, k′ **per le iperomografie.**

Se μ è *iperomografia* indicheremo con

$$
k\mu, \quad k'\mu
$$

le iperomografie, funzioni di μ, tali che

$$
[1] \qquad (k\mu)xy = \mu yx \qquad \text{[cfr. n. 1, [2]]}
$$

[2] $$x \times (k'\mu) y = y \times \mu x \ (^1)$$

qualunque siano i vettori x, y.

La [1] esprime che: applicare $k\mu$ alla coppia (x, y) equivale ad applicare μ alla coppia (y, x) e quindi k cambia l'ordine dei due vettori ai quali si applica la iperomografia per ottenere un vettore. La [2] dà per k′ una proprietà analoga alla legge di commutazione per l'operatore K.

Interessa stabilire subito che:

k, k′ *sono* **operatori lineari,** *univocamente determinati tra* **iperomografie** *ed* **iperomografie.** In altri termini: *se* μ, ν *sono iperomografie e m è numero reale, allora*

[3] $$\left\{\begin{array}{l} k\mu,\ k'\mu \textit{ sono iperomografie funzioni di } \mu \\ k(\mu + \nu) = k\mu + k\nu, \quad k(m\mu) = mk\mu \\ k'(\mu + \nu) = k'\mu + k'\nu, \quad k'(m\mu) = mk'\mu. \end{array}\right.$$

Dim. Essendo $\mu y x$ [cfr. n. 1] funzione lineare di x e di y esiste [cfr. Intr. II, n. 7, 1°] un solo operatore lineare λ, funzione di μ ed x soltanto tale che $\mu y x = \lambda y$; per la stessa ragione esiste un solo operatore λ' funzione soltanto di μ tale che $\lambda = \lambda' x$ e quindi $\mu y x = \lambda' x y$ in un sol modo: λ' è appunto l'operatore *lineare* che si è convenuto di indicare con $k\mu$, operatore funzione soltanto di μ. In modo analogo per $k'\mu$.

Per i prodotti funzionali di due o tre degli operatori K, k, k′ si hanno le formule notevoli seguenti e delle quali occorre spesso di far uso:

[4] $$\left\{\begin{array}{l} kk = 1, \quad k'k' = 1 \\ kk' = k'K = Kk \\ k'k = kK = Kk' \end{array}\right. ; \qquad [5] \left\{\begin{array}{l} k' = KkK = kKk \\ k\ = Kk'K = k'Kk' \\ K = kk'k\ = k'kk' \end{array}\right.$$

ove 1 rappresenta l'*iperomografia* **identità** e non il *numero* uno e nemmeno l'omografia identità $1\odot$.

---

(1) I due membri della [2] sono della forma, ben nota, $u \times \alpha$ con u vettore e α omografia, e sappiamo [cfr. n. 1] che $u \times \alpha$ è iperomografia. Volendo avere forma con soli vettori alla [2] si può sostituire la seguente

$$x \times (k'\mu) y z = y \times \mu x z \qquad \text{[cfr. n. 1, [2]]}$$

ma è più semplice e chiara la forma [2].

Dim. Applicando la [1] si ha:

$$(\mathrm{kk}\mu)xy = (\mathrm{k}\mu)yx = \mu xy$$

che per l'arbitrarietà di x e y dimostra che $\mathrm{kk} =$ identità.

Applicando invece la [2] si ha:

$$x \times (\mathrm{k}'\mathrm{k}'\mu)y = y \times (\mathrm{k}'\mu)x = x \times \mu y$$

e l'arbitrarietà di x, y dà appunto $\mathrm{k}'\mathrm{k}' = 1$.

Applicando le [1], [2] e il teorema di commutazione si ha:

$$z \times \mathrm{kk}'\mu xy = z \times \mathrm{k}'\mu yx = y \times \mu zx = x \times \mathrm{K}\mu zy = z \times \mathrm{k}'\mathrm{K}\mu xy,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = y \times \mathrm{k}\mu xz = z \times \mathrm{Kk}\mu xy,$$

che per l'arbitrarietà di x, y, z dimostrano le due formule del secondo gruppo delle [4].

In modo analogo per il terzo gruppo.

Dalle [4], 2° e 3° gruppo operando a destra o a sinistra con uno, opportuno, degli operatori k, k′, K, tenendo conto del 1° gruppo delle [4] e di $\mathrm{KK} = 1$ [cfr. § 1, n. 7, [5]] si hanno le [5]. Ad es., da $\mathrm{kk}' = \mathrm{k}'\mathrm{K}$ si ha $\mathrm{k}'\mathrm{kk}' = \mathrm{k}'\mathrm{k}'\mathrm{K} = \mathrm{K}$, ecc.

Se α è *omografia* e μ è *iperomografia* si hanno da considerare le due iperomografie $\mu\alpha$, $\alpha\mu$, alle quali si possono applicare, ed è spesso utile farlo, gli operatori K, k, k′. Si ottengono così sei nuove iperomografie; quattro di queste si esprimono mediante α, μ e gli operatori ora indicati; per le due rimanenti si devono [a meno di introdurre un altro operatore; cfr. *Espaces courbes*, l. c.] considerare le *omografie* che si ottengono applicandole ad un vettore generico x. Si hanno le formule:

[6]
$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{K}(\mu\alpha) = \mathrm{K}\mu\cdot\alpha & \text{[cfr. n. 2, [3]]} \\ \mathrm{k}\,(\alpha\mu) = \alpha\cdot\mathrm{k}\mu & \\ \mathrm{k}'(\mu\alpha) = \mathrm{K}\alpha\cdot\mathrm{k}'\mu, & \mathrm{k}'(\alpha\mu) = \mathrm{k}'\mu\cdot\mathrm{K}\alpha \end{array}\right.$$

[7]
$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{K}(\alpha\mu)x = \mathrm{K}\mu x\cdot\mathrm{K}\alpha \\ \mathrm{k}\,(\mu\alpha)x = (\mathrm{k}\mu x)\alpha. \end{array}\right.$$

Dim. [6]. La prima è già nota. Per le altre si ha dalle [1], [2], da altre proprietà ben note, e ricordando che dal teorema di commutazione si ha $x \times \alpha = (\mathrm{K}\alpha x)\times$:

$$\mathrm{k}(\alpha\mu)xy = \alpha\mu yx = \alpha\cdot\mathrm{k}\mu xy;$$
$$x \times \mathrm{k}'(\mu\alpha)y = y \times \mu\alpha x = (\alpha x) \times \mathrm{k}'\mu y = x \times \mathrm{K}\alpha\cdot\mathrm{k}'\mu y;$$
$$x \times \mathrm{k}'(\alpha\mu)y = y \times \alpha\mu x = (\mathrm{K}\alpha y) \times \mu x = x \times \mathrm{k}'\mu\cdot\mathrm{K}\alpha y; \text{ c. d. d.}$$

Dim. [7]. $\mathrm{K}(\alpha\mu)x = \mathrm{K}(\alpha\cdot\mu x) = \mathrm{K}\mu x\cdot\mathrm{K}\alpha$;

$$\mathrm{k}(\mu\alpha)xy = (\mu\alpha)yx = \mu\cdot\alpha y\cdot x = \mathrm{k}\mu x\cdot\alpha y; \text{ c. d. d.}$$

Se u è vettore, per la iperomografia $u\times$ si ha:

[8] $$\mathrm{k}(u\times)x = \mathrm{H}(u, x),$$

[9] $$\mathrm{k}'(u\times)x = \mathrm{H}(x, u),$$

[10] $$\mathrm{I}_1\mathrm{k}(u\times) = \mathrm{I}_1\mathrm{k}'(u\times) = u\times,$$

dalle quali, per α omografia, possono subito ottenersi le formule, apparentemente più generali, per la iperomografia $u\times\alpha$ ricordando che $u\times\alpha = (\mathrm{K}\alpha u)\times$.

Dim. $\mathrm{k}(u\times)xy = (u\times)y\cdot x = u\times y\cdot x = \mathrm{H}(u, x)y$;

$$\mathrm{k}'(u\times)x = \mathrm{k}'\mathrm{K}(u\times)x = \mathrm{K}\mathrm{k}(u\times)x = \mathrm{K}\mathrm{H}(u, x) = \mathrm{H}(x, u);$$
$$\mathrm{I}_1\mathrm{k}(u\times)x = \mathrm{I}_1\mathrm{H}(u, x) = u\times x. \text{ ecc.; c. d. d.}$$

Per gli operatori I_1, V, k si ha la formula notevole:

[11] $$\mathrm{I}_1\mathrm{V}\mu = -\mathrm{I}_1\mathrm{V}\mathrm{k}\mu.$$

Dim. Sia i, j, k il solito sistema unitario-ortogonale. Essendo x vettore arbitrario si ha [cfr. § 1, n. 9, [7]]

$$2\mathrm{V}\mu x = i\wedge\mu x i + \ldots = (i\wedge\mathrm{k}\mu i + \ldots)x$$

e quindi per l'arbitrarietà di x

(a) $2\mathrm{V}\mu = i\wedge\mathrm{k}\mu i + j\wedge\mathrm{k}\mu j + k\wedge\mathrm{k}\mu k$ [cfr. con formula ora citata].

Dalla (a) si ha [cfr. § 4, n. 2, [1]]

$$2\mathrm{I}_1\mathrm{V}\mu = -2i\times\mathrm{V}\mathrm{k}\mu i - \ldots = -2\{i\times(\mathrm{V}\mathrm{k}\mu)i + \ldots\} =$$
$$= -2\mathrm{I}_1\mathrm{V}\mathrm{k}\mu; \text{ c. d. d.}$$

4. Operatore v per le iperomografie.

Sia μ una *iperomografia*. Chiameremo ***vettore di*** μ e lo indicheremo con la notazione

$$\mathrm{v}\mu$$

quel *vettore*, funzione di μ e tale che:

[1] $(\mathrm{v}\mu) \times x = \mathrm{I}_1 \mathrm{k}' \mu x$ qualunque sia il *vettore* x,

ovvero, il che equivale, tale che

[1'] $$(\mathrm{v}\mu) \times = \mathrm{I}_1 \mathrm{k}' \mu$$

vale a dire tale che: *il prodotto interno di esso* $(\mathrm{v}\mu)$ *per un qualsiasi vettore* x *è il* **primo invariante** *della omografia che si ottiene applicando ad* x *la iperomografia* $\mathrm{I}_1 \mathrm{k}' \mu$.

Interessa stabilire subito che: $\mathrm{v}\mu$, *il vettore della iperomografia* μ, *è un vettore funzione di* μ *soltanto ed univocamente determinato.*

Dim. L'iperomografia $\mathrm{I}_1 \mathrm{k}' \mu$ è funzione di μ soltanto; il *numero* $\mathrm{I}_1 \mathrm{k}' \mu x$ è funzione *lineare* di x e quindi [Intr. II, n. 7, 1°] esiste un solo vettore u tale che $u \times x = \mathrm{I}_1 \mathrm{k}' \mu x$ per x vettore arbitrario. Tale vettore u è appunto il $\mathrm{v}\mu$; c. d. d.

E non è meno interessante stabilire in modo ben chiaro che: l'*operatore* v *è* **operatore lineare** *tra* **iperomografie** *e* **vettori.**

Dim. Che è *operatore tra iperomografie e vettori* risulta dalla definizione e dal teorema precedente; che è *lineare* risulta dalla [1] od [1'] ricordando che I_1, k' sono operatori lineari.

Tra le molte proprietà dell'operatore v citiamo quelle espresse dalle formule seguenti, nelle quali μ è *iperomografia* e α è *omografia.*

[2] $\mathrm{v}(u \times) = u$, o anche $\mathrm{v}(u \times \alpha) = \mathrm{K}\alpha u$.

Dalla [1'] e dalla [10] del n. 3 si ha:

$$\{\mathrm{v}(u \times)\} \times = \mathrm{I}_1 \mathrm{k}'(u \times) = u \times; \text{ c. d. d.}$$

[3] $$\mathrm{v}\mathrm{k}\mu = \mathrm{v}\mu.$$

Le iperomografie μ, $\mathrm{k}\mu$ *hanno a comune il vettore; e questa proprietà è notevolmente importante.*

Dim. Si ha [cfr. [1']; n. 3, [4]; § 1, n. 7, [8]]

$$(\mathrm{v}\mathrm{k}\mu) \times = \mathrm{I}_1 \mathrm{k}'\mathrm{k}\mu = \mathrm{I}_1 \mathrm{K}\mathrm{k}'\mu = \mathrm{I}_1 \mathrm{k}'\mu = (\mathrm{v}\mu) \times; \text{ c. d. d.}$$

Invece le iperomografie μ, $k'\mu$, $K\mu$ non hanno a comune il vettore e si hanno le formule

$$[4] \qquad vk'\mu = vI_1\mu, \quad vK\mu = vI_1k\mu$$

le quali provano che $k'\mu$ e $I_1\mu$ hanno lo stesso vettore come anche $K\mu$ e $I_1k\mu$.

Dim. Come per la [3] si ha:

$$(vk'\mu)\times = I_1k'k'\mu = I_1\mu,$$
$$(vK\mu)\times = I_1k'K\mu = I_1Kk\mu = I_1k\mu\,;$$

operando con v nei due membri estremi e tenendo conto della formula [3] si ottengono le [4].

$$[5] \qquad v(\alpha\mu) = \alpha\cdot v\mu.$$

Il vettore di $\alpha\mu$ (*cioè del prodotto funzionale della iperomografia* μ *per l'omografia* α) *è il vettore che si ottiene applicando* α *al vettore di* μ; proprietà assai semplice ed importante.

Dim. Si ha successivamente [cfr. [1]; n. 3, [6]]

$$v(\alpha\mu)\times x = I_1k'(\alpha\mu)x = I_1k'\mu\cdot K\alpha x = v\mu\times K\alpha x = (\alpha\cdot v\mu)\times x, \quad \text{c. d. d.}$$

Per la iperomografia $\mu\alpha$ si hanno le formule, meno semplici,

$$[6'] \qquad v(\mu\alpha) = v(k\mu\cdot K\alpha) = vK(\alpha\cdot K\mu) = vK(K\mu\cdot\alpha)$$

e che il lettore può dimostrare per esercizio.

Quando α è una *diade* la [6'] prende una forma assai semplice e si ha anche una formula notevole per l'operatore V:

$$[6] \qquad v\{\mu\cdot H(u, v)\} = \mu v u, \quad 2Vk\{\mu\cdot H(u, v)\} = u\wedge\mu v.$$

Dim. (a) Applicando formule ben note si ha successivamente:

$$v\,|\,\mu\cdot H(u,v)\,|\times x = I_1k'\,|\,\mu\cdot H(u,v)\,|\,x = I_1H(v,u)\cdot k'\mu\cdot x =$$
$$= I_1H\,|\,Kk'\mu x v, u\,| = u\times Kk'\mu x v = u\times kK\mu x v =$$
$$= u\times K\mu v x = x\times\mu v u,$$

e per l'arbitrarietà di x si ha la 1ª delle [6].

O anche volendo far uso della [8] seguente

$$\mathrm{v}\{\mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{ii} + ... = \mu \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + ...) = \mu \boldsymbol{vu},$$

che dimostra pure la prima delle [6].

(*b*) Si ha:

$$\mathrm{k}\{\mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\}\, \boldsymbol{xy} = \{\mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\}\, \boldsymbol{yx} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{y} \cdot \mu \boldsymbol{vx} = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \mu \boldsymbol{vx})\boldsymbol{y}$$

e quindi per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{y}$,

$$\mathrm{k}\{\mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\}\, \boldsymbol{x} = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \mu \boldsymbol{vx});$$

applicando 2V ai due membri si ha

$$[2\mathrm{Vk}\{\mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\}]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \wedge \mu \boldsymbol{vx}$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}$ dimostra la 2ª delle [6].

È di notevole importanza il teorema seguente.

Se l' **iperomografia** μ *è operatore tra* **vettori** *e* **numeri,** *cioè, per* $\boldsymbol{x}$ *vettore arbitrario,* $\mu \boldsymbol{x}$ *è* **numero,** *allora per il* **vettore** *di* μ *si ha:*

[7] $$(\mathrm{v}\mu) \times = \mu, \quad \text{cioè} \quad (\mathrm{v}\mu) \times \boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{x}.$$

Dim. Se $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ è terna unitaria-ortogonale e teniamo presente che, per le ipotesi fatte, $\mu \boldsymbol{i}$, $\mu \boldsymbol{j}$, $\mu \boldsymbol{k}$ sono *numeri,* allora applicando la [1] si ha:

$$\begin{aligned}(\mathrm{v}\mu) \times \boldsymbol{x} &= \mathrm{I}_1 \mathrm{k}'\mu \boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} \times (\mathrm{k}'\mu \boldsymbol{x})\boldsymbol{i} + ... + = \\ &= \boldsymbol{x} \times (\mu \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + ... + ... = \mu \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{i} + ... + ... = \\ &= \mu(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + ... + ...) = \mu \boldsymbol{x}; \text{ c. d. d.}\end{aligned}$$

Infine, essendo μ iperomografia qualunque e $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ terna unitaria-ortogonale, si ha la seguente espressione di $\mathrm{v}\mu$, della quale non è peraltro necessario in generale di far uso:

[8] $$\mathrm{v}\mu = \mu \boldsymbol{ii} + \mu \boldsymbol{jj} + \mu \boldsymbol{kk}.$$

Dim. $$\begin{aligned}(\mathrm{v}\mu) \times \boldsymbol{x} &= \mathrm{I}_1 \mathrm{k}'\mu \boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} \times (\mathrm{k}'\mu \boldsymbol{x})\boldsymbol{i} + ... + ... = \\ &= \boldsymbol{x} \times (\mu \boldsymbol{ii} + ... + ...); \text{ c. d. d.}\end{aligned}$$

La [8] può del resto essere utilmente applicata in taluni casi; e ne diamo ora un esempio.

Essendo μ una *iperomografia*, è noto che $V\mu$ è una *omografia*. In conseguenza $VV\mu$ è un *vettore*. Ora per tale vettore si ha:

$$[9] \qquad 4VV\mu = v(I_1 k\mu - k\mu).$$

Dim. Si è trovato [cfr. § 6, n. 3, [10], (*a*) della Dim.]

$$2V\mu = \boldsymbol{i} \wedge k\mu\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots$$

col noto significato di $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Allora si ha [cfr. § 4, n. 2, [3]]

$$\begin{aligned} 4VV\mu &= (I_1 k\mu\boldsymbol{i} - k\mu\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots \\ &= I_1 k\mu\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots - k\mu\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} - \ldots - \ldots \end{aligned}$$

che per la [8] dà subito la [9].

Nelle stesse ipotesi per μ si ha che, per $\boldsymbol{u}$ vettore *arbitrario*,

$$[10] \quad \begin{cases} \mu\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = 0 & \text{solamente quando} \quad (1 + k)\mu = 0 \\ \boldsymbol{u} \times \mu\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = 0 & \text{»} \qquad \text{»} \qquad (1 + k)(1 + k + Kk)\mu = 0 \end{cases}$$

come il lettore può dimostrare per esercizio [1].

Nota I. Omografie e iperomografie nel piano.

Resta stabilito che in questa nota $\boldsymbol{k}$ è un *vettore unitario*, e che si considerano i *vettori normali a $\boldsymbol{k}$*, i quali formano un *sistema lineare a due dimensioni*. Si ammettono note le proprietà degli operatori i, $x + iy$, $e^{i\varphi}$, e le osservazioni relative alla notazione *incompleta* i e alla *impossibilità* di **identificare** i all'ente algebrico $\sqrt{-1}$ [cf.r E. C. V., pp. 57-72; pp. 225-238].

1. Un *operatore lineare* che trasformi *vettori normali a $\boldsymbol{k}$* in *vettori normali a $\boldsymbol{k}$* si chiamerà ancora **omografia vettoriale,** nel campo dei vettori normali a $\boldsymbol{k}$. Se α è una di tali omografie, la notazione αx ha significato *nel solo caso che x sia vettore normale a $\boldsymbol{k}$*; negli altri casi è priva di significato perchè il *campo di applicabilità di α* è costituito dai *soli vettori normali*

---

[1] Analogamente, se α è omografia, si ha $\boldsymbol{u} \times \alpha\boldsymbol{u} = 0$, per $\boldsymbol{u}$ vettore arbitrario, solamente quando $D\alpha = 0$, cioè $(1 + K)\alpha = 0$.

a k. Se x, y, φ sono numeri reali, allora i, $x+\mathrm{i}y$, $e^{\mathrm{i}\varphi}$, tutte del tipo generico $x+\mathrm{i}y$, sono omografie per i soli vettori normali a k.

In tutto ciò che segue intendiamo, — senza bisogno di ripeterlo esplicitamente in ogni caso, — che α, β, ... sono omografie per i vettori normali a k; m, n, φ, x, y,... sono numeri reali; a,... u,... x,... vettori normali a k. Come pure dicendo semplicemente *omografia* intendiamo *omografia per i vettori normali a* k. Inoltre indicheremo con i, j, k una terna *unitaria-ortogonale-positiva*, e, naturalmente, i ed j saranno normali a k.

2. Le omografie *proprie* o *degeneri*, le *direzioni nulle*, le *direzioni doppie* si definiscono come per le omografie generali nel campo a tre dimensioni [cfr. Cap. I, § 1, nn. 1, 2, 3], e si ritrovano, in modo ovvio, proprietà analoghe a quelle note; sebbene in un campo più ristretto; ad es., se α è degenere, αx ha direzione (se non è nullo) indipendente da x.

Per gli invarianti, abbiamo soltanto I_1 e I_2; si ha [cfr. Cap. I, § 1, n. 4).

$$(1)\qquad \begin{cases} u\wedge v\times k\cdot \mathrm{I}_1\alpha = v\wedge k\times \alpha u + k\wedge u\times \alpha v, \\ u\wedge v\times k\cdot \mathrm{I}_2\alpha = (\alpha u)\wedge(\alpha v)\times k \end{cases}$$

e in particolare per il sistema i, j, k.

$$(2)\qquad \mathrm{I}_1\alpha = i\times\alpha i + j\times \alpha j,\quad \mathrm{I}_2\alpha = (\alpha i)\wedge(\alpha j\times k,$$

dalle quali si ha, per m numero,

$$(2')\qquad \mathrm{I}_1 m = 2m,\quad \mathrm{I}_2 m = m^2.$$

Dalle (1), e come si è fatto per le omografie generali [cfr. Cap. I, § 1, n. 6] si ottiene per α la *identità del 2° grado*

$$(3)\qquad \alpha^2 - \mathrm{I}_1\alpha\cdot\alpha + \mathrm{I}_2\alpha = 0.$$

La α è *degenere* [cfr. Cap. I, § 1, n. 5] solamente quando $\mathrm{I}_2\alpha = 0$.

Per la *coniugata* di α sussiste ancora il *teorema di commutazione*,

$$(4)\qquad x\times\alpha y = y\times \mathrm{K}\alpha x$$

con tutte le proprietà di K [cfr. Cap. I, § 1, n. 7]; avendosi inoltre:

$$(5)\qquad \mathrm{Ki} = -\mathrm{i},\quad \mathrm{K}(x+\mathrm{i}y) = x-\mathrm{i}y,\quad \mathrm{K}e^{\mathrm{i}\varphi} = e^{-\mathrm{i}\varphi}.$$

Per gli operatori D, V si ha ancora [cfr. Cap. 1, § 1, nn. 8, 9]

(6) $$\mathrm{D}\alpha = (\alpha + \mathrm{K}\alpha)/2, \quad 2\mathrm{V}\alpha \times x \wedge y = y \times \alpha x - x \times \alpha y;$$

e da quest'ultima risulta ancora

(7) $$2\mathrm{V}\alpha = i \wedge \alpha i + j \wedge \alpha j$$

la quale prova che $\mathrm{V}\alpha$ è vettore parallelo a k, cioè che

(8) $$\mathrm{V}\alpha = k \times \mathrm{V}\alpha \cdot k.$$

In conseguenza per la scomposizione di α in due parti, una della quali è $\mathrm{D}\alpha$, si ha:

(9) $$\alpha = \mathrm{D}\alpha + k \times \mathrm{V}\alpha \cdot \mathrm{i}, \quad \mathrm{K}\alpha = \mathrm{D}\alpha - k \times \mathrm{V}\alpha \cdot \mathrm{i}.$$

3. Esaminiamo le omografie particolari [cfr. Cap. I, § 2].

La generica *assiale*, $u\wedge$, si riduce nel campo dei vettori normali a k ad un *multiplo di* i, cioè è della forma $m\mathrm{i}$.

Le *dilatazioni* ammettono (almeno) *due elementi uniti ortogonali*, cioè sono della forma generica $\alpha = \begin{pmatrix} mi, & nj \\ i, & j \end{pmatrix}$.

Per le *diadi* si conservano notazioni e proprietà; soltanto si ha

(10) $$\mathrm{H}(i, i) + \mathrm{H}(j, j) = 1, \quad \text{esattamente } 1\odot$$

non comparendo più il vettore k [cfr. Cap. I, § 2, n. 7, [3]].

Si possono considerare le *coniche indicatrici*, ecc.

4. L'omografia α è sempre riduttibile alla forma generica

(11) $$\begin{cases} \alpha = m + n\mathrm{i} + s\mathrm{H}(a, a) = re^{\mathrm{i}\varphi} + s\mathrm{H}(a, a) \\ \text{essendo } a \text{ vettore unitario normale a } k. \end{cases}$$

Dim. Siccome $\mathrm{D}\alpha$ è una *dilatazione* si ha, dalla (10),

$$\mathrm{D}\alpha = \begin{pmatrix} pi, & qj \\ i, & j \end{pmatrix} = p\mathrm{H}(i, i) + q\mathrm{H}(j, j) = q + (p - q)\mathrm{H}(i, i);$$

allora per la 1ª delle (9) si ha per α appunto la forma (11).

La (11) prova che: *l'omografia generica α è la somma di un* **quaternione di asse** k *con una* **diade.** Dunque i *quaternioni* **non possono dare da soli tutte le omografie per i vettori normali a** k; il che è contrario alla pretesa dei quaternionisti di ottenere tutto il calcolo omografico per mezzo di quaternioni.

Dalla forma (11) si trae subito

$$i\alpha - \alpha i = s \{ \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, i\boldsymbol{a}) + \mathrm{H}(i\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \}$$

e quindi si ha $i\alpha = \alpha i$ solamente quando $s = 0$, vale a dire:

l'omografia α è un quaternione nel solo caso che essa sia **commutabile** *col quaternione* i.

5. L'operatore R [cfr. Cap. I, § 3] non ha il suo corrispondente per i vettori normali a $\boldsymbol{k}$, perchè $(\alpha\boldsymbol{x}) \wedge \alpha\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ sono entrambi vettori paralleli a $\boldsymbol{k}$.

Nel campo dei vettori normali a $\boldsymbol{k}$ la $\mathrm{R}\alpha$ viene, in parte, sostituita dalla $\mathrm{C}\alpha$, ciclica di α,

$$\mathrm{C}\alpha = \mathrm{I}_1\alpha - \alpha \tag{12}$$

poichè dalla (3) si ha subito

$$\alpha \cdot \mathrm{C}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha \tag{13}$$

e quindi per α invertibile, cioè $\mathrm{I}_2\alpha \neq 0$,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\mathrm{I}_2\alpha}\,\mathrm{C}\alpha. \tag{14}$$

6. Per le *isomerie* si hanno ancora le condizioni

$$\mathrm{I}_2\alpha = \pm 1, \quad \alpha \cdot \mathrm{K}\alpha = \mathrm{K}\alpha \cdot \alpha = 1$$

e quindi:

per $\mathrm{I}_2\alpha = +1$ la α è della forma $e^{i\varphi}$;
per $\mathrm{I}_2\alpha = -1$ la α è della forma $2\mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - 1$ con $\boldsymbol{a}^2 = 1$.

Le *similitudini* sono ancora i prodotti delle *isomerie* per *numeri*.

7. Per le *iperomografie*, e, in generale, per le *omografie di ordine m*, sussiste quanto si è fatto nel campo vettoriale a tre dimensioni [cfr. Cap. I, § 6], naturalmente quando i vettori cui si applicano le iperomografie ecc. sono tutti vettori normali a $\boldsymbol{k}$. [Cfr. anche il citato libro ***Espaces courbes*** ecc.].

Esercizi.

[1] $\mathrm{I}_1 m = 2m$, $\mathrm{I}_2 m = m^2$, $\mathrm{C}m = 2m$, $\mathrm{K}m = m$, $\mathrm{D}m = m$, $\mathrm{V}m = 0$

[2] $\mathrm{I}_1 i = 0$, $\mathrm{I}_2 i = 1$, $\mathrm{C}i = -i$, $\mathrm{K}i = -i$, $\mathrm{D}i = 0$, $\mathrm{V}i = \boldsymbol{k}$

[3] $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{I}_1 e^{i\varphi} = 2\cos\varphi,\ \mathrm{I}_2 e^{i\varphi} = 1,\ \mathrm{C}e^{i\varphi} = e^{-i\varphi} \\ \mathrm{K}e^{i\varphi} = e^{-i\varphi},\ \mathrm{D}e^{i\varphi} = \cos\varphi,\ \mathrm{V}e^{i\varphi} = \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{k} \end{array} \right.$

[4] $\begin{cases} \text{Se } \alpha = re^{i\varphi} + s\mathrm{H}(a, a) \text{ con } a^2 = 1 \text{ si ha:} \\ \mathrm{K}\alpha = re^{-i\varphi} + s\mathrm{H}(a, a),\ \mathrm{D}\alpha = r\cos\varphi + s\mathrm{H}(a, a),\ \mathrm{V}\alpha = r \operatorname{sen}\varphi \cdot k \\ \mathrm{I}_1\alpha = 2\cos\varphi + s,\ \mathrm{I}_2\alpha = r^2 + rs\cos\varphi \end{cases}$

[5] $\mathrm{C}^2\alpha = \alpha,\ \mathrm{C}^{-1}\alpha = \mathrm{C}\alpha,\ \mathrm{C}\alpha^2 = (\mathrm{I}_1\alpha)^2 - \mathrm{I}_1\alpha\cdot\alpha - \mathrm{I}_2\alpha,\ \mathrm{C}\alpha^{-1} = \alpha/\mathrm{I}_2\alpha$

[6] $\mathrm{I}_2(\alpha + \beta) = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_2\beta + \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{I}_1\beta - \mathrm{I}_1(\alpha\beta) =$
$= \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_2\beta + \mathrm{I}_1(\alpha\cdot\mathrm{C}\beta + \beta\cdot\mathrm{C}\alpha)/2$

[7] $\mathrm{I}_2(\beta\alpha) = \mathrm{I}_2\beta\cdot\mathrm{I}_2\alpha,\ 2\mathrm{V}(\beta\alpha) = 2\mathrm{V}(\mathrm{D}\beta\cdot\mathrm{D}\alpha) + \mathrm{I}_1\beta\cdot\mathrm{V}\alpha + \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{V}\beta,$
$\mathrm{V}\alpha^2 = \mathrm{I}_1\alpha\cdot\mathrm{V}\alpha$

[8] Se, e solo in tal caso, $(\mathrm{I}_1\alpha)^2 - 4\mathrm{I}_2\alpha \gtreqless 0$ l'omografia α ammette direzioni unite che sono quelle dei vettori

$$2\alpha x - \{\mathrm{I}_1\alpha \pm \sqrt{(\mathrm{I}_1\alpha)^2 - 4\mathrm{I}_2\alpha}\}x$$

essendo x vettore arbitrario normale a k.

[9] Esiste una, ed una sola, omografia λ nel campo a tre dimensioni, tale che $\lambda x = \alpha x$, $\mathrm{K}\lambda x$ normale a k per x normale a k e $\lambda k = 0$. La omografia λ si chiamerà *generalizzata di* α, e si indicherà con la notazione $G\alpha$.

[10] $\begin{cases} G\alpha = G\beta \text{ solamente quando } \alpha = \beta \\ G(\alpha + \beta) = G\alpha + G\beta, \quad G(m\alpha) = mG\alpha, \quad G(\alpha\beta) = G\alpha\cdot G\beta \\ G\alpha^n = (G\alpha)^n \text{ per } n \text{ intero positivo} \end{cases}$

[11] $\begin{cases} G\mathrm{i} = k\wedge, \quad Gm = m\{1 - \mathrm{H}(k, k)\} \\ Ge^{i\varphi} = \cos\varphi\cdot\{1 - \mathrm{H}(k, k)\} + \operatorname{sen}\varphi\cdot k\wedge \end{cases}$

[12] $\begin{cases} \mathrm{Rotor}(\varphi, k) = Ge^{i\varphi} + \mathrm{H}(k, k) \\ \mathrm{aRotor}(\varphi, k) = Ge^{i\varphi} - \mathrm{H}(k, k) \end{cases}$ [cfr. Cap. I, § 5, n. 3, [1], [2]]

[13] $G\alpha^{-1} = \dfrac{\mathrm{I}_1\alpha}{\mathrm{I}_2\alpha}\{1 - \mathrm{H}(k, k)\} - \dfrac{1}{\mathrm{I}_2\alpha}G\alpha,$ per α invertibile

[14] $\begin{cases} \mathrm{I}_r\alpha = \mathrm{I}_r G\alpha, \quad r = 1,\ 2 \\ G\mathrm{K}\alpha = \mathrm{K}G\alpha, \quad G\mathrm{D}\alpha = \mathrm{D}G\alpha, \quad \mathrm{V}G\alpha = \mathrm{V}\alpha. \end{cases}$

Nota II. Forme cartesiane.

Un sistema cartesiano di riferimento si stabilisce sotto *forma assoluta* dando: un punto O, *origine delle coordinate*; tre vettori *unitari*, i, j, k *non complanari* ($i\wedge j \times k \neq 0$) che individuano i tre *assi* e le loro *direzioni positive* e *negative*. Per un punto qualunque P e per un vettore u si ha

(a) $\qquad P = O + xi + yj + zk, \quad u = ai + bj + ck$

e x, y, z (esattamente 1, x, y, z) sono le *coordinate di* P rispetto al sistema O, i, j, k e a, b, c sono le *coordinate di* u rispetto al sistema i, j, k.

Le (a) hanno ancora *forma assoluta*, come *sono assoluti gli elementi di riferimento*; non solo: nelle (a) *compariscono gli elementi di riferimento*, mentre quando si fa uso delle forme ordinarie cartesiane si hanno soltanto i numeri x, y, z, ovvero a, b, c e gli elementi di riferimento sono sottintesi con possibilità di equivoci.

Se nelle questioni da noi sviluppate nel Cap. I si fa uso delle forme (a), allora si passa dalle *forme assolute* a *forme miste cartesiane* e si può passare da quelle alle *forme puramente cartesiane* nelle quali non rimane più traccia degli elementi di riferimento.

In questa Nota diamo alcuni esempi di *forma mista cartesiana* con un *duplice scopo*: fornire al lettore, che conosce soltanto i metodi cartesiani, un confronto fra questi e le forme assolute; passare dalle forme cartesiane ordinarie (ridotte prima a forme miste con le (a)) alle forme assolute. Si intenda però bene che è da *sconsigliarsi* l'uso *sistematico* delle coordinate, o anche seguire il deplorevole sistema di alcuni autori che trattano *prima* le questioni con le coordinate e *poi* passano ai vettori, cioè alle forme assolute.

Se i, j, k sono vettori non complanari allora l'omografia α è determinata quando siano dati i *nove* numeri a_{rs} tali che

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha i = a_{11} i + a_{12} j + a_{13} k \\ \alpha j = a_{21} i + a_{22} j + a_{23} k \\ \alpha k = a_{31} i + a_{32} j + a_{33} k. \end{cases}$$

Le relazioni (1) sono *assolute*; non conviene peraltro assumerle per *definire* la omografia α. Dalle (1), assolute, si passa al *quadro*, o *matrice*

$$(1') \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

che, quando si fa uso di *sole coordinate*, si dice che *rappresenta* (come?, perchè?, quali sono gli elementi di riferimento?) un'omografia α. Si capisce che il *quadro simbolico* (1'), oltre che essere ingombrante non può comparire, come α, nei calcoli e nelle formule.

In tutto ciò che segue noi supponiamo che $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sia sistema *unitario-ortogonale-positivo*, (coordinate cartesiane *ortogonali*) facendo notare che in quelle formule assolute nelle quali comparisce un numero *pari* di volte uno dei vettori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, si può anche considerare il sistema *negativo*. Il lettore può considerare il caso $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sistema unitario non ortogonale (coordinate cartesiane *oblique*) e troverà formule così complesse da risultare doppiamente inservibili.

Qualunque sia il vettore $\boldsymbol{u}$ si ha identicamente [E. C. V.]

$$\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \times \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \times \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \times \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{k} =$$
$$= \boldsymbol{u} \times \alpha\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{u} \times \alpha\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{u} \times \alpha\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k};$$

ponendo al posto di $\boldsymbol{u}$ successivamente $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ si ottengono i vettori $\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{i}$, $\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{j}$, $\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{k}$, sotto la forma (1) cambiando le a_{rs} in a_{sr}, e lo stesso (cambiando le linee in colonne e viceversa) nel quadro simbolico (1'); e si ha così il passaggio cartesiano da α alla sua coniugata.

Se, ancora, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ è sistema unitario-ortogonale-positivo e α è una isomeria, allora la condizione semplice $\alpha \cdot \mathrm{K}\alpha = 1$, dà ancora per il quadro (1') le forme complesse

$$a_{r1}^2 + a_{r2}^2 + a_{r3}^2 = 1,\ a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + a_{r3}a_{s3} = 0,\ \text{per } r, s = 1, 2, 3 \text{ ed } r \neq s$$
$$a_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad a_{12} = \ldots,\ \text{ecc.}$$

Dalle [2] del § 1, n. 4 si ha subito

(2) $$\mathrm{I}_1\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

(3) $$\mathrm{I}_2\alpha = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(4) $$\mathrm{I}_3\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

i secondi membri di queste si presentano nei calcoli cartesiani sotto la forma *complessa* ora data; dimostratane l'invarianza (lungo calcolo con determinanti) si possono *abbreviare* con le notazioni dei primi membri; ma anche ciò fatto non si evita la forma complessa effettiva e non si ha il significato geometrico degli invarianti di α.

Ricordando che $R\alpha i = R\alpha(j \wedge k) = (\alpha j) \wedge \alpha k$ si ha subito

$$(5)\qquad \begin{cases} R\alpha i = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} k \\ R\alpha j = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R\alpha k = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

forme (sebbene miste) assai complesse e per le quali si intendono ripetute le osservazioni fatte sopra a proposito degli invarianti.

Si noti che il quadro simbolico (1′) per la $R\alpha$ ha per elementi dei determinanti del 2° ordine. Si noti pure quali lunghi calcoli di determinanti occorrerebbe fare per determinare le semplici relazioni [cfr. § 3, n. 3] tra gli invarianti di α e di $R\alpha$.

Per il vettore di α si ha [cfr. § 1, n. 9]

$$(6)\qquad 2V\alpha = (a_{23} - a_{32})i + (a_{31} - a_{13})j + (a_{12} - a_{21})k$$

e quindi il quadro (1′) dice che α è *dilatazione* ($V\alpha = 0$) solamente quando $a_{rs} = a_{sr}$ per $r, s = 1, 2, 3$.

Ricordando [cfr. § 1, n. 10] che $D\alpha = \alpha - (V\alpha)\wedge$ si ha:

$$(7)\qquad \begin{cases} D\alpha i = a_{11} i + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})j + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})k \\ D\alpha j = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D\alpha k = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

altra forma complessa.

Di qui risulta che α è *assiale*, cioè $D\alpha = 0$, solamente quando

$$a_{rr} = 0, \text{ per } r = 1, 2, 3 \text{ e } a_{rs} = -a_{sr} \text{ per } r \neq s \text{ e } r, s = 1, 2, 3,$$

che si compendiano in

$$a_{rs} + a_{sr} = 0 \text{ per } r, s = 1, 2, 3;$$

in tale ipotesi si ha dalla (6)

$$V\alpha = a_{23} i + a_{31} j + a_{12} k.$$

Se in luogo di i, j, k scriviamo i_1, i_2, i_3 allora (cfr. § 2, n. 7] si ha

$$(8)\qquad \alpha = \Sigma a_{rs} H(i_r, i_s), \; r, s = 1, 2, 3.$$

La (8) dà l'omografia α mediante le *nove* diadi indipendenti $H(i_r, i_s)$ e i *nove* numeri a_{rs} che, *rispetto* alle diadi $H(i_r, i_s)$, sono le coordinate di α. Forma estremamente complessa; ed è quella usata sistematicamente dal GIBBS.

Alcune forme assolute semplicissime tradotte in coordinate dànno luogo ad *identità* dalle quali non risulta più il carattere geometrico degli enti geometrici. Prendiamo, ad es., il *teorema di commutazione*

$$(a') \qquad u \times \alpha u' = u' \times K\alpha u;$$

al posto dei vettori u, u' poniamo

$$u = ai + bj + ck, \quad u' = a'i + b'j + c'k,$$

sostituiamo nella (a') tenendo conto delle (1) per α e delle analoghe per $K\alpha$; si ha *l'identità*:

$$\begin{aligned}(aa'a_{11} + ab'a_{21} + ac'a_{31}) + (ba'a_{12} + bb'a_{22} + bc'a_{32}) +\\ + (ca'a_{13} + cb'a_{23} + cc'a_{33}) = (a'aa_{11} + a'ba_{12} + a'ca_{13}) +\\ + (b'aa_{21} + b'ba_{22} + b'ca_{23}) + (c'aa_{31} + c'ba_{32} + c'ca_{33})\end{aligned}$$

e non crediamo sia necessario insistere sul *non valore* di questa complessa identità (1).

Le ordinarie formule

$$(8) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\ y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

---

(1) Il teorema di commutazione trovasi sotto forma cartesiana (per il caso di n dimensioni) in Jacobi (*Werke*, t. III, pag. 26), il quale considera le coordinate dei vettori

$$(a) \qquad u = \alpha x, \quad v = K\alpha y$$

e dice che tali coordinate formano due sistemi *coniugati* di funzioni lineari omogenee delle coordinate dei vettori x e y; poi osserva che tali sistemi sodisfano alla relazione

$$(b) \qquad y \times u = x \times v \quad \text{cioè} \quad (b') \qquad y \times \alpha x = x \times K\alpha y.$$

Viceversa, se si ha $u = \alpha x$, $v = \beta y$, e si suppone verificata la (b), si trae $\beta = K\alpha$, quindi le coordinate dei vettori u, v formano due sistemi *coniugati*.

che rappresentano in forma cartesiana una sostituzione lineare (od omografia) si possono ridurre molto facilmente a forma assoluta.

Considerando l'omografia vettoriale α definita dalle (1) e ponendo:

$$P' = O + y_1 i + y_2 j + y_3 k, \quad P = O + x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

poi moltiplicando le (1) per x_1, x_2, x_3 e sommando si ha, tenendo conto delle (8):

$$\alpha(P - O) = P' - O, \tag{9}$$

quest'unica formula semplicissima equivale alle (8).

Se α è invertibile, cioè $\mathrm{I}_3\alpha \neq 0$ si ha dalle (9):

$$P - O = \alpha^{-1}(P' - O) = \mathrm{RK}\alpha(P' - O) / \mathrm{I}_3\alpha, \text{ ecc.}$$

L'ordinaria forma quadratica

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3$$

equivale a

$$(P - O) \times \alpha(P - O), \text{ ecc. ecc. } (^1)$$

---

(1) Cfr., per riconoscere quali espressioni cartesiane sono riduttibili a forma assoluta, cioè sono *invariantive*: T. Boggio, *Sul carattere invariantivo di espressioni vettoriali* (Rend. Palermo, 1911).

CAPITOLO II.

FUNZIONI DI PUNTI. OPERATORI DIFFERENZIALI

§ 1. Derivate rispetto ad un punto.

1. Derivate di punti, vettori, omografie rispetto ad un punto.

Il punto P vari in un campo continuo a tre dimensioni in modo del tutto arbitrario. Se h è un ente *funzione di P* appartenente ad una classe U, è noto [cfr. Intr. III, n. 6] che

$$\frac{dh}{dP}, \textit{ derivata di } h \textit{ rispetto a } P$$

è: *quell'operatore che applicato ad un qualsiasi differenziale* δP *di* P *(che è un* **vettore**), *produce il corrispondente differenziale* δh *di* h *che è un elemento di* U,

$$\frac{dh}{dP}\delta P = \delta h.$$

Notando che δP è vettore arbitrario [cfr. Intr. III, n. 4], segue che se u è un qualsiasi *vettore*, allora

$$\frac{dh}{dP}u$$

è pure un elemento della classe U.

Se poi h è funzione dei punti P_1, $P_2, \dots$, *variabili indipendenti* in campi a tre dimensioni, allora si possono considerare le *derivate parziali* $\partial h/\partial P_1$, $\partial h/\partial P_2, \dots$ di h rispetto a P_1, $P_2 \dots$, il *differenziale totale* dh di h e le *derivate successive*, con significato già noto [cfr. Intr. III, nn. 5, 7, 8] tenendo ben presente che i *differenziali* dei *punti* P_1, $P_2, \dots$ sono *vettori*.

A noi interessa considerare i casi nei quali h è, o un *punto* Q, o un vettore u, o una omografia α funzione del punto P (o anche funzione di punti P_1, P_2,...). Per questi casi è *necessario* **tener ben presente** che:

[1] $$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dP}, \dfrac{du}{dP} \text{ sono } \textit{omografie} \text{ [cfr. Cap. I, § 1, n. 1]} \\ \dfrac{d\alpha}{dP} \text{ è una } \textit{iperomografia} \text{ [cfr. Cap. I, § 6, n. 1]} \end{cases}$$

perchè

$$\frac{dQ}{dP}\partial P = \partial Q, \quad \frac{du}{dP}\partial P = \partial u$$

sono *vettori* e

$$\frac{d\alpha}{dP}\partial P = \partial\alpha$$

è una *omografia*.

Si tenga anche presente che: se m è *numero reale relativo*, cioè una particolare omografia, dm/dP è iperomografia e precisamente *operatore tra* **vettori** *e* **numeri.**

La derivata del **punto** *Q, funzione di P, rispetto a P, può sempre ridursi alla derivata di un* **vettore** *rispetto a P*; precisamente si ha:

[2] $$\frac{dQ}{dP} = \frac{d(Q - O)}{dP},$$

con O punto **fisso** *arbitrario.*

Perchè essendo $dO = 0$ si ha identicamente $dQ = d(Q - O)$.

Conviene esaminare il caso particolare $\alpha = m$ con m *numero reale.* Sussiste ancora la seconda delle [1] ma, per x vettore arbitrario

[3] $$\frac{dm}{dP}x \text{ è un } \textit{numero} \text{ (omografia particolare).}$$

Se ricordiamo che, per h numero reale, e sottintendendo l'operazione $\odot$, si può scrivere, indifferentemente, hx, xh

per indicare il prodotto del *vettore* x per il *numero* h allora si ha:

$$\frac{dm}{dP}x = x \cdot \frac{dm}{dP}. \tag{4}$$

Dim. Per x, y vettori arbitrari, ed essendo $(dm/dP)y$ un numero si ha:

$$\mathrm{k}\frac{dm}{dP}xy = \frac{dm}{dP}yx = x \cdot \frac{dm}{dP}y$$

che per l'arbitrarietà di y dimostra la [4].

E si noti che $\mathrm{k}(dm/dP)$ *non è identico* a dm/dP e che questi due elementi sono legati dalla [4] che è una forma inesatta di scrittura non avendo fatto uso dell'operazione $\odot$, cioè avendo identificato hx ad xh. Queste inesattezze di forma non conducono ad inconvenienti purchè si tenga ben presente la [3].

Si è già convenuto [cfr. Intr. III, n. 6] di porre

$$\frac{d}{dP}h = \frac{dh}{dP}$$

vale a dire di indicare con $\frac{d}{dP}$ l'**operatore** (*leibniziano*), *che applicato ad* h, *funzione di* P, *produce la* **derivata** *di* h **rispetto a** P. ***E si tenga ben presente che:*** $\frac{d}{dP}$ *è* ***l'unico*** **operatore** *differenziale* (*e implicitamente si comprendono gli operatori* $\frac{\partial}{\partial P}$ *per le* **derivate parziali**) *del quale si fa uso nel* **calcolo assoluto** *che noi esponiamo.* Gli operatori particolari div, rot, grad, Rot, Δ, Δ' sono delle *funzioni di* $\frac{d}{dP}$, e quindi, pur essendo utili o necessari per abbreviare la scrittura, ***non è affatto vero*** che il *nostro metodo assoluto* **richieda un gran numero di operatori differenziali,** poichè, a rigore, ne ***basta uno solo*** il $\frac{d}{dP}$.

Se μ_2 è una *iperomografia*, cioè una H_2, $d\mu/dP$ è una H_3 [cfr. Cap. I, § 6, u. 1]. Analogamente se μ_3 è una H_3, allora $d\mu_3/dP$ è una H_4; e così di seguito. Basta questo fatto per stabilire l'*esistenza* delle H_m e la loro *utilità* nel calcolo generale assoluto. Noi ci limitiamo alla considerazione delle H_2 poichè esse bastano per le ordinarie applicazioni fisico-meccaniche; ma dal libro già citato, *Espaces courbes* ecc. nel quale la teoria delle H_m è intieramente sviluppata, risulta che le H_3, almeno, sono, insieme alle H_1 (omografie) e H_2 (iperomografie), *indispensabili* nelle questioni fondamentali di Geometria. A conferma della ora indicata *indispensabilità* basta citare il metodo dello SCHOUTEN, che taluni (troppi) applicano alle questioni fisico-meccaniche-geometriche. Lo SCHOUTEN, dopo un calcolo vettoriale eccessivamente complesso per *notazioni* e *concetti fondamentali*, è costretto a introdurre, col RICCI, *sistemi multipli* che **non sono** *assoluti* perchè dipendenti da coordinate e le *derivate covarianti* ecc. pure non assolute perchè dipendenti da una forma quadratica che *non* è funzione dell'ente geometrico considerato, ma della sua rappresentazione in uno spazio euclideo [cfr. *Espaces courbes*, l. c.], rappresentazione che è in nostro arbitrio.

2. Derivata secondo una direzione.

Avendo h il significato stabilito nel n. 1 ed essendo u un *vettore unitario*, l'elemento, della classe U,

$$\frac{dh}{dP}u \tag{1}$$

è ciò che comunemente chiamasi,

derivata di h nella **direzione** *del vettore u.*

Infatti, se al differenziale dP si dà la direzione di u, vale a dire si pone

$$dP = \varepsilon u,$$

allora si ha, essendo ε un numero reale,

$$\frac{dh}{dP}u = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{dh}{dP}dP = \frac{dh}{\varepsilon};$$

e poichè, essendo u *unitario*, il valore assoluto di ε è il modulo di dP, risulta che $(dh)/\varepsilon$ è precisamente: *il rapporto tra l'incre-*

mento di h e l'incremento della variabile indipendente P nella direzione di u, cioè l'elemento [1] ha precisamente il significato indicato.

OSSERVAZIONE. La forma *convenzionale* che si dà ordinariamente alla [1] è

$$[a] \qquad \frac{dh}{du}$$

ove si intende che u (numero) indichi la *direzione* nella quale si fa la derivata. Ora è chiaro che un *numero* non può indicare una *direzione*; e anche se si pone $dP = du \cdot u$ non risulta definito u. La notazione [a] è dunque da *escludere* come uso sistematico. Noi ne faremo qualche volta uso nelle applicazioni, non come *notazione effettiva* (che in tale senso non è suscettibile di definizione) ma soltanto come *notazione abbreviata*.

3. Derivata di un prodotto vettoriale o interno.

Siano u, v, w dei vettori funzioni del punto P.

Per la derivata, rispetto a P del *vettore* $u \wedge v$ e del *numero* $u \times v$, la prima *omografia*, la seconda *iperomografia*, si hanno le due formule notevoli:

$$[1] \qquad \frac{d(u \wedge v)}{dP} = u \wedge \frac{dv}{dP} - v \wedge \frac{du}{dP}$$

$$[2] \qquad \frac{d(u \times v)}{dP} = \left(\mathrm{K}\frac{du}{dP} v\right) \times + \left(\mathrm{K}\frac{dv}{dP} u\right) \times$$

Dim. Si ha per proprietà ben note dei differenziali e del prodotto vettoriale e interno [cfr.; Intr. III, n. 4, (b); E. C. V.]

$$d(u \wedge v) = u \wedge dv - v \wedge du = \left(u \wedge \frac{dv}{dP} - v \wedge \frac{du}{dP}\right) dP,$$

$$d(u \times v) = u \times dv + v \times du = u \times \frac{dv}{dP} dP + v \times \frac{du}{dP} dP =$$

$$= \left(\mathrm{K}\frac{dv}{dP} u + \mathrm{K}\frac{du}{dP} v\right) \times dP; \text{ c. d. d. [cfr. n. 1].}$$

Se il vettore u, pur avendo direzione e verso variabile con P, ha lunghezza costante, cioè $u^2 = \text{cost}$, allora si hanno le due proprietà notevoli:

[3] $$\mathrm{K}\frac{du}{dP}u = 0, \quad \mathrm{I}_3\frac{du}{dP} = 0, \quad \text{per } u^2 = \text{cost.}$$

Dim. Dalla [2] per $v = u$ si ha $0 = 2\,\mathrm{K}(du/dP)u = 0$ che dimostra la prima delle [3]. Questa esprime [cfr. Cap. I, § 1 n. 2] che $\mathrm{K}(du/dP)$ è omografia degenere e quindi vale la seconda delle [3].

Le due formule seguenti, meno importanti delle [1], [2], [3] sono immediate conseguenze delle [1], [2] e il lettore può dimostrarle per esercizio.

[4] $$\begin{cases} \dfrac{du^2}{dP} = 2\mathrm{K}\dfrac{du}{dP}u \\[2ex] \dfrac{d\,\mathrm{mod}\,u}{dP} = \left(\mathrm{K}\dfrac{du}{dP}\dfrac{u}{\mathrm{mod}\,u}\right)\times, \quad \text{per } \mathrm{mod}\,u \neq 0 \end{cases}$$

[5] $$\begin{cases} \dfrac{d(u\wedge v\times w)}{dP} = \\[2ex] \left\{\mathrm{K}\dfrac{du}{dP}(v\wedge w)\right\}\times + \left\{\mathrm{K}\dfrac{dv}{dP}(w\wedge u)\right\}\times + \left\{\mathrm{K}\dfrac{dw}{dP}(u\wedge v)\right\}\times \end{cases}$$

4. Derivate di $\mathrm{I}_1\alpha$, $\mathrm{K}\alpha$, $\mathrm{D}\alpha$, $\mathrm{V}\alpha$.

Se α è una omografia funzione di P e f è uno qualunque dei noti operatori I_1, K, D, V si ha:

[1] $$\frac{d(f\alpha)}{dP} = f\frac{d\alpha}{dP}, \quad \text{per } f = \mathrm{I}_1,\ \mathrm{K},\ \mathrm{D},\ \mathrm{V}$$

ovvero, sotto altra forma, applicando ad un vettore x arbitrario

[1′] $$\frac{d(f\alpha)}{dP}x = f\left(\frac{d\alpha}{dP}x\right).$$

Dim. Ciò risulta subito osservando che f è operatore lineare e ricordando il significato di $f\mu$ [cfr. Cap. I, § 6, n. 2] ove μ è la iperomografia [cfr. n. 1] $d\alpha/dP$.

Si noti che $d(f\alpha)/dP$ è *iperomografia* per $f = \mathrm{I}_1$, K, D, mentre è *omografia* per $f = \mathrm{V}$, perchè $f\alpha$ è, nel primo caso *omografia* e nel secondo è *vettore*.

5. Derivate di prodotti e potenze di omografie.

Siano α, β, γ, ... delle omografie e m numero reale funzioni del punto P.

Nelle applicazioni si ha bisogno di calcolare la *omografia* che si ottiene applicando la derivata rispetto a P della omografia $\beta\alpha$, (prodotto funzionale di α per β), ad un vettore (generico) x; ovvero, per α invertibile, si ha bisogno di calcolare la *omografia* che si ottiene applicando la derivata rispetto a P della omografia α^{-1}, (inversa di α) ad un vettore (generico) x. Si hanno le due formule importanti:

[1] $$\frac{d(\beta\alpha)}{dP}x = \beta\cdot\frac{d\alpha}{dP}x + \frac{d\beta}{dP}x\cdot\alpha,$$

[2[$$\frac{d\alpha^{-1}}{dP}x = -\alpha^{-1}\cdot\frac{d\alpha}{dP}x\cdot\alpha^{-1}, \quad \text{per } \alpha \text{ invertibile.}$$

Dim. Si ha identicamente:

$$\delta(\beta\alpha) = \beta\cdot\delta\alpha + \delta\beta\cdot\alpha,$$

(*a*) $$\frac{d(\beta\alpha)}{dP}\delta P = \beta\cdot\frac{d\alpha}{dP}\delta P + \frac{d\beta}{dP}\delta P\cdot\alpha$$

che dimostra la [1] perchè δP è un vettore arbitrario (x).

Da $\alpha\alpha^{-1} = 1$ si ha differenziando

$$\alpha\cdot\delta\alpha^{-1} + \delta\alpha\cdot\alpha^{-1} = 0;$$

operando a sinistra con α^{-1},

$$\delta\alpha^{-1} = -\alpha^{-1}\cdot\delta\alpha\cdot\alpha^{-1}, \text{ da cui}$$

(*b*) $$\frac{d\alpha^{-1}}{dP}\delta P = -\alpha^{-1}\cdot\frac{d\alpha}{dP}\delta P\cdot\alpha^{-1}$$

che dimostra la [2] perchè δP è vettore arbitrario.

Le [1], [2] hanno forma alquanto diversa dalle formule che dànno la derivata di un prodotto algebrico o dell'inversa di una funzione. Si riducono peraltro alla forma ordinaria quando *all'operatore* $\frac{d}{dP}$, applicato ad omografie

si sostituisca l'operatore $\mathrm{k}\,\dfrac{d}{dP}$, e precisamente si hanno le formule notevoli:

$$\text{[3]}\qquad \mathrm{k}\,\frac{d(\beta\alpha)}{dP}=\beta\cdot\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}+\mathrm{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha$$

$$\text{[4]}\qquad \mathrm{k}\,\frac{d\alpha^{-1}}{dP}=-\,\alpha^{-1}\cdot\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\alpha^{-1},\quad \text{per } \alpha \text{ invertibile,}$$

e in tali formule non comparisce più come nelle [1], [2], il vettore x ausiliario.

Dim. Dalle (a), (b) della Dim. precedente si ha [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [7]]

$$\frac{d(\beta\alpha)}{dP}\,\delta P=\beta\cdot\frac{d\alpha}{dP}\,\delta P+\mathrm{k}\Big(\mathrm{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\Big)\delta P$$

$$\frac{d\alpha^{-1}}{dP}\,\delta P=-\,\alpha^{-1}\cdot\mathrm{k}\Big(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\alpha^{-1}\Big)\delta P;$$

ora il δP, arbitrario, può esser soppresso nei due membri; dopo aver soppresso si operi nei due membri con k e si otterranno le formule [3], [4] [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [4], [6]].

Essendo $m\alpha=\alpha m$, allora per la derivata di $m\alpha$ rispetto a P non vi è bisogno, come nelle [1], [2], del vettore x e nemmeno dell'operatore k, come nelle [3], [4], e si ha

$$\text{[5]}\qquad \frac{d(m\alpha)}{dP}=m\cdot\frac{d\alpha}{dP}+\alpha\cdot\frac{dm}{dP}$$

Dim. $\delta(m\alpha)=m\cdot\delta\alpha+\alpha\cdot\delta m=m\cdot\dfrac{d\alpha}{dP}\,\delta P+\alpha\cdot\dfrac{dm}{dP}\,\delta P$, ecc.

Analogamente si ha:

$$\text{[6]}\qquad \frac{dm^{-1}}{dP}=-\,m^{-2}\,\frac{dm}{dP},\quad \text{per } m\neq 0$$

e le [5], [6] hanno forma identica alle corrispondenti formule per le funzioni numeriche.

Vi è appena bisogno di osservare che dalle [1], [3] si ricava in modo ovvio:

$$[7] \qquad \frac{d(\gamma\beta\alpha)}{dP}x = \gamma\beta \cdot \frac{d\alpha}{dP}x + \gamma \cdot \frac{d\beta}{dP}x \cdot \alpha + \frac{d\gamma}{dP}x \cdot \beta\alpha,$$

$$[8] \qquad \mathrm{k}\frac{d(\gamma\beta\alpha)}{dP} = \gamma\beta \cdot \mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP} + \gamma \cdot \mathrm{k}\frac{d\beta}{dP} \cdot \alpha + \mathrm{k}\frac{d\gamma}{dP} \cdot \beta\alpha$$

e analogamente per il prodotto funzionale di quattro o più omografie.

Le formule precedenti dànno immediatamente le derivate di potenze, ad esponente positivo, di omografie:

$$[9] \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha^2}{dP}x = \alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dP}x + \dfrac{d\alpha}{dP}x \cdot \alpha \\ \mathrm{k}\dfrac{d\alpha^2}{dP} = \alpha \cdot \mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP} + \mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP} \cdot \alpha \end{cases}$$

$$[10] \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha^3}{dP}x = \alpha^2 \cdot \dfrac{d\alpha}{dP}x + \alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dP}x \cdot \alpha + \dfrac{d\alpha}{dP}x \cdot \alpha^2 \\ \mathrm{k}\dfrac{d\alpha^3}{dP} = \alpha^2 \cdot \mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP} + \alpha \cdot \mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP} \cdot \alpha + \mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP} \cdot \alpha^2 \end{cases}$$

ecc. per α^4, $\alpha^5, \dots$ con forme non simili a quelle dell'Analisi, poichè il prodotto funzionale delle omografie non è commutabile in generale.

Per le potenze ad esponente negativo della α invertibile basta osservare che

$$[11] \qquad \frac{d\alpha^{-n}}{dP} = \frac{d(\alpha^n)^{-1}}{dP}, \quad \alpha \text{ invertibile, } n \text{ intero positivo,}$$

per ridursi ai casi precedenti.

Per il numero reale m, funzione di P, si ha ovviamente

$$[12] \qquad \begin{cases} \dfrac{dm^n}{dP}x = n \cdot m^{n-1}\dfrac{dm}{dP}x \\ \mathrm{k}\dfrac{dm^n}{dP} = n \cdot m^{n-1} \cdot \mathrm{k}\dfrac{dm}{dP} \end{cases}$$

per n intero (non nullo) positivo o anche negativo purchè in tal caso sia $m \neq 0$.

6. Condizione necessaria e sufficiente affinchè αdP sia un differenziale esatto.

Essendo α una omografia, funzione di P, il vettore αdP può, o pur no, a seconda delle condizioni, essere il differenziale, $d\boldsymbol{u}$, di un vettore $\boldsymbol{u}$ pure funzione di P. Si ha il teorema.

Se α è omografia funzione di P, allora

[1] $$\alpha dP \text{ è un } \textbf{differenziale esatto,}$$

cioè esiste un vettore $\boldsymbol{u}$, funzione di P, tale che

[1'] $$\alpha dP = d\boldsymbol{u}, \text{ cioè } \alpha = \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \ (\alpha \text{ è la derivata di un vettore}),$$

solamente quando:

[2] $$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP} = \frac{d\alpha}{dP};$$

vale a dire: la [2] *è la condizione* **necessaria** *e* **sufficiente** *affinchè si verifichi la* [1].

Dim. Rispetto al sistema cartesiano ortogonale $O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ [E. C. V.] si abbia

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Allora P ed α sono funzioni delle variabili indipendenti x, y, z.

Si ha evidentemente

(a) $$\alpha dP = \alpha\boldsymbol{i} \cdot dx + \alpha\boldsymbol{j} \cdot dy + \alpha\boldsymbol{k} \cdot dz$$

e il secondo membro della (a) è un *differenziale esatto* solamente quando si ha, per un noto teorema di Analisi (1),

$$\frac{\partial(\alpha\boldsymbol{j})}{\partial z} = \frac{\partial(\alpha\boldsymbol{k})}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\alpha\boldsymbol{k})}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha\boldsymbol{i})}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\alpha\boldsymbol{i})}{\partial y} = \frac{\partial(\alpha\boldsymbol{j})}{\partial x}$$

---

(1) Tale teorema si riferisce a *funzioni numeriche*; ma si estende subito al caso (a), osservando che per $\boldsymbol{a}$ vettore *costante arbitrario*

$$\boldsymbol{a} \times \alpha dP = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{i} \cdot dx + \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{j} \cdot dy + \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{k} \cdot dz$$

alle quali, poichè $\partial P/\partial x = i$ ecc., si dànno ovviamente le forme

$$\frac{\partial\alpha}{\partial P}kj = \frac{\partial\alpha}{\partial P}jk, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial P}ik = \frac{\partial\alpha}{\partial P}ki, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial P}ji = \frac{\partial\alpha}{\partial P}ij$$

le quali dànno, concordi, [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [1]] appunto la condizione [2].

N. B. - Per la dimostrazione ora fatta ci potevamo riferire senz'altro alla condizione [cfr. Intr. III, n. 8, *f*)]

$$\delta\alpha \cdot dP = d\alpha \cdot \delta P, \text{ equivalente a } \frac{d\alpha}{dP}\delta P \cdot dP = \frac{d\alpha}{dP}dP \cdot \delta P$$

che a sua volta *equivale* alla [2] essendo dP, δP arbitrari. Ma abbiamo voluto sviluppare completamente la dimostrazione che nell'Intr., l. c., è stata in parte accennata, avendo rimandato il lettore al completo sviluppo fatto in *Espaces courbes*, p. 53.

7. Derivata di αu e alcune sue applicazioni.

Sia α *omografia*, m *numero reale* e u *vettore*, funzioni di P.

Nelle applicazioni è della massima importanza saper esprimere la derivata, rispetto a P, del vettore αu, mediante α, u e le derivate di questi rispetto a P. Si hanno le formule notevoli seguenti:

[1] $$\frac{d(\alpha u)}{dP}x = \alpha \cdot \frac{du}{dP}x + \frac{d\alpha}{dP}x \cdot u$$

con x vettore generico arbitrario. Oppure, indipendentemente da x,

[2] $$\frac{d(\alpha u)}{dP} = \alpha \cdot \frac{du}{dP} + \mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}u$$

e anche qui, come si è osservato nel n. 5, vale la forma ordinaria dell'Analisi, purchè

---

e notando che, per un noto teorema funzionale [cfr. Intr. II, n. 7, 1°], se il numero $a \times \alpha dP$ è un differenziale esatto, dm, questo si deve porre sotto la forma $d(a \times u) = a \times du$, con u vettore funzione di P ed indipendente da a.

all'operatore $\frac{d}{dP}$, applicato ad omografie, si sostituisca l'operatore $\mathrm{k}\frac{d}{dP}$,

il che prova chiaramente l'utilità e la potenza dell'operatore k per le iperomografie.

Dim. Si ha identicamente [cfr. n. 5]:

$$\delta(\alpha u) = \alpha \cdot \delta u + \delta\alpha \cdot u = \alpha \cdot \frac{du}{dP}\delta P + \frac{d\alpha}{dP}\delta P \cdot u =$$
$$= \alpha \cdot \frac{du}{dP}\delta P + \mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP} u \cdot \delta P$$

che per essere δP vettore arbitrario e $\delta(\alpha u) = | d(\alpha u)/dP | \delta P$ dimostrano le [1], [2].

Se, in particolare, α è il numero reale m allora le [1], [2] si riducono all'unica formula, simile a quella dell'Analisi:

[3[$$\frac{d(mu)}{dP} = m \cdot \frac{du}{dP} + u \cdot \frac{dm}{dP}$$

osservando che $(dm/dP)x$ è *numero* [cfr. n. 1] e che, con la notazione abbreviata, cioè senza l'operazione $\odot$, si può, per h numero, scrivere indifferentemente hu, uh [1].

Dim. Si ha identicamente

$$\delta(mu) = m \cdot \delta u + \delta m \cdot u = m \cdot \delta u + u \cdot \delta m,$$
$$\frac{d(mu)}{dP}\delta P = m \cdot \frac{du}{dP}\delta P + u \cdot \frac{dm}{dP}\delta P$$

che per l'arbitrarietà di δP dimostra la [3].

---

(1) Applicando la [3] ad x si ha

$$\frac{d(mu)}{dP}x = m \cdot \frac{du}{dP}x + u \cdot \frac{dm}{dP}x = m \cdot \frac{du}{dP}x + \frac{dm}{dP}x \cdot u,$$

poichè $(dm/dP)x$ è numero, e si ritrova la forma [1]. - Anche dalla [2] si ha la [3] tenendo presente la [4] del n. 1.

Se α, ovvero m nella [3], è *costante*, cioè *indipendente da* P, allora le [1], [2], [3] dànno concordi la formula importante

$$[4] \qquad \frac{d(\alpha u)}{dP} = \alpha\,\frac{du}{dP}, \text{ per } \alpha \textit{ omografia costante.}$$

Dim. Perchè per $\alpha = \text{cost.}$ si ha $d\alpha/dP = 0$.

Se nelle [1], [2], [3] si pone al posto di u il vettore *costante* a, cioè indipendente da P, allora si ottengono le formule seguenti che sono di continuo uso nelle applicazioni:

$$[5] \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\alpha a)}{dP}\,x = \left(\dfrac{d\alpha}{dP}\,x\right)a \\[2mm] \dfrac{d(\alpha a)}{dP} = \mathrm{k}\,\dfrac{d\alpha}{dP}\,a \quad \text{per } a \text{ vettore } \textit{costante.} \\[2mm] \dfrac{d(ma)}{dP} = a\cdot\dfrac{dm}{dP} \end{cases}$$

Dim. Perchè per $u = a = \text{cost.}$ si ha $du\, dP = 0$.

Se l'omografia α è la *derivata di un vettore* cioè αdP è un *differenziale esatto* [cfr. n. 6], allora, *e solo in tal caso*, si hanno le formule importanti:

$$[6] \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\alpha u)}{dP} = \alpha\,\dfrac{du}{dP} + \dfrac{d\alpha}{dP}\,u, \quad u \textit{ funzione di } P \\[2mm] \dfrac{d(\alpha a)}{dP} = \dfrac{d\alpha}{dP}\,a, \quad a \textit{ costante}; \end{cases}$$

$$[7] \qquad \left(\frac{d\alpha}{dP}\,u\right)v = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,v\right)u, \quad u, v \text{ vettori } \textit{funzioni di } P;$$

$$[8] \qquad \frac{d(\alpha a)}{dP}\,b = \frac{d(\alpha b)}{dP}\,a, \quad a,\ b \text{ vettori } \textit{costanti.}$$

Dim. [6]. Affinchè α sia la derivata di un vettore è necessario che sia $\mathrm{k}(d\alpha/dP) = d\alpha/dP$ [cfr. n. 6]. - Per l'ipotesi fatta, dalla [2] risultano le [6]. - Viceversa, valga la prima delle [6] (e basta); applicandola ad x e confrontandola con la [1] si ha

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}\,u\right)x = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,x\right)u = \left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\,u\right)x$$

che per essere u, x arbitrari dà $d\alpha/dP = \mathrm{k}(d\alpha/dP)$, cioè [cfr. n. 6] esprime che αdP è differenziale esatto.

Dim. [7]. Da $d\alpha/dP = \mathrm{k}(d\alpha/dP)$ applicata ad u e v si ha

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}u\right)v = \left\{\mathrm{k}\left(\frac{d\alpha}{dP}\right)u\right\}v = \left(\frac{d\alpha}{dP}v\right)u, \text{ c. d. d.}$$

Dim. [8]. Dalla [7] e dalla 2ª delle [6] poichè a è costante.

Se α è omografia *funzione di* P e a, b sono vettori *costanti*, si ha:

$$\text{[9]} \qquad \frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}a\right)}{dP}b = \frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}b\right)}{dP}a.$$

Dim. Se x è vettore costante si ha, applicando formule precedenti:

$$\left\{\frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}a\right)}{dP}b\right\}x = \frac{d\left\{\left(\frac{d\alpha}{dP}a\right)x\right\}}{dP}b = \frac{d\left\{\frac{d(\alpha x)}{dP}a\right\}}{dP}b =$$

$$= \frac{d\left\{\frac{d(\alpha x)}{dP}b\right\}}{dP}a = \frac{d\left\{\left(\frac{d\alpha}{dP}b\right)x\right\}}{dP}a = \left\{\frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}b\right)}{dP}a\right\}x; \text{ c. d. d.}$$

È importante osservare che, per a *costante* e *a fortiori* per a *non costante*, le due omografie

$$\frac{d(\alpha a)}{dP}, \quad \frac{d\alpha}{dP}a$$

sono distinte [cfr. [5]] salvo il caso [cfr. [6]] che α sia la derivata di un vettore.

8. Derivate delle omografie particolari.

Se u, v sono vettori funzioni di P, per le derivate della *assiale* $u\wedge$ e della *diade* $\mathrm{H}(u, v)$ si ha:

$$\text{[1]} \qquad \frac{d(u\wedge)}{dP}x = \left(\frac{du}{dP}x\right)\wedge$$

$$\text{[2]} \qquad \frac{d\mathrm{H}(u, v)}{dP}x = \mathrm{H}\left(u, \frac{dv}{dP}x\right) + \mathrm{H}\left(\frac{du}{dP}x, v\right)$$

e se non si introducono nuovi simboli (il che non è necessario) non si può fare a meno del vettore generico x, cioè non si possono esprimere le derivate di $u\wedge$ e di $\mathrm{H}(u, v)$ in funzione di u e di u, v rispettivamente.

Dim. Si ha identicamente:

$$d(u\wedge) = (du)\wedge = \left(\frac{du}{dP}\,dP\right)\wedge,$$

$$d\mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(u, dv) + \mathrm{H}(du, v) = \mathrm{H}\left(u, \frac{dv}{dP}\,dP\right) + \mathrm{H}\left(\frac{dx}{dP}\,dP, v\right)$$

che dimostrano le [1], [2] poichè dP è vettore arbitrario (1).

Per la dm/dP, con m *numero reale* (particolare omografia) nulla da osservare; vedremo in seguito come essa si esprima mediante il vettore *gradiente di* m.

---

(1) Convenendo di scrivere, indifferentemente, per h numero e u vettore, hu, uh per indicare il prodotto di u per h, allora

$$\mathrm{H}(u, v)x = u \times x \cdot v = v \cdot u \times x$$

e per le leggi generali degli operatori si ha

$$(a) \qquad \mathrm{H}(u, v) = v \cdot u \times$$

e quindi $\mathrm{H}(u, v)$ è il prodotto funzionale della iperomografia $u\times$ per il vettore v. In tal modo, omografie e iperomografie, che sono stati definiti come operatori a *sinistra*, divengono anche operatori a *destra*. Questa *doppia* qualità di un operatore è da evitare in modo assoluto; bastano le notazioni dei quaternionisti, derivate inesattamente dalle notazioni *esatte* di Hamilton, per far vedere quale algoritmo mostruoso si ottiene ammettendo che un operatore possa esser tale a sinistra e a destra contemporaneamente.

Se si adotta la notazione (a), e ciò è da escludere, si ha ad es.,

$$\mathrm{H}(u, \alpha x) = \alpha x \cdot u \times$$

e si viene così a considerare la notazione generica $\alpha x \cdot \mu$, con μ iperomografia, che se deve essere operatore a sinistra, dà

$$(\alpha x \cdot \mu)y = \alpha x \cdot \mu y$$

della forma $w \cdot \alpha$ con w vettore e α omografia, notazione del tutto illogica.

Per la *dilatazione* α della forma generica [cfr. Cap. I, § 2, n. 2]

$$\alpha = \begin{pmatrix} mi, & nj, & pk \\ i, & j, & k \end{pmatrix}$$

con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ terna unitaria-ortogonale e m, n, p numeri funzioni di P, si devono considerare le derivate rispetto a P di $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, m, n, p$, ma non si ottiene una forma semplice ([1]).

Sono importanti le derivate, sia rispetto ad un numero che rispetto ad un punto, delle *isomerie vettoriali* e delle *similitudini vettoriali* [cfr. Cap. I, § 5]. Sarebbe troppo lungo esporre le forme e proprietà di tali derivate e rimandiamo il lettore alle Note nelle quali tali questioni sono ampiamente trattate [cfr. Bibliografia].

Esercizi ([2])

(1) $d(f\alpha) = f(d\alpha)$ per $f = \mathrm{I}_1, \mathrm{K}, \mathrm{D}, \mathrm{V}, \mathrm{C}$

(2) $d(\mathrm{I}_2\alpha) = \mathrm{I}_1(\mathrm{C}\alpha \cdot d\alpha)$

(3) $d(\mathrm{I}_3\alpha) = \mathrm{I}_1(d\mathrm{K}\alpha \cdot \mathrm{R}\alpha)$

(4) $d(\mathrm{I}_3\alpha) = \mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{I}_1(\alpha^{-1} \cdot d\alpha) = -\mathrm{I}_3\alpha \cdot \mathrm{I}_1(\alpha \cdot d\alpha^{-1})$, α invertibile

(5) $d \log \mathrm{I}_3\alpha = \mathrm{I}_1(\alpha^{-1} \cdot d\alpha) = -\mathrm{I}_1(\alpha \cdot d\alpha^{-1})$, α invertibile

(6) $d(\mathrm{R}\alpha) = \mathrm{R}(\alpha + d\alpha) - \mathrm{R}\alpha - \mathrm{R}d\alpha$

(7) $d(\mathrm{R}\alpha) = \mathrm{I}_1(\alpha^{-1} \cdot d\alpha) \cdot \mathrm{R}\alpha - \mathrm{R}\alpha \cdot d\mathrm{K}\alpha \cdot \mathrm{K}\alpha^{-1}$, α invertibile

(8) $d\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = \mathrm{R}'(\alpha, d\beta) + \mathrm{R}'(d\alpha, \beta)$.

([1]) Se $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ è terna unitaria-ortogonale-positiva, allora [cfr. A. Pensa, *Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omografiche*, Atti Acc. Torino, vol. 49 (1913-14), pp. 987-1012]: esiste una isomeria w, funzione di P, tale che,

$$(a) \qquad d\boldsymbol{i}/dP = \boldsymbol{i} \wedge w, \quad d\boldsymbol{j}/dP = \boldsymbol{j}/w, \quad d\boldsymbol{k}/dP = \boldsymbol{k} \wedge w$$

e w ha la forma

$$(b) \qquad w = -\frac{1}{2}\left\{ \boldsymbol{i} \wedge \frac{d\boldsymbol{i}}{dP} + \boldsymbol{j} \wedge \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} + \boldsymbol{k} \wedge \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \right\}.$$

([2]) Valgono le convenzioni già indicate negli Esercizi del Cap. 1, § 1, intendendo inoltre che, vettori, omografie, ... che si considerano siano funzioni di un punto P, salvo speciali indicazioni che saranno date volta per volta.

§ 2. Operatori differenziali div, rot, grad, Rot.

1. Definizione degli operatori div, rot, grad, Rot.

Qualunque siano il *vettore* u e l'*omografia* α *funzioni di* P, introduciamo le *notazioni* e *denominazioni* seguenti

$$[0] \quad \left.\begin{array}{ll} \mathrm{div}_P u, & \textit{divergenza di } u \\ \mathrm{rot}_P u, & \textit{rotazionale di } u \\ \mathrm{grad}_P \alpha, & \textit{gradiente di } \alpha \\ \mathrm{Rot}_P \alpha, & \textit{rotazionale di } \alpha \end{array}\right\} \textit{rispetto a } P$$

che definiamo ponendo

$$[1] \qquad \mathrm{div}_P\, u = \mathrm{I}_1 \frac{du}{dP}$$

$$[2] \qquad \mathrm{rot}_P\, u = 2\mathrm{V} \frac{du}{dP}$$

$$[3] \qquad \mathrm{grad}_P\, \alpha = \mathrm{v} \frac{d\alpha}{dP}$$

$$[4] \qquad \mathrm{Rot}_P\, \alpha = 2\mathrm{Vk} \frac{d\alpha}{dP}$$

Quando non vi possa esser luogo ad equivoci, *sottintenderemo l'indice* P nelle notazioni [0], cioè scriveremo, in modo abbreviato,

$$[0'] \qquad \mathrm{div}\, u, \quad \mathrm{rot}\, u, \quad \mathrm{grad}\, \alpha, \quad \mathrm{Rot}\, \alpha;$$

ma, come al solito, l'indice P è *sottinteso*, **non soppresso sistematicamente.**

Vi è appena bisogno di osservare che: *se* u *ed* α *sono* **costanti**, *cioè indipendenti da* P, *allora* div u, rot u, grad α, Rot α *sono tutti nulli* (ma *non* viceversa), poichè sono nulle le derivate delle costanti u, α rispetto a P.

Interessa stabilire subito i tre teoremi seguenti, nei quali u, v sono *vettori* e α, β sono *omografie* funzioni di P.

1.° *Se le derivate di* u *ed* α *rispetto a* P, du/dP, $d\alpha/dP$, *sono rispettivamente*, **omografia** *e* **iperomografia** *esistenti ed* *univocamente determinate, allora gli elementi* [0] *sono pure esistenti ed univocamente determinati. In particolare si ha,* **e ciò deve esser tenuto ben presente:**

[5] $\begin{cases} \text{div}\, u \text{ \textit{è un} \textbf{numero reale}} \\ \text{div \textit{è operatore tra} \textbf{vettori} \textit{e} \textbf{numeri reali},} \end{cases}$

[6] $\begin{cases} \text{rot}\, u \text{ \textit{è un} \textbf{vettore}} \\ \text{rot \textit{è operatore tra} \textbf{vettori} \textit{e} \textbf{vettori},} \end{cases}$

[7] $\begin{cases} \text{grad}\, \alpha \text{ \textit{è un} \textbf{vettore}} \\ \text{grad \textit{è operatore tra} \textbf{omografie} \textit{e} \textbf{vettori},} \end{cases}$

[8] $\begin{cases} \text{Rot}\, \alpha \text{ \textit{è} \textbf{omografia}} \\ \text{Rot \textit{è operatore tra} \textbf{omografie} \textit{e} \textbf{omografie}.} \end{cases}$

Dim. Ciò risulta immediatamente dalle ipotesi e dalle definizioni [1] - [4].

2.° *Nelle stesse ipotesi precedenti, estese a* v *e* β, *gli operatori* div, rot, grad, Rot *sono* **distributivi rispetto alla somma,** cioè

[9] $$\text{div}\,(u+v) = \text{div}\, u + \text{div}\, v,$$

[10] $$\text{rot}\,(u+v) = \text{rot}\, u + \text{rot}\, v,$$

[11] $$\text{grad}\,(\alpha+\beta) = \text{grad}\,\alpha + \text{grad}\,\beta,$$

[12] $$\text{Rot}\,(\alpha+\beta) = \text{Rot}\,\alpha + \text{Rot}\,\beta$$

ma, peraltro, **non sono operatori lineari,** *cioè, per* m *numero reale,* $\text{div}\,(mu)$, $\text{rot}\,(mu)$, $\text{grad}\,(m\alpha)$, $\text{Rot}\,(m\alpha)$ *sono, in generale, diversi da* $m\,\text{div}\, u$, $m\,\text{rot}\, u$, $m\,\text{grad}\,\alpha$, $m\,\text{Rot}\,\alpha$. *E ne segue che:* div **non è** *iperomografia e* rot **non è** *omografia.*

Dim. Le [9] - [12] risultano subito dalle [1] - [4] osservando che gli operatori I_1, V, k, v sono *distributivi rispetto alla somma.* Che gli operatori [0] *non sono lineari* risulta dal fatto che come vedremo in seguito:

$$\begin{aligned} \text{div}\,(mu) &= m\,\text{div}\, u + (\text{grad}\, m) \times u, \\ \text{rot}\,(mu) &= m\,\text{rot}\, u + (\text{grad}\, m) \wedge u, \\ \text{grad}\,(m\alpha) &= m\,\text{grad}\,\alpha + \alpha\,\text{grad}\, m, \\ \text{Rot}\,(m\alpha) &= m\,\text{Rot}\,\alpha + (\text{grad}\, m) \wedge \alpha. \end{aligned}$$

3.° *Se f è uno qualunque dei simboli* div, rot, grad, Rot *e u è* **vettore** (*per i primi due*) *o* **omografia** (*per i rimanenti*) *funzione dei* **vettori**, *od* **omografie**, *u_1, u_2, ..., u_n tutti funzioni di P, allora si ha*

[12] $$fu = (fu)_{u_2, \ldots, u_n \ \mathrm{cost}} + \ldots + \ldots$$

cioè fu è la **somma** *degli fu che si ottengono considerando uno solo degli u_1, u_2, .., u_n variabili con P e gli altri costanti cioè indipendenti da P.*

Dim. Osservando che gli operatori I_1, V, v, k sono distributivi rispetto alla somma, applicando a du/dP la formula [5] di Intr. III, n. 7, e tenendo conto delle [1]-[4] risulta subito la [12].

È importante notare che degli operatori rot, Rot, e *soltanto* di questi tra gli operatori [0], se ne possono considerare le *potenze*, ad esponente intero positivo e non nullo. Seguendo le leggi generali già stabilite le potenze *n-esime* di tali operatori si indicano con le notazioni

$$\mathrm{rot}^n, \quad \mathrm{Rot}^n.$$

Si era già affermato che $\frac{d}{dP}$ è l'**unico** *operatore differenziale* del primo ordine, per mezzo del quale tutti gli altri possono essere espressi. Ciò è confermato dalle [1]-[4] per gli ***operatori differenziali del primo ordine*** div, rot, grad, Rot, operatori che, una volta introdotto $\frac{d}{dP}$, *non sono necessari* ma che, peraltro, sono di *grande utilità* nelle applicazioni.

Giova notare che, mentre per definire gli operatori div, rot bastano (oltre l'operatore differenziale $\frac{d}{dP}$ che comparisce *sempre*) gli operatori I_1, V per le *omografie*, per definire gli operatori grad, Rot, oltre al V per le omografie, occorrono gli operatori k, v per le *iperomografie*. Di qui la necessità, o almeno l'opportunità di introdurre le *iperomo-*

grafie e i loro operatori particolari. - Non facendo uso delle iperomografie, $\mathrm{grad}\,\alpha$ e $\mathrm{Rot}\,\alpha$ devono esser definite in *modo indiretto* (definizione *non nominale*) mediante un vettore generico x, arbitrario, sotto le forme seguenti, che dimostreremo in seguito:

$$\mathrm{grad}_P\,\alpha \times x = \mathrm{I}_1 \left\{ \frac{d(\mathrm{K}\alpha x)}{dP} - \mathrm{K}\alpha \cdot \frac{dx}{dP} \right\}$$

$$(\mathrm{Rot}_P\,\alpha)x = 2\mathrm{V} \left\{ \frac{d(\alpha x)}{dP} - \alpha \frac{dx}{dP} \right\},$$

forme artificiose e molto più complesse delle [3], [4].

2. Alcune proprietà fondamentali e forme di definizioni indirette degli operatori differenziali div, rot, grad, Rot.

Siano: u un *vettore* e α una *omografia* funzioni del punto P.

Qualunque siano i differenziali dP, δP, ϑP *di* P si ha:

$$[1] \qquad \begin{aligned} &\mathrm{div}\, u \cdot dP \wedge \delta P \times \vartheta P = \\ &= du \times \delta P \wedge \vartheta P + \delta u \times \vartheta P \wedge dP + \vartheta u \times dP \wedge \delta P, \end{aligned}$$

e se i differenziali di P sono commutabili si ha pure:

$$[1'] \qquad \begin{aligned} &\mathrm{div}\, u \cdot dP \wedge \delta P \times \vartheta P = \\ &= d(u \times \delta P \wedge \vartheta P) + \delta(u \times \vartheta P \wedge dP) + \vartheta(u \times dP \wedge \delta P). \end{aligned}$$

Siccome i tre differenziali di P sono vettori arbitrari la [1], o anche la [1'] (equivalente alla [1], ammessa la commutabilità dei differenziali successivi [cfr. Intr. III, n. 8], può esser assunta come *definizione* di div u, [cfr. Intr. II, n. 7, 3°] e quindi anche di div poichè u è arbitrario [E. C. V., p. 86].

Indipendentemente dalla qualità di possibile definizione, la [1] esprime un fatto che ha notevole importanza geometrica e fisica, fatto che risulta subito ricordando [E. C. V.] che se a, b, c sono vettori il prodotto misto $a \wedge b \times c = a \times b \wedge c$ dà la misura del volume del parallelepipedo di cui O, $O + a$, $O + b$, $O + c$, essendo O punto arbitrario, ne sono quattro vertici [cfr. E. C. V., pag. 86].

Dim. Dalla definizione di div $\boldsymbol{u}$ [cfr. n. 1, [1]] e dalla espressione di $\mathrm{I}_1\alpha$ mediante tre vettori [cfr. Cap, I, § 1, n. 4, [1]] si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\cdot dP\wedge\delta P\times\vartheta P &= \mathrm{I}_1 \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\cdot dP\wedge\delta P\times\vartheta P = \\ &= \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} dP\times\delta P\wedge\vartheta P + \ldots + \ldots = d\boldsymbol{u}\times\delta P\wedge\vartheta P + \ldots + \ldots \end{aligned}$$

che dimostra la [1]. - La [1'] si ottiene dalla [1] osservando che $d(\boldsymbol{u}\times\delta P\wedge\vartheta P) = d\boldsymbol{u}\times\delta P\wedge\vartheta P + \boldsymbol{u}\times d\delta P\wedge\vartheta P + \boldsymbol{u}\times\delta P\wedge d\vartheta P$, ecc, e che nella somma i termini che contengono $\boldsymbol{u}$ si elidono.

Qualunque siano i differenziali dP, δP di P si ha:

[2] $$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times dP\wedge\delta P = d\boldsymbol{u}\times\delta P - \delta\boldsymbol{u}\times dP,$$

e se i differenziali sono commutabili si ha pure:

[2'] $$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times dP\wedge\delta P = d(\boldsymbol{u}\times\delta P) - \delta(\boldsymbol{u}\times dP).$$

Essendo $dP\wedge\delta P$ vettore arbitrario, la [2], e anche la [2'] (equivalente alla [2], ammessa la commutabilità dei differenziali) può essere assunta come *definizione* di rot $\boldsymbol{u}$ [cfr. Intr. II, n. 7, 2°], e quindi anche di rot poichè $\boldsymbol{u}$ è arbitrario [E. C. V., pag. 86].

Il significato geometrico della [2], è importante: la proiezione di rot $\boldsymbol{u}$ sul vettore $dP\wedge\delta P$ è la somma algebrica delle proiezioni di $d\boldsymbol{u}$ e $\delta\boldsymbol{u}$, rispettivamente su δP e dP.

Dim. Dalla definizione di rot $\boldsymbol{u}$ [cfr n. 1, [2]] e dalla espressione di $2\mathrm{V}\alpha$ mediante due vettori [cfr. Cap. I, § 1, n. 9 [1]] si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times dP\wedge\delta P &= 2\mathrm{V}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\times dP\wedge\delta P = \delta P\times\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}dP - dP\times\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\delta P = \\ &= d\boldsymbol{u}\times\delta P - \delta\boldsymbol{u}\times dP \end{aligned}$$

che dimostra la [2]. - La [2'] si ottiene dalla [2] osservando che

$$d(\boldsymbol{u}\times\delta P) = d\boldsymbol{u}\times\delta P + \boldsymbol{u}\times d\delta P, \text{ ecc.}$$

Qualunque sia il vettore $\boldsymbol{a}$ **indipendente da** *P, cioè* **costante,** *si ha:*

[3] $$\operatorname{grad}\alpha\times\boldsymbol{a} = \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a})$$

e, più generalmente, per x vettore qualunque, anche funzione di P,

$$[3'] \quad \operatorname{grad}\alpha \times x = \mathrm{I}_1 \left\{ \frac{d(\mathrm{K}\alpha x)}{dP} - \mathrm{K}\alpha \cdot \frac{dx}{dP} \right\} = \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha x) - \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha \cdot \frac{dx}{dP}\right).$$

La [3], col vettore costante a, ha notevole importanza pratica, mentre la [3′] è di uso assai limitato (1).

Si noti inoltre che, *dopo* aver definita la *divergenza* di un vettore, si può assumere la [3] o la [3′] per definire il grad α, *ammesso* che grad α sia un vettore funzione di α.

Dim. Dimostriamo la [3′] che per $x = a$, costante, dà subito la [3], essendo $da/dP = 0$; e del resto la dimostrazione diretta della [3′] non è più complessa della dimostrazione diretta della [3].

Dalla definizione di grad [cfr. n. 1, [3]] e facendo uso di altre proprietà ben note [Cap. I; § 6, n. 4, [1]; § 6, n. 3, [4]. Cap. II, § 1, n. 7, [2]] si ha:

$$\operatorname{grad}\alpha \times x = \left(\mathrm{v}\frac{d\alpha}{dP}\right) \times x = \mathrm{I}_1\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}x = \mathrm{I}_1\mathrm{K}\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}x = \mathrm{I}_1\mathrm{k}\mathrm{K}\frac{d\alpha}{dP}x =$$
$$= \mathrm{I}_1\mathrm{k}\frac{d(\mathrm{K}\alpha)}{dP}x = \mathrm{I}_1\left\{\frac{d(\mathrm{K}\alpha x)}{dP} - \mathrm{K}\alpha\cdot\frac{dx}{dP}\right\} =$$
$$= \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha x) - \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\cdot\frac{dx}{dP}\right), \text{ c. d. d.}$$

Nel n. 3, seguente, ci occuperemo del *gradiente e rotazionale di un numero*, casi particolari di notevole importanza.

Qualunque sia il vettore a **indipendente da** *P, cioè* **costante,** *si ha:*

$$[4] \quad \begin{cases} (\operatorname{Rot}\alpha)a = \operatorname{rot}(\alpha a) \\ (\operatorname{Rot}^n\alpha)a = \operatorname{rot}^n(\alpha a) \quad \textit{per } n \textit{ intero positivo non nullo} \end{cases}$$

---

(1) Stabilito che grad α è un vettore funzione di α dalla [3] si deduce facilmente la [3′], facendo uso del sistema unitario-ortogonale i_1, i_2, i_3. Invero si ha $\operatorname{grad}\alpha \times i_r = \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha i_r)$ e se $x = \Sigma m_r i_r$, viene come conseguenza:

$$\operatorname{grad}\alpha \times x = \Sigma m_r \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha i_r) = \Sigma \operatorname{div}(m_r\cdot\mathrm{K}\alpha i_r) - \Sigma \operatorname{grad} m_r \times \mathrm{K}\alpha i_r =$$
$$= \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha x) - \mathrm{I}_1(\mathrm{K}\alpha\cdot dx/dP); \text{ c. d. d.}$$

e, più generalmente, per x vettore qualunque, anche funzione di P,

[4'] $$(\mathrm{Rot}\,\alpha)x = 2\mathrm{V}\left\{\frac{d(\alpha x)}{dP} - \alpha\frac{dx}{dP}\right\} = \mathrm{rot}(\alpha x) - 2\mathrm{V}\left(\alpha\frac{dx}{dP}\right).$$

La [4], col vettore costante a, ha notevole importanza pratica mentre la [4'] è di uso assai limitato.

Definita la ***rotazionale di un vettore*** si può assumere la [4] o la [4'] per definire la ***rotazionale di una omografia*** [cfr. precedente osservazione per il gradiente].

Dim. Dimostriamo la [4'] che per $x = a$, costante, dà subito la [4] poichè $da/dP = 0$; e del resto la dimostrazione diretta della [4'] non è più complessa della dimostrazione della [4]. La 2ª forma [4] si ottiene per *induzione* dalla prima in modo ovvio.

Dalla definizione di Rot [cfr. n. 1, [4]] e facendo uso di altre proprietà ben note [§ 1, n. 7, [2]] si ha

$$(\mathrm{Rot}\,\alpha)x = 2\mathrm{V}\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}x = 2\mathrm{V}\left\{\frac{d(\alpha x)}{dP} - \alpha\frac{dx}{dP}\right\} =$$
$$= \mathrm{rot}(\alpha x) - 2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\frac{dx}{dP}\right), \text{ c. d. d.}$$

Altre forme di definizioni possibili (ma *non* consigliabili come definizioni) degli operatori differenziali del primo ordine si ottengono considerando una terna unitaria-ortogonale-positiva i, j, k formata con vettori, o funzioni di P, o costanti, a seconda dei casi, ed esprimendo div u, rot u, grad α, Rot α per mezzo di i, j, k e delle derivate, rispetto a P, di u o di α. Si hanno le formule:

[5] $$\mathrm{div}\,u = i\times\frac{du}{dP}i + j\times\frac{du}{dP}j + k\times\frac{du}{dP}k, \text{ con } i, j, k \textit{ funzioni di } P$$

[6] $$\mathrm{rot}\,u = i\wedge\frac{du}{dP}i + j\wedge\frac{du}{dP}j + k\wedge\frac{du}{dP}k, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

[7] $$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\alpha &= \left(\frac{d\alpha}{dP}i\right)i + \left(\frac{d\alpha}{dP}j\right)j + \left(\frac{d\alpha}{dP}k\right)k, \text{ con } i, j, k \textit{ funzioni di } P\\ &= \frac{d(\alpha i)}{dP}i + \frac{d(\alpha j)}{dP}j + \frac{d(\alpha k)}{dP}k, \ldots\ldots\ldots\ldots \textit{ costanti}\\ &= \mathrm{div}(\mathrm{K}\alpha i)\,i + \mathrm{div}(\mathrm{K}\alpha j)\,j + \mathrm{div}(\mathrm{K}\alpha k)\,k, \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$[8]\quad \operatorname{Rot}\alpha = \boldsymbol{i}\wedge\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\wedge\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\wedge\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{k},\ \text{con } \boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k} \textit{ funzioni di } P.$$

Dim. [5], [6]. Essendo, per definizione,

$$\operatorname{div} u = \mathrm{I}_1\frac{du}{dP},\quad \operatorname{rot} u = 2\mathrm{V}\frac{du}{dP},$$

da formule note [cfr. Cap. I, § 1, n. 4, [2]; n. 9, [7]] si hanno subito le [5], [6].

Dim. [7] Per definizione si ha

$$\operatorname{grad}\alpha = \mathrm{v}\frac{d\alpha}{dP}$$

e quindi [Cap. I, § 6, n. 4, [8]] si ha subito la 1ª forma della [7] per $i, \ldots$ anche funzione di P. - La 2ª forma si ottiene [cfr. n. 7, [8]] per $i, \ldots$ *costanti*. - La 3ª forma si ottiene dalla identità

$$\operatorname{grad}\alpha = \operatorname{grad}\alpha\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+\operatorname{grad}\alpha\times\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\operatorname{grad}\alpha\times\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

e dalla [3] per $i, \ldots$ *costanti*.

OSSERVAZIONE. Dalla [4] risulta che sarebbe *errore* indicare con uno stesso simbolo, ad es. rot, l'operatore che si deve applicare ad un *vettore* u o ad una *omografia* α per ottenere la *rotazionale* di u o di α. - Anche le [6], [8], sebbene *formalmente identiche*, conducono alla stessa conclusione poichè, mentre

$$\boldsymbol{i}\wedge\frac{du}{dP}\boldsymbol{i}\ \text{è } \textit{vettore},\quad \boldsymbol{i}\wedge\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{i}\ \text{è } \textit{omografia}.$$

E anche non volendo tener conto di queste forme particolari si può affermare essere erroneo indicare rot e Rot con uno stesso simbolo, poichè mentre rot è operatore tra *vettori e vettori*, Rot è operatore tra *omografie e omografie*; i due operatori hanno almeno una proprietà *non* a comune e quindi **non possono** *essere identici* [cfr. Intr. 1, n. 1].

3. Gradiente e rotazionale di un numero. Derivata del gradiente di un numero e di un multiplo di un vettore.

Sia m un *numero reale* e u un *vettore* funzioni di P.

Sono notevoli, e praticamente importanti, gli enti grad m, Rot m, cioè *gradiente* e *rotazionale* di una particolare omografia, un *numero*. Le formule seguenti [1]-[3] dànno anche delle possibili definizioni degli enti ora considerati [cfr. n. 2].

[1] $$(\text{grad}\, m)\times = \frac{dm}{dP},$$ *ovvero applicando a* dP,

[1′] $$\text{grad}\, m \times dP = dm,$$ *o ad un vettore generico* x,

[1″] $$\text{grad}\, m \times x = \frac{dm}{dP} x$$

Dim. Dalla definizione di grad e da una formula nota [Cap. I, § 6, n. 4, [7]] si ha subito, osservando che l'iperomografia dm/dP è operatore tra *vettori* e *numeri*,

$$(\text{grad}\, m)\times = \left(\text{v}\frac{dm}{dP}\right)\times = \frac{dm}{dP},$$

che dimostra la [1] della quale le]1′], [1″] sono immediata conseguenza.

È appunto la [1′] che, quando non si considerano le derivate rispetto a punti, si assume per definire il *gradiente di un numero* [cfr. E. C. V., pag. 81]. - Per le molte proprietà elementari del gradiente di un numero, rimandiamo il lettore agli E. C. V. (pp. 81-86) ritenendo inutile ripeterle in questo libro.

La Rot m *resta definita da* grad m *per mezzo della formula*

[2] $$\text{Rot}\, m = (\text{grad}\, m)\wedge$$

dalla quale, applicando V *ai due membri, risulta* [cfr. Cap. I, § 2, n. 1, [10]]

[3] $$\text{grad}\, m = \text{V Rot}\, m$$

che definisce grad m *mediante* Rot m.

Dim. Dalla definizione di Rot e dalla [1] si ha

$$\text{Rot}\, m = 2\text{Vk}\frac{dm}{dP} = 2\text{Vk}(\text{grad}\, m \times);$$

applicando ad un vettore generico x si ha [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [8]]

$$(\text{Rot}\, m)x = 2\text{Vk}(\text{grad}\, m \times)x = 2\text{VH}(\text{grad}\, m, x) = (\text{grad}\, m)\wedge x$$

che dimostra la [2] e quindi anche la [3].

La derivata rispetto a P di grad m *è una* **dilatazione**, *cioè*

$$\text{[4]} \qquad \mathrm{V}\frac{d\,\mathrm{grad}\,m}{dP}=0$$

sempre quando m sia tale che due differenziali generici d, δ di esso siano commutabili.

Dim. Dalla definizione di rot, dalla [1′] e dalla [2′] del n. 2 si ha:

$$2\mathrm{V}\,\frac{d\,\mathrm{grad}\,m}{dP}\times dP\wedge\delta P=\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,m\times dP\wedge\delta P=$$
$$=d(\mathrm{grad}\,m\times\delta P)-\delta(\mathrm{grad}\,m\times dP)=d\delta m-\delta dm=0;\ \text{c. d. d.}$$

Per la derivata del vettore mu rispetto a P si ha, come nuova forma [cfr. § 1. n. 7, [3]],

$$\text{[5]} \qquad \frac{d(mu)}{dP}=m\frac{du}{dP}+\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,m,u).$$

Dim. $\dfrac{d(mu)}{dP}x=m\dfrac{du}{dP}x+u\cdot\dfrac{dm}{dP}x=m\dfrac{du}{dP}x+\mathrm{grad}\,m\times x\cdot u=$

$$=m\frac{du}{dP}x+\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,m,u)x;\ \text{c. d. d.}$$

Infine: se rispetto al sistema cartesiano ortogonale O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ si ha

$$P=O+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

allora m è funzione di x, y, z e si ha in modo ovvio

$$\text{[8]} \qquad \mathrm{grad}\,m=\frac{\partial m}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial m}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial m}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\text{[9]} \qquad \mathrm{Rot}\,m=\frac{\partial m}{\partial x}\cdot\boldsymbol{i}\wedge+\frac{\partial m}{\partial y}\cdot\boldsymbol{j}\wedge+\frac{\partial m}{\partial z}\cdot\boldsymbol{k}\wedge.$$

4. Differenziali.

Gli operatori differenziali del 1° ordine div, rot, grad, Rot sono *commutabili* col differenziale. Vale a dire: se $\boldsymbol{u}$

è *vettore* e α è *omografia*, funzioni di P, si ha:

$$[1]\qquad \left\{\begin{array}{ll} d(\operatorname{div} u) = \operatorname{div}(du), & d(\operatorname{rot} u) = \operatorname{rot}(du) \\ d(\operatorname{grad} \alpha) = \operatorname{grad}(d\alpha), & d(\operatorname{Rot} \alpha) = \operatorname{Rot}(d\alpha). \end{array}\right.$$

La stessa proprietà ora indicata si può esprimere, mediante derivate, sotto le forme [1′] nelle quali a è un *vettore arbitrario indipendente da P* (*costante*):

$$[1']\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d(\operatorname{div} u)}{dP}\, a = \operatorname{div}\left(\dfrac{du}{dP}\, a\right), & \dfrac{d(\operatorname{rot} u)}{dP}\, a = \operatorname{rot}\left(\dfrac{du}{dP}\, a\right) \\ \dfrac{d(\operatorname{grad} \alpha)}{dP}\, a = \operatorname{grad}\left(\dfrac{d\alpha}{dP}\, a\right), & \dfrac{d(\operatorname{Rot} \alpha)}{dP}\, a = \operatorname{Rot}\left(\dfrac{d\alpha}{dP}\, a\right). \end{array}\right.$$

Dim. Per dimostrare le [1] basta tener presente le definizioni degli operatori differenziali considerati [cfr. § 2, n. 1, [1] - [4]] e osservare che il simbolo d di differenziale generico è commutabile con gli operatori I_1, V, v, k. - Le [1′] si riducono subito alle [1] ponendo dP, che è vettore arbitrario indipendente da P, al posto di a.

Per il differenziale, du, del vettore u funzione di P si hanno le due forme seguenti, molto utili nelle applicazioni

$$[2]\qquad du = (\operatorname{rot} u) \wedge dP + \left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right) dP$$

$$[3]\qquad du = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} u) \wedge dP + \left(\mathrm{D}\frac{du}{dP}\right) dP.$$

Dim. Posto $\alpha = du/dP$ e ricordando [cfr. Cap. I, § 1, n. 10] che

$$\alpha = \mathrm{K}\alpha + 2(\mathrm{V}\alpha)\wedge, \quad \alpha = \mathrm{D}\alpha + (\mathrm{V}\alpha)\wedge,$$

allora applicando a dP e tenendo presente che $\operatorname{rot} u = 2\mathrm{V}(du/dP)$ si hanno subito le [2], [3].

5. Prodotti funzionali. Casi particolari per il grad, Rot di $u\wedge\alpha$ e $\alpha\cdot u\wedge$.

Siano: u un *vettore*, m un *numero reale*, α, β, delle *omografie*, tutti funzioni del punto P.

Ci proponiamo di applicare gli operatori differenziali del primo ordine ai *prodotti funzionali*, mu, αu, $\beta\alpha$.

Per il prodotto del vettore u per il numero reale m, abbiamo le formule notevoli:

[1] $\operatorname{div}(mu) = m \operatorname{div} u + \operatorname{grad} m \times u$,
[2] $\operatorname{rot}(mu) = m \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} m \wedge u = m \operatorname{rot} u + (\operatorname{Rot} m) u$;

e per il prodotto (funzionale) dell'omografia α per il numero reale m (speciale omografia), si ha:

[3] $\operatorname{grad}(m\alpha) = m \operatorname{grad} \alpha + \alpha \operatorname{grad} m$,
[4] $\operatorname{Rot}(m\alpha) = m \operatorname{Rot} \alpha + \operatorname{grad} m \wedge \alpha = m \operatorname{Rot} \alpha + (\operatorname{Rot} m)\alpha$.

e giova confrontare le [1], [2], *rispettivamente, con le* [3], [4].

Dim. [1], [2]. Da formule note [cfr. n. 1, [1], [2]; n. 3, [5]] si ha

$$\operatorname{div}(mu) = I_1 \frac{d(mu)}{dP} = I_1 \left\{ m \frac{du}{dP} + H \operatorname{grad} m, u) \right\} = m \operatorname{div} u + \operatorname{grad} m \times u,$$

$$\operatorname{rot}(mu) = 2V \frac{d(mu)}{dP} = 2V \left\{ m \frac{du}{dP} + H(\operatorname{grad} m, u) \right\} = m \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} m \wedge u$$

e resta così dimostrata la [1] e la 1ª forma della [2]. La 2ª forma della [2] risulta dalla 1ª e dall'essere $\operatorname{Rot} m = \operatorname{grad} m \cdot \wedge$ [cfr. n. 3, [2]].

Dim. [3]. Citando in margine, a destra, le formule delle quali ci serviamo per passare da una forma all'altra, si ha successivamente, ricordando la definizione di grad [cfr. § 2, n. 1, [3]]:

$$\operatorname{grad}(m\alpha) = v \frac{d(m\alpha)}{dP} = \qquad [\S\ 1,\ n.\ 6,\ [2]]$$

$$= v k \frac{d(m\alpha)}{dP} = \qquad [\S\ 1,\ n.\ 5,\ [3]]$$

$$= v \left\{ m \cdot k \frac{d\alpha}{dP} + k \frac{dm}{dP} \cdot \alpha \right\} =$$

$$= m \operatorname{grad} \alpha + v\left(k \frac{dm}{dP} \cdot \alpha\right) = \qquad [\text{Cap. I},\ \S\ 6,\ n.\ 4,\ [6]]$$

$$= m \operatorname{grad} \alpha + v\left(\frac{dm}{dP} \cdot K\alpha\right) = \qquad [n.\ 3,\ [1]]$$

$$= m \operatorname{grad} \alpha + v(\operatorname{grad} m \times K\alpha) =$$

$$= m \operatorname{grad} \alpha + v \{ (\alpha \operatorname{grad} m) \times \} = \qquad (\text{Cap. I}. \S\ 6,\ n.\ 4,\ [2]]$$

$$= m \operatorname{grad} \alpha + \alpha \operatorname{grad} m; \text{ c. d. d.}$$

Dim. [4]. Operando come per la [3] si ha:

$$\mathrm{Rot}(m\alpha) = 2\mathrm{V}\mathrm{k}\,\frac{d(m\alpha)}{dP} = \qquad [§ 1, n. 5, [3]]$$

$$= 2\mathrm{V}\left(m\cdot\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP} + \mathrm{k}\frac{dm}{dP}\cdot\alpha\right) = \qquad [§ 1. n. 6, [2]]$$

$$= m\,\mathrm{Rot}\,\alpha + 2\mathrm{V}\left(\mathrm{k}\,\frac{dm}{dP}\cdot\alpha\right) = \qquad [Cap. 1, § 6, n. 2, [3]]$$

$$= m\,\mathrm{Rot}\,\alpha + 2\mathrm{V}\left(\mathrm{k}\,\frac{dm}{dP}\right)\cdot\alpha =$$

$$= m\,\mathrm{Rot}\,\alpha + (\mathrm{Rot}\,m)\alpha = \qquad [n. 3, [2]]$$

$$= m\,\mathrm{Rot}\,\alpha + (\mathrm{grad}\,m)\wedge\alpha;\ \text{c. d. d.}$$

Altra Dim. delle [3], [4]. Se nella [1] poniamo $\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ vettore costante, al posto di u si ha:

$$\mathrm{div}(m\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}) = m\,\mathrm{div}(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}) + \mathrm{grad}\,m \times \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a},$$

da cui applicando la [3] del n. 2 si ha

$$\mathrm{gra}(m\alpha) \times \boldsymbol{a} = m\cdot\mathrm{grad}\,\alpha \times \boldsymbol{a} + \alpha\,\mathrm{grad}\,m \times \boldsymbol{a}$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la [3]. - Analogamente per la [4].

Per la **divergenza** *e la* **rotazionale** *di* αu si ha:

$$[5] \qquad \mathrm{div}(\alpha u) = \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha \times u + \mathrm{I}_1\left(\alpha\cdot\frac{du}{dP}\right)$$

$$[6] \qquad \mathrm{rot}(\alpha u) = (\mathrm{Rot}\,\alpha)u + 2\mathrm{V}\left(\alpha\frac{du}{dP}\right).$$

Dim. Le [5], [6] sono le formule già note [3'], [4'] del n. 2 scritte sotto altra forma.

Per il **gradiente** *e la* **rotazionale** *del prodotto funzionale* $\beta\alpha$ *dell'omografia* α *per l'omografia* β *si ha:*

$$[7] \qquad \mathrm{grad}(\beta\alpha) = \beta\,\mathrm{grad}\,\alpha + \mathrm{v}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\right),$$

$$[8] \qquad \mathrm{Rot}(\beta\alpha) = (\mathrm{Rot}\,\beta)\alpha + 2\mathrm{V}\left(\beta\cdot\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\right).$$

Dim. Tenendo presente le definizioni di grad e Rot si ha, per altre proprietà citate a margine [cfr. Dim. [3], [4]]:

$$\text{grad}(\beta\alpha) = \text{v}\,\frac{d(\beta\alpha)}{dP} = \qquad [\S\ 1,\ \text{n. } 6,\ [2]]$$

$$= \text{vk}\,\frac{d(\beta\alpha)}{dP} = \qquad [\S\ 1,\ \text{n. } 5,\ [3]]$$

$$= \text{v}\left\{\beta\cdot\text{k}\,\frac{d\alpha}{dP} + \text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\right\} = \qquad [\text{Cap. I}, \S\ 6, \text{n. } 4, [5]]$$

$$= \beta\,\text{grad}\,\alpha + \text{v}\left(\text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\right).$$

$$\text{Rot}(\beta\alpha) = 2\text{Vk}\,\frac{d(\beta\alpha)}{dP} = \qquad [\S\ 1,\ \text{n. } 5,\ [3]]$$

$$= 2\text{V}\left\{\text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha + \beta\cdot\text{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\right\} = \qquad [\text{Cap. I}, \S\ 6, \text{n. } 2, [3]]$$

$$= (\text{Rot}\,\beta)\alpha + 2\text{V}\left(\beta\cdot\text{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\right).$$

Se le omografie α e $d\beta$ sono **commutabili** *rispetto al loro prodotto funzionale, cioè*

(a) $\alpha\cdot d\beta = d\beta\cdot\alpha$, *che* **equivale** *a* (b) $\alpha\cdot\text{k}\,\dfrac{d\beta}{dP} = \text{k}\,\dfrac{d\beta}{dP}\cdot\alpha$

allora si ha

[9] $$\text{grad}(\beta\alpha) = \beta\,\text{grad}\,\alpha + \alpha\,\text{grad}\,\beta$$

[10] $$\text{Rot}(\alpha\beta) = (\text{Rot}\,\alpha)\beta + (\text{Rot}\,\beta)\alpha$$

dalle quali possono dedursi le [3], [4], *poichè per* $\beta = m$ *numero è vera la* (a) *e del resto si ha anche* $m\alpha = \alpha m$.

Dim. Cominciamo con l'osservare che le (a) (b) sono *equivalenti.*

Infatti; si ha per proprietà ben note, e che non stiamo a richiamare, che la (a) *equivale* alle eguaglianze seguenti:

$$\alpha\cdot\frac{d\beta}{dP}dP = \frac{d\beta}{dP}dP\cdot\alpha;\quad \alpha\cdot\frac{d\beta}{dP}dP\cdot x = \frac{d\beta}{dP}dP\cdot\alpha x = \text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha dP\cdot x;$$

$$\alpha\cdot\frac{d\beta}{dP} = \text{k}\left(\text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\right);\quad \text{k}\left(\alpha\cdot\frac{d\beta}{dP}\right) = \text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha;$$

$$\alpha\cdot\text{k}\frac{d\beta}{dP} = \text{k}\,\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha \text{ che è appunto la } (b).$$

Consideriamo ora i secondi termini dei secondi membri delle [7], [8], dopo avere, nella [8], scambiate tra loro α e β. Nella ipotesi (a) e per la tesi di (b) si ha:

$$\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\right)=\mathrm{v}\left(\alpha\cdot\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\right)=\alpha\cdot\mathrm{vk}\frac{d\beta}{dP}, \qquad \text{[Cap. I, § 6, n. 4, [5]];}$$

$$2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\right)=2\mathrm{V}\left(\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\cdot\alpha\right)=2\left(\mathrm{Vk}\frac{d\beta}{dP}\right)\alpha \qquad \text{[Cap. I, § 6, n. 2, [3]],}$$

che, per le definizioni di grad e Rot, dimostrano le [9], [10].

Si hanno due espressioni notevoli per il grad e Rot delle due omografie $u\wedge\alpha$, $\alpha\cdot u\wedge$:

[11] $$\operatorname{grad}(u\wedge\alpha)=u\wedge\operatorname{grad}\alpha+2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right),$$

[12] $$\operatorname{grad}(\alpha\cdot u\wedge)=-\alpha\operatorname{rot}u+\mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{K}\alpha u.$$

Dim.-[11]. Essendo $u\wedge\alpha$ il prodotto funzionale di α per $u\wedge$ si ha [cfr. § 2, n. 5, [7]]

(a) $$\operatorname{grad}(u\wedge\alpha)=u\wedge\operatorname{grad}\alpha+\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d(u\wedge)}{dP}\cdot\alpha\right).$$

Calcoliamo il 2° termine del 2° membro della (a). Si ha, in virtù delle proposizioni citate a margine, e per a vettore costante:

$$\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d(u\wedge)}{dP}\cdot\alpha\right)\times a=\mathrm{I}_1\mathrm{k}'\left(\mathrm{k}\frac{d(u\wedge)}{dP}\cdot\alpha\right)a= \qquad \text{[Cap. I, § 6, n. 4, [1]]}$$

$$=\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\cdot\mathrm{k}'\mathrm{k}\frac{d(u\wedge)}{dP}a\right)= \qquad \text{[Cap. I, § 6, n. 3, [6]]}$$

$$=-\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\cdot\mathrm{k}\frac{d(u\wedge)}{dP}a\right)= \qquad \text{[Cap. I, § 6, n. 3, [4]]}$$

$$=-\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\cdot\frac{d(u\wedge a)}{dP}\right)= \qquad \text{[§ 1, n. 7, [2]]}$$

$$=\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\cdot a\wedge\frac{du}{dP}\right)= \qquad \text{[§ 1, n. 3, [1]]}$$

$$=\mathrm{I}_1\left\{a\wedge\left(\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha\right)\right\}=$$

$$=-2a\times\mathrm{V}\left(\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha\cdot\right)= \qquad \text{[Cap. I, § 4, n. 2, [1]]}$$

$$=2\,a\times\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right);$$

che, essendo a vettore arbitrario, prova che

$$(b) \qquad \mathrm{v}\left(\mathrm{k}\,\frac{d(\boldsymbol{u}\wedge)}{dP}\cdot\alpha\right) = 2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right).$$

Dalle (a), (b) si ha la [11].

N. B. - Non volendo far uso delle iperomografie si può osservare che

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\wedge\alpha)\times\boldsymbol{a} = \operatorname{div}\{\mathrm{K}(\boldsymbol{u}\wedge\alpha)\boldsymbol{a}\}$$

e sviluppare la div [cfr. A. V. G., 1ª ediz., pag. 84, [4] e pag. 86]; ma il calcolo non è più semplice del precedente.

Dim. [12]. Operando come per la [11] si ha

$$\operatorname{grad}(\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge) = \alpha\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\wedge) + \mathrm{v}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\boldsymbol{u}\wedge\right) =$$
$$= -\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \mathrm{v}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\boldsymbol{u}\wedge\right)$$

e bisogna dimostrare ancora che

$$\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\boldsymbol{u}\wedge\right) = \mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u}$$

il che il lettore può fare per esercizio. - Diamo invece altra forma più rapida [cfr. il N. B. della Dim. [11]], senza stare a citare le proposizioni note delle quali facciamo uso:

$$\operatorname{grad}(\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge)\times\boldsymbol{a} = \operatorname{div}\{\mathrm{K}(\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge)\boldsymbol{a}\} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\wedge\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}) =$$
$$= -\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\operatorname{rot}(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}\times\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\operatorname{Rot}\mathrm{K}\alpha)\boldsymbol{a} =$$
$$= \{-\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u}\}\times\boldsymbol{a};$$ c. d. d.

N. B. - Risulta dalle Dim. [11], [12] che l'uso delle iperomografie può risultare più semplice o più complesso delle forme dirette.

Meno semplici risultano le formule che dànno la Rot di $\boldsymbol{u}\wedge\alpha$ e $\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge$; anzi per scriverle sotto forma abbastanza concisa è utile ricorrere all'operatore C che per una omografia qualunque α si definisce ponendo:

$$\mathrm{C}\alpha = \mathrm{I}_1\alpha - \alpha.$$

Ciò fatto si ha:

[13] $$\mathrm{Rot}(u \wedge \alpha) = \mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha, u) - \frac{d\alpha}{dP} u - \left(\mathrm{C}\frac{du}{dP}\right)\alpha,$$

[14] $$\mathrm{Rot}(\alpha \cdot u \wedge) = -\mathrm{Rot}(u \wedge \alpha) - \mathrm{C}\frac{d(\mathrm{C}\alpha u)}{dP}$$

Dim. Il lettore può dimostrare per esercizio [cfr. A. V. G., 1ª ediz., p. 87].

Osservazione. Se applichiamo il teorema [12] del § 2, n. 1 di Intr. si ha, ad es.,

(a) $$\mathrm{div}(\alpha u) = \mathrm{div}(\alpha u)_{u\ \mathrm{cost}} + \mathrm{div}(\alpha u)_{\alpha\ \mathrm{cost}}$$

che deve dare la [5]. Ora il 1° termine del 2° membro della (a) vale appunto $\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha \times u$ [cfr. n. 2, [3]]; il calcolo del 2° termine si fa precisamente come nella dimostrazione della [5]. Ne segue che la dimostrazione della [5] non resta facilitata dalla applicazione della (a). Lo stesso dicasi per le altre formule [1] - [10].

Vedremo in seguito che in alcuni casi è invece molto rapida l'applicazione della formula [12] del § 2, n. 1 di Intr.

6. Prodotti vettoriali e interni.

Siano u, v vettori funzioni di P. Ci proponiamo di calcolare la div e rot del *prodotto vettoriale* di u per v, e il grad e Rot del *prodotto interno* di u per v. Le formule che si ottengono sono di grande importanza pratica.

[1] $$\mathrm{div}(u \wedge v) = v \times \mathrm{rot}\, u - u \times \mathrm{rot}\, v.$$

Dim. È noto [cfr. § 1, n. 3, [1]] che

(a) $$\frac{d(u \wedge v)}{dP} = u \wedge \frac{dv}{dP} - v \wedge \frac{du}{dP};$$

applicando I_1 ai due membri della (a) si ha [cfr. Cap. I, § 4, n. 2, [1[

$$\mathrm{I}_1 \frac{d(u \wedge v)}{dP} = -u \times 2\mathrm{V}\frac{dv}{dP} + v \times 2\mathrm{V}\frac{du}{dP}$$

che per le definizioni di div e rot [cfr. n. 1, [1], [2]] coincide con la [1].

$$[2] \qquad \operatorname{rot}(u \wedge v) = \left(\operatorname{div} v - \frac{dv}{dP}\right) u - \left(\operatorname{div} u - \frac{du}{dP}\right) v =$$
$$= (\operatorname{Rot} u \wedge)\, v - (\operatorname{Rot} v \wedge)\, u.$$

Dim. Applicando $2V$ ai due membri della (a) si ha [cfr. § 1, n. 2, [3]]

$$2V \frac{d(u \wedge v)}{dP} = \left(I_1 \frac{dv}{dP} - \frac{dv}{dP}\right) u - \left(I_1 \frac{du}{dP} - \frac{du}{dP}\right) v$$

che per la definizione di div e rot dimostra la 1ª forma della [2].

È noto [cfr. § 2, n. 1, [12]] che

$$(b) \qquad \operatorname{rot}(u \wedge v) = \{\operatorname{rot}(u \wedge v)\}_{v \text{ cost}} - \{\operatorname{rot}(v \wedge u)\}_{u \text{ cost}};$$

ma si ha [cfr. n. 5, [5]]

$$\{\operatorname{rot} u \wedge v\}_{v \text{ cost}} = (\operatorname{Rot} u \wedge) v, \quad \{\operatorname{rot}(v \wedge u)\}_{v \text{ cost}} = (\operatorname{Rot} v \wedge) u$$

e quindi la (b) dà subito la 2ª forma della [2].

$$[3] \qquad \operatorname{grad}(u \times v) = K \frac{du}{dP} v + K \frac{dv}{dP} u.$$

Dim. Si è già dimostrato [cfr. § 1, n, 3, [2]]

$$\frac{d(u \times v)}{dP} = \left(K \frac{du}{dP} v\right) \times + \left(K \frac{dv}{dP} u\right) \times;$$

applicando v ai due membri [cfr.§ 2, n. 1, [3]; Cap. I, § 6, n. 4, [2]] si ha subito la [3].

$$[4] \qquad \operatorname{Rot}(u \times v) = \left(K \frac{du}{dP} v\right) \wedge + \left(K \frac{dv}{dP} u\right) \wedge.$$

Dim. Risulta subito dalla [3] e dalla [2] del n. 3.

Sono interessanti i due seguenti casi particolari che si ottengono dalla [3].

$$[5] \qquad \operatorname{grad} u^2 = 2K \frac{du}{dP} u,$$

$$[6] \qquad \operatorname{grad} \operatorname{mod} u = K \frac{du}{dP} \frac{u}{\operatorname{mod} u}, \quad \text{per } \operatorname{mod} u \neq 0.$$

Dim. La [5] si ottiene subito dalla [3] per $v = u$. - Ricordando [E. C. V.] che $(\operatorname{mod} u)^2 = u^2$ e che [E. C. V.] quindi

$$\operatorname{grad} u^2 = 2 \operatorname{mod} u \cdot \operatorname{grad} \operatorname{mod} u,$$

dalla [5] si ha subito la [6]. [Cfr. anche § 1, n. 3, [4]] (1).

Se O è *punto* e α *omografia* costanti, allora

[7[$$\operatorname{grad} \{ (P - O) \times \alpha(P - O) \} = 2 \mathrm{D}\alpha(P - O) \text{ (2)}.$$

Dim. $\operatorname{grad} \{ (P - O) \times \alpha(P - O) \} \times dP = dP \times \alpha(P - O) + (P - O) \times \alpha dP =$
$= dP \times (\alpha + \mathrm{K}\alpha)(P - O) = dP \times 2\mathrm{D}\alpha(P - O)$; c. d. d.

7. Operatori grad, Rot applicati ad omografie particolari (numero, assiale, diade).

Siano: m un *numero reale* e u, v *vettori* funzioni del punto P.

Per l'omografia m, o esattamente $m\odot$, si ha, come è noto

[1] $$\operatorname{grad} m \times = \frac{dm}{dP}$$ [n. 3, [1]]

[2] $$\operatorname{Rot} m = (\operatorname{grad} m) \wedge$$ [n. 3, [2]].

---

(1) Si ha la formula che in molti casi può essere utile:

$$\frac{d \dfrac{u}{\operatorname{mod} u}}{dP} = -\frac{1}{(\operatorname{mod} u)^3} (u\wedge)^2 \frac{du}{dP}, \text{ per } \operatorname{mod} u \neq 0.$$

Infatti, applicando proprietà ben note, si ha successivamente:

$$\frac{d \dfrac{u}{\operatorname{mod} u}}{dP} = \frac{1}{\operatorname{mod} u} \frac{du}{dP} + \mathrm{H}\left(\operatorname{grad} \frac{1}{\operatorname{mod} u}, u\right) =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{mod} u} \frac{du}{dP} - \frac{1}{(\operatorname{mod} u)^2} \mathrm{H}\left(\mathrm{K} \frac{du}{dP} \frac{u}{\operatorname{mod} u}, u\right) =$$
$$= \frac{1}{(\operatorname{mod} u)^3} \left\{ u^2 \frac{du}{dP} - \mathrm{H}(u, u) \frac{du}{dP} \right\} = \text{ecc.; c. d. d.}$$

(2) Se invece α è funzione di P si ha:

$$\operatorname{grad} \{ (P - O) \times \alpha(P - O) \} = 2\mathrm{D}\alpha(P - O) + \mathrm{k}' \frac{d\alpha}{dP} (P - O)(P - O).$$

Per la *assiale* $u\wedge$ si ha:

[3] $$\mathrm{grad}(u\wedge) = -\mathrm{rot}\, u.$$

[4] $$\mathrm{Rot}(u\wedge) = \frac{du}{dP} - \mathrm{div}\, u.$$

Dim. Per a vettore costante si ha [cfr. n. 2, [3], [4]; n. 6, [1[, [2]]

$$(\mathrm{grad}\, u\wedge) \times a = -\mathrm{div}\,(u\wedge a) = -\mathrm{rot}\, u \times a;$$
$$(\mathrm{Rot}\, u\wedge)a = \mathrm{rot}\,(u\wedge a) = -\left(\mathrm{div}\, u - \frac{du}{dP}\right)a;$$

che per l'arbitrarietà di a dimostrano le [3], [4].

Per la *diade* $\mathrm{H}(u, v)$ si ha:

[5] $$\mathrm{grad}\, \mathrm{H}(u, v) = (\mathrm{div}\, u)v + \frac{dv}{dP}u$$

[6] $$\mathrm{Rot}\, \mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(u, \mathrm{rot}\, v) - v\wedge \mathrm{K}\frac{du}{dP}.$$

Dim. Applicando formule ben note, e che non stiamo a citare, si ha:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\, \mathrm{H}(u, v) \times a &= \mathrm{div}\, \{\mathrm{H}(v, u)a\} = \mathrm{div}\, \{v \times a \cdot u\} = \\ &= v \times a \cdot \mathrm{div}\, u + \mathrm{grad}\,(v \times a) \times u = \\ &= (\mathrm{div}\, u \cdot v) \times a + \left(\mathrm{K}\frac{dv}{dP}a\right) \times u = \\ &= \left\{\mathrm{div}\, u \cdot v + \frac{dv}{dP}u\right\} \times a;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\mathrm{Rot}\, \mathrm{H}(u, v)\}\, a &= \mathrm{rot}\, \{\mathrm{H}(u, v)a\} = \mathrm{rot}\, \{u \times a \cdot v\} = \\ &= u \times a \cdot \mathrm{rot}\, v + \mathrm{grad}\,(u \times a)\wedge v = \\ &= \left\{\mathrm{H}(u, \mathrm{rot}\, v) - v\wedge \mathrm{K}\frac{du}{dP}\right\} a,\end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà del vettore *costante* a dimostrano le [5], [6].

8. Primo invariante, vettore e coniugata di Rot α.

Degli operatori differenziali del 1° ordine definiti nel n. 1, soltanto il Rot applicato ad una *omografia* α produce una omografia. È importante saper calcolare il *primo inva-*

riante, il *vettore*, e quindi anche la *coniugata*, della omografia $\mathrm{Rot}\,\alpha$. Si ha:

[1] $$\mathrm{I}_1\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -2\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha$$

[2] $$2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{grad}(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)$$

[3] $$\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{Rot}\,\alpha - \{\mathrm{grad}(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\}\wedge.$$

Dim. Per la definizione di $\mathrm{Rot}\,\alpha$ si ha

$$\mathrm{I}_1\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 2\mathrm{I}_1\mathrm{V}\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP},\quad 2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 4\mathrm{V}\mathrm{V}\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP};$$

applicando formule note [cfr. Cap. I, § 6; n. 3, [10]; n. 4, [9]] si ha:

$$\mathrm{I}_1\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -2\mathrm{I}_1\mathrm{V}\frac{d\alpha}{dP} = -2\mathrm{I}_1\frac{d(\mathrm{V}\alpha)}{dP} = -2\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha;$$

$$2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{v}\left(\mathrm{I}_1\frac{d\alpha}{dP} - \frac{d\alpha}{dP}\right) = \mathrm{v}\left(\frac{d(\mathrm{I}_1\alpha)}{dP} - \frac{d\alpha}{dP}\right) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)$$

che dimostrano le [1], [2].

La [3] risulta dalla [2] e dalla nota identità $\mathrm{K}\beta = \beta - (\mathrm{V}\beta)\wedge$.

9. L'iperomografia $d\alpha/dP$ e nuova forma della $d(\alpha u)/dP$. Abbiamo già dimostrato [cfr, § 1, n. 4] che, essendo α omografia funzione di P; se

$$f = \mathrm{I}_1,\ \mathrm{K},\ \mathrm{D},\ \mathrm{V},\quad \text{allora}\quad f\frac{d\alpha}{dP} = \frac{d(f\alpha)}{dP},$$

e ci rimane da dare le notevoli espressioni delle omografie

$$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}u,\quad \mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}u,$$

essendo u vettore arbitrario funzione di P, e una nuova forma della $d(\alpha u)/dP$ [cfr. § 1, n. 7].

Si hanno intanto le due formule fondamentali:

[1] $$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}u = \frac{d\alpha}{dP}u - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\cdot u\wedge,$$

[2] $$\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}u = \mathrm{K}\left(\mathrm{k}\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}u\right) = \frac{d\alpha}{dP}u + u\wedge\,\mathrm{Rot}\,\alpha.$$

Dim. Se nella [2] del n. 1. poniamo $K\alpha\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ costante, al posto di $\boldsymbol{u}$, ed osserviamo che dP, δP sono vettori arbitrari, si ha subito

$$\operatorname{rot}(K\alpha\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{x} = \left(\frac{d(K\alpha\boldsymbol{a})}{dP}\boldsymbol{u}\right) \times \boldsymbol{x} - \left(\frac{d(K\alpha\boldsymbol{a})}{dP}\boldsymbol{x}\right) \times \boldsymbol{u}$$

e da questa [cfr. n. 1, [4]; § 1, n. 7, [5]]

$$(\mathrm{Rot}\,K\alpha)\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{x} = \left(\frac{dK\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} - \left(\frac{dK\alpha}{dP}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u};$$

applicando il teorema di commutazione

$$\boldsymbol{a} \times K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \left\{\left(\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{x} - \left(\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{u}\right\};$$

per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ e dall'essere $k\mu_2\boldsymbol{ab} = \mu_2\boldsymbol{ba}$ si ha:

$$\{K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge\}\,\boldsymbol{x} = \left\{\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} - k\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\right\}\boldsymbol{x};$$

ma $\boldsymbol{x}$ è arbitrario e quindi risulta la [1].

Tenendo presente che $k' = KkK$ si ha:

$$k'\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} = KkK\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} = K\left\{k\left[\frac{dK\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\right]\right\}$$

che dimostra la 1ª forma della [2]. - Se nella [1] si cambia α in $K\alpha$ poi si opera con K si ottiene la 2ª forma della [2].

La derivata di $\alpha\boldsymbol{u}$ si può ora esprimere senza far uso del vettore generico $\boldsymbol{x}$ o dell'operatore k [cfr. § 1, n. 7, [1], [2]] e si ha:

[3] $$\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} = \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} - K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge.$$

Dim. Dalla [2] del § 1, n. 7 e dalla [1] ora dimostrata si ha:

$$\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} = \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + k\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} = \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} - K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge, \text{ c. d. d.}$$

Si è dimostrato [cfr. § 1, n. 7, [6]] che

$$\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} = \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}$$

nel solo caso che α sia la ***derivata di un vettore***, cioè αdP un ***differenziale esatto***. Ora la [3] prova che ciò si verifica nel solo caso che

$$\mathrm{Rot\,K}\alpha = 0$$

il che noi troveremo in seguito [cfr. Cap. III, § 2, n. 1, [5]] per altra via.

Se ci riferiamo al solito sistema unitario-ortogonale di vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ costanti, si ha:

[4] $$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{k} =$$
$$= \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}\cdot\frac{d(\alpha\boldsymbol{i})}{dP} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{j}\cdot\frac{d(\alpha\boldsymbol{j})}{dP} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{k}\cdot\frac{d(\alpha\boldsymbol{k})}{dP}$$

[5] $$\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{k}'\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{k} =$$
$$= \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{K}\frac{d(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{i})}{dP} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{K}\frac{d(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{j})}{dP} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{K}\frac{d(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{k})}{dP},$$

notando che le prime forme valgono anche per $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ funzioni di P.

Dim. Applicando $\mathrm{k}(d\alpha/dP)$ e $\mathrm{k}'(d\alpha/dP)$ alla identità [E. C. V.]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

si hanno subito le prime forme delle [4], [5].

La 2ª forma della [4] risulta dalla 1ª osservando che per $\boldsymbol{i}, \ldots$ costanti si ha $d(\alpha\boldsymbol{i})/dP = \mathrm{k}(d\alpha/dP)\boldsymbol{i}, \ldots$ Da questa e dalla 1ª forma della [2] risulta la 2ª forma della [5].

Osservazioni. 1ª Dalla [3] si ricava l'omografia $(d\alpha/dP)\boldsymbol{u}$,

[3'] $$\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} = \frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} - \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + \mathrm{K\,Rot\,K}\alpha\cdot\boldsymbol{u}\wedge$$

e anche la sua coniugata

[3''] $$\mathrm{K}\left(\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\right) = \mathrm{K}\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} - \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha - \boldsymbol{u}\wedge\mathrm{Rot\,K}\alpha,$$

ovvero sotto altra forma, poichè $\mathrm{K}(d\alpha/dP) = (d\mathrm{K}\alpha)/dP$

$$[3'''] \qquad \mathrm{K}\left(\frac{d\alpha}{dP}\,u\right) = \frac{d(\mathrm{K}\alpha u)}{dP} - \mathrm{K}\alpha\cdot\frac{du}{dP} + \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha\cdot u\wedge.$$

Applicando gli operatori I_1, K, D, V si ritrovano identità note [cfr. § 1, n. 4]. Applicando gli operatori grad, Rot si ottengono le formule seguenti che il lettore può dimostrare per esercizio [cfr. A. V. G., 1ª ediz., pag. 85, 88]:

$$[6] \qquad \mathrm{grad}\left(\frac{d\alpha}{dP}\,u\right) = \frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{dP}\,u + \mathrm{grad}\left(\alpha\cdot\mathrm{K}\,\frac{du}{dP}\right) - \alpha\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u,$$

$$[7] \qquad \mathrm{Rot}\left(\frac{d\alpha}{dP}\,u\right) = \frac{d\,\mathrm{Rot}\,\alpha u}{dP} - \mathrm{Rot}\left(\mathrm{K}\,\frac{du}{dP}\cdot\alpha\right) + \left(\mathrm{div}\,u - \frac{du}{dP}\right)\mathrm{Rot}\,\alpha.$$

2ª Nella 1ª ediz. di A. V. G. abbiamo fatto uso dell'operatore binario $\mathrm{S}(\alpha, u)$, introdotto da M. PIERI [cfr. pag. 95], definito ponendo

$$(a) \qquad \mathrm{S}(\alpha, u)x = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,x\right)u.$$

Una volta introdotto l'operatore k per le iperomografie (H_2) si ha, come è ben noto,

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}\,x\right)u = \left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\,u\right)x$$

e in conseguenza, dalla (a) essendo x arbitrario,

$$(b) \qquad \mathrm{S}(\alpha, u) = \mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\,u.$$

Si può dunque fare a meno dell'operatore binario S. Il lettore può, per utile esercizio, tradurre, mediante k, le proposizioni [1] - [16], pp. 96-97 della 1ª ediz. di A. V. G.

Esercizi.

(1) $a \times \operatorname{grad} \log I_3\alpha = I_1\left(\alpha^{-1}\cdot\frac{d\alpha}{dP}a\right) = -I_1\left(\alpha\cdot\frac{d\alpha^{-1}}{dP}a\right)$, a cost. e α invertibile.

(2) $\operatorname{grad} R'(\alpha,\beta) = 2V\,\{\alpha\cdot \operatorname{Rot} K\beta + \beta\cdot\operatorname{Rot} K\alpha\}$.

(3) $\operatorname{grad} R'(du/dP,\ dv/dP) = 0$.

(4) $\operatorname{rot} u \times x\wedge y = \left(\frac{du}{dP}x\right)\times y - \left(\frac{du}{dP}y\right)\times x$.

(5) $(\operatorname{rot} u)\wedge = du/dP - K(du/dP)$.

(6) $\operatorname{div} u = \{(du/dP)a - \operatorname{rot}(u\wedge a)\}\times a$, a cost. e $a^2 = 1$.

(7) $\operatorname{div} u = \{\operatorname{grad}(u\times a) - \operatorname{rot}(u\wedge a)\}\times a$, a cost. e $a^2 = 1$.

(8) $K \operatorname{Rot} K\alpha(x\wedge y) = \left(\frac{d\alpha}{dP}x\right)y - \left(\frac{d\alpha}{dP}y\right)x$.

(9) $\left(\frac{d\alpha}{dP}\beta x\right)y - \left(\frac{d\alpha}{dP}\beta y\right)x =$
$= \{K \operatorname{Rot} K\alpha\cdot CK\beta - K\operatorname{Rot} K(\alpha\beta) + \alpha\cdot K\operatorname{Rot} K\beta\}(x\wedge y)$.

(10) $\frac{d\alpha}{dP}x\cdot\beta y - \frac{d\alpha}{dP}y\cdot\beta x = \{K\operatorname{Rot} K(\alpha\beta) - \alpha\cdot K\operatorname{Rot} K\beta\}(x\wedge y)$.

(11) $I_1 \operatorname{Rot}(\beta\alpha) = I_1\,\{\alpha\cdot\operatorname{Rot}\beta - K\beta\cdot\operatorname{Rot} K\alpha\}$.

(12) Se nella (11), $\alpha = du/dP$, allora $I_1 \operatorname{Rot}(\beta\alpha) = I_1(\alpha\cdot\operatorname{Rot}\beta)$; e se $\alpha = du/dP$ e $\beta = K(dv/dP)$, allora $I_1\operatorname{Rot}(\beta\alpha) = 0$.

(13) $\operatorname{grad}(\beta\alpha) = \beta \operatorname{grad}\alpha + K\alpha\cdot\operatorname{grad} K\beta +$
$+ 2V\,\{\operatorname{Rot}(K\alpha\cdot K\beta) - \operatorname{Rot} K\alpha\cdot K\beta - \operatorname{Rot}\beta\cdot\alpha\}$.

(14) $\operatorname{grad}(\beta\alpha) = \beta\operatorname{grad}\alpha + \left(\frac{d\beta}{dP}i\right)\alpha i + \ldots + \ldots$.

$\operatorname{Rot}(\beta\alpha) = \operatorname{Rot}\beta\cdot\alpha + i\wedge\beta\frac{d\alpha}{dP}i + \ldots + \ldots$.

(15) $\operatorname{grad}\{H(v,u) - H(u,v)\} = \operatorname{grad}\{(v\wedge u)\wedge\} = \operatorname{rot}(u\wedge v)$.

(16) Per O punto fisso. $\operatorname{grad}\{(P-O)\times\alpha(P-O)\} =$
$= 2D\alpha(P-O) + \left\{\frac{d\alpha}{dP}(P-O)\right\}(P-O) - \{\operatorname{Rot}\alpha(P-O)\}\wedge(P-O)$.

(17) $a\times\operatorname{grad}(b\times\operatorname{grad} m) = b\times\operatorname{grad}(a\times\operatorname{grad} m)$, a, b costanti.

(18) $u\times\operatorname{grad}(v\times\operatorname{grad} m) - v\times\operatorname{grad}(u\times\operatorname{grad} m) =$
$= \operatorname{grad} m\times\{(dv/dP)u - (du/dP)v\}$.

$$(19)\ \mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha - 2\mathrm{C}\frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP} = -\mathrm{C}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha + 2\frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP}.$$

$$(20)\ \mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\alpha = \mathrm{Rot}\,\alpha + \mathrm{C}\frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP}.$$

$$(21)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{R}\alpha = 2\mathrm{V}(\alpha\cdot\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha),\ \mathrm{grad}\,\mathrm{R}(du/dP) = 0.$$

$$(22)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\alpha = \mathrm{grad}\,\alpha + 2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha.$$

$$(23)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_2\alpha = 2\mathrm{V}(\alpha\cdot\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha + \mathrm{Rot}\,\mathrm{R}\alpha).$$

$$(24)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_3\alpha = 2\mathrm{V}(\mathrm{Rot}\,\mathrm{R}\alpha\cdot\mathrm{K}\alpha) - \mathrm{R}\alpha\,(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha).$$

$$(25)\ \frac{d\alpha}{dP}(u\wedge v) =$$
$$= \mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha, u\wedge v) - u\wedge\frac{d\alpha}{dP}v + v\wedge\frac{d\alpha}{dP}u - (u\wedge v)\wedge\mathrm{Rot}\,\alpha.$$

$$(26)\ 2\mathrm{I}_2\frac{du}{dP} = (\mathrm{div}\,u)^2 - \mathrm{div}\left(\frac{du}{dP}u\right) + u\times\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u =$$
$$= (\mathrm{div}\,u)^2 + (\mathrm{rot}\,u)^2 + u\times\mathrm{grad}\frac{du}{dP} - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u^2 =$$
$$= (\mathrm{div}\,u)^2 + (\mathrm{rot}\,u)^2 - \mathrm{I}_1\left(\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right).$$

$$(27)\ \mathrm{R}\frac{du}{dP} = \mathrm{I}_2\frac{du}{dP} - (\mathrm{div}\,u)\mathrm{K}\frac{du}{dP} + \mathrm{K}\left(\frac{du}{dP}\right)^2.$$

$$(28)\ \mathrm{I}_3\frac{du}{dP} = \mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{R}\frac{du}{dP}.$$

$$(29)\ \mathrm{Rot}\left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}u\right) = \frac{d(\mathrm{Rot}\,\alpha u)}{dP} + \mathrm{C}\,\mathrm{Rot}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha\right).$$

§ 3. Operatori differenziali del 2° ordine Δ, Δ'.

1. Operatori k, k*, v per le omografie del 3° ordine. Per poter dare una definizione semplice e naturale degli *operatori differenziali del 2° ordine* Δ, Δ' [cfr. n. 2] ci è utile estendere gli operatori k, v alle *omografie del 3° ordine*, H_3, [cfr. Cap. I, § 6, n. 1, Osservazione] ed inoltre introdurre per esse il nuovo operatore k*. La teoria generale delle *omografie di ordine m*, H_m, in uno spazio ad n dimensioni, si trova, come si è più volte indicato, nel libro ***Espaces courbes***; in questo n. 1 noi ci limitiamo a dare le poche nozioni che ci saranno necessarie per definire Δ, Δ' e ottenere la relazione fondamentale tra questi due operatori, non andando oltre le H_3.

a) Indichiamo con μ_3 una generica H_3, omografia del 3° ordine, e ricordiamo [cfr. Cap. I, § 6, n. 1] che, essendo x, y, z vettori arbitrari, le notazioni [Ibidem, [2] e Osservazione]

$$\mu_3 x, \quad \mu_3 xy, \quad \mu_3 xyz$$

indicano, rispettivamente, una

$$H_2 \ \textit{(iperomografia)}, \quad H_1 \ \textit{(omografia)}, \quad H_0 \ \textit{(vettore)}.$$

Se f è uno qualunque dei simboli I_1, K, D, V, k, k′, v indicheremo con $f\mu_3$ la H_3 tale che applicata al generico vettore x dà la stessa H_2 che si ottiene applicando f a $\mu_3 x$, che è pure una H_2; cioè

$$[1] \qquad (f\mu_3)x = f(\mu_3 x), \quad \text{per} \quad f = I_1, \mathrm{K}, \mathrm{D}, \mathrm{V}, \mathrm{k}, \mathrm{k}', \mathrm{v}.$$

È opportuno notare esplicitamente che:

$I_1\mu_3$, $K\mu_3$, $D\mu_3$, $k\mu_3$, $k'\mu_3$ sono delle H_3,
$V\mu_3$ è una H_2 (iperomografia)
$v\mu_3$ » » H_1 (omografia),

mentre $v\mu_2$, con μ_2 iperomografia, o H_2, è un vettore (¹).

b) In tutto ciò che segue resti stabilito che μ_1, μ_2, μ_3 indicano, rispettivamente, una generica H_1, H_2, H_3, e x, y, z *vettori* arbitrari.

Ci è già noto che [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [1]]

$$[2'] \qquad k\mu_2 xy = \mu_2 yx;$$

da questo e da quanto abbiamo stabilito in *a*) risulta subito che

$$[2] \qquad k\mu_3 xyz = \mu_3 xzy,$$

(¹) In generale se μ è una H_m, allora: $V\mu$ è una H_{m-1} e $v\mu$ è una H_{m-2}.

perchè $\mu_3 x$ è una H_2. Ne segue che:

applicare $k\mu_3$ *alla successione* xyz *è lo stesso che applicare* μ_3 *alla successione* xzy; in altri termini: *l'operatore* k *esteso alle* H_3 *fa cambiare tra loro di posto gli* **ultimi due vettori** *della terna che si considera.*

Con l'operatore k, per le H_3, non si può passare da una terna ordinata ad una sua qualsiasi permutazione. Conviene introdurre l'operatore

$$k^* \text{ tra } H_3 \text{ e } H_3$$

tale che:

[3] $k^*\mu_3 xyz = \mu_3 yxz$, ovvero [cfr. *a*)] $k^*\mu_3 xy = \mu_3 yx$

vale a dire:

applicare $k^*\mu_3$ *alla successione* xyz *è lo stesso che applicare* μ_3 *alla successione* yxz; in altri termini: *l'operatore* k^*, *per le* H_3 *fa cambiare tra loro di posto i* **primi due vettori** *della terna che si considera.*

Dalla seconda forma della [3] risulta subito che: k^* *coincide nel campo delle* H_2, *con* k.

Si ha immediatamente da [3] che

[4] $k^*k^*\mu_3 = \mu_3$, cioè k^*k^* è *l'identità* [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [4]].

È poi ovvio che: *con i* **prodotti funzionali** *degli operatori* k, k^* *si passa da una successione di tre vettori ad una sua qualunque permutazione.*

c) Ci è già noto [cfr. Cap. I, § 6, n. 4, [8]] che:

[5'] $$v\mu_2 = \mu_2 \boldsymbol{ii} + \mu_2 \boldsymbol{jj} + \mu_2 \boldsymbol{kk}$$

essendo $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ terna unitaria-ortogonale.

Per $v\mu_3$ (che *non* è un *vettore*, ma una *omografia*) si ha:

[5] $$v\mu_3 = kk^*\mu_3 \boldsymbol{ii} + kk^*\mu_3 \boldsymbol{jj} + kk^*\mu_3 \boldsymbol{kk}$$

che, quando al posto di μ_3 si ponga μ_2, coincide con la [5'] perchè, in tal caso, k^* coincide con k e $kk = 1$.

Dim. Per proprietà ora esaminate si ha, dalla [5']:

$$\mathrm{v}\mu_3 x = \mu_3 xii + \dots = \mathrm{k}^*\mu_3 ixi + \dots = \mathrm{k}\mathrm{k}^*\mu_3 iix + \dots$$

che per l'arbitrarietà di x dimostra la [5].

d) Consideriamo ora le μ come funzioni del punto P. È intanto evidente che:

$$[6] \qquad d\mu_2/dP \ \text{è una} \ \mathrm{H}_3$$

poichè, dP è vettore e si ha $(d\mu_2/dP)dP = d\mu_2$.

È importante ricordare che: *l'operatore* k *è commutabile con la derivata rispetto a P.* Precisamente

$$[7] \qquad d(\mathrm{k}\mu_2)/dP = \mathrm{k}(d\mu_2/dP).$$

Dim. $d(\mathrm{k}\mu_2) = \mathrm{k}d\mu_2 = \mathrm{k}(d\mu_2/dP)dP$; c. d. d.

Si è già dimostrato [cfr. § 1, n. 7, [1]] che, essendo u vettore funzione di P,

$$(8') \qquad \frac{d(\mu_1 u)}{dP} = \mu_1 \frac{du}{dP} + \mathrm{k}\frac{d\mu_1}{dP}u.$$

Per la derivata di $\mu_2 u$ si ha forma analoga con il solo scambio di k con k*:

$$[8] \qquad \frac{d(\mu_2 u)}{dP} = \mu_2 \frac{du}{dP} + \mathrm{k}^*\frac{d\mu_2}{dP}u,$$

formula che viene a coincidere con la [8'] quando si cambi μ_2 in μ_1 poichè, allora, k* viene a coincidere con k.

Dim. $d(\mu_2 u) = \mu_2 \cdot du + d\mu_2 \cdot u = \mu_2(du/dP)dP + (d\mu_2/dP)dP \cdot u =$

$$= \mu_2(du/dP)dP + \mathrm{k}^*(d\mu_2/dP)u \cdot dP$$

c. d. d., poichè $d\mu_2/dP$ è una H_3 e può allora applicarsi la [3].

2. Definizione degli operatori differenziali Δ, Δ' del 2° ordine. Proprietà fondamentale.

Sia α una *omografia* e u un *vettore* funzioni di P.

Noi poniamo, per definire i simboli composti $\Delta_P\alpha$, $\Delta_P' u$,

$$[1] \qquad \Delta_P\alpha = \mathrm{v}\left(\mathrm{k}^*\mathrm{k}\frac{d^2\alpha}{dP^2}\right),$$

[2] $$\Delta'_P u = \mathrm{v}\,\frac{d^2 u}{dP^2}$$

notando subito che nella [2] si può dare *forma* identica a quella della [1] scrivendo

[2'] $$\Delta'_P u = \mathrm{v}\left(\mathrm{k}^*\mathrm{k}\,\frac{d^2 u}{dP^2}\right)$$

poichè d^2u/dP^2 è una *iperomografia* (una H_2) e quindi k^* coincide con k ed inoltre kk è l'identità.

Quando non vi possa esser luogo ad equivoco, ***sottintenderemo l'indice P*** nelle notazioni $\Delta_P\alpha$, $\Delta_P'u$, vale a dire scriveremo, semplicemente, $\Delta\alpha$, $\Delta' u$.

Vi è appena bisogno di osservare che: ***se*** α, u ***sono* costanti** *allora* $\Delta\alpha = 0$ *e* $\Delta' u = 0$; ma *non* viceversa.

Interessa di stabilire subito, e ciò ***deve esser tenuto ben presente***, che: *Se le derivate seconde di* α *ed* u *rispetto a* P, $d^2\alpha/dP^2$, d^2u/dP^2, *sono, rispettivamente*, **omografia del terzo ordine** (H_3) *e* **iperomografia** (*omografia del 2° ordine*, H_2), *esistenti ed univocamente determinate, allora* $\Delta\alpha$, $\Delta' u$ *sono pure esistenti ed univocamente determinate, e si ha:*

[3] $\begin{cases} \Delta\alpha \text{ è una omografia} \\ \Delta \text{ è operatore tra omografie ed omografie} \end{cases}$ (1),

[4] $\begin{cases} \Delta' u \text{ è un vettore} \\ \Delta' \text{ è operatore tra vettori e vettori} \end{cases}$

e quindi Δ *e* Δ' *ammettono le potenze intere positive qualunque.*

Dim. Ciò risulta immediatamente dalle [1], [2].

---

(1) E vedremo poi [cfr. § 4, n. 1, [14]] che, per m numero reale, si ha

$$\Delta m = \operatorname{div}\operatorname{grad} m$$

e in conseguenza

Δ *è operatore tra* **numeri** *e* **numeri**

il che *non è* implicitamente contenuto nella affermazione del testo, poichè un operatore « tra omografie e omografie », può affermarsi che è « operatore tra numeri e omografie » ma può non essere un operatore tra « numeri e numeri ».

Nelle stesse ipotesi precedenti per le **omografie** α, β *e per i* **vettori** u, v *si ha:*

[5] $$\Delta(\alpha+\beta)=\Delta\alpha+\Delta\beta, \quad \Delta'(u+v)=\Delta'u+\Delta'v$$

cioè Δ *e* Δ' *sono* **distributivi rispetto alla somma.** *Peraltro* Δ *e* Δ' **non** *sono* **operatori lineari** *perchè, per m numero,* $\Delta(m\alpha)$, $\Delta'(mu)$ *differiscono, in generale, come vedremo, da* $m\Delta\alpha$, $m\Delta'u$; *in particolare, dunque,* Δ' **non** *è una* **omografia** *sebbene esso sia un operatore* [cfr. [4]] *tra vettori e vettori.*

Dim. Risulta dalle [1], [2] perchè v, k, k*, d^2/dP^2 sono operatori distributivi rispetto alla somma.

La *relazione* **fondamentale** tra gli operatori Δ, Δ' è espressa dalla formula seguente nella quale a è un vettore *costante* arbitrario

[6] $$(\Delta\alpha)a=\Delta'(\alpha a),$$

cioè: *il* **vettore** *che si ottiene applicando* **l'omografia** $\Delta\alpha$ *al* **vettore costante** a, *è identico al vettore che si ottiene applicando l'operatore* Δ' *al vettore* αa.

Dim. Da formule note [cfr. n. 1; [8'], [8], [7]] si ha successivamente:

$$\frac{d(\alpha a)}{dP}=\left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right)a\,;\quad \frac{d^2(\alpha a)}{dP^2}=\mathrm{k}^*\frac{d}{dP}\left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right)a=\mathrm{k}^*\mathrm{k}\frac{d^2\alpha}{dP^2}a\,;$$

da questa, dalle [1], [2] e dalla [1] del n. 1 si ha:

$$\Delta'(\alpha a)=\mathrm{v}\frac{d^2(\alpha a)}{dP^2}=\mathrm{v}\left(\mathrm{k}^*\mathrm{k}\frac{d^2\alpha}{dP^2}a\right)=\left\{\mathrm{v}\left(\mathrm{k}^*\mathrm{k}\frac{d^2\alpha}{dP^2}\right)\right\}a=(\Delta\alpha)a\,;\ \text{c. d. d.}$$

Altra proprietà notevole è questa: *il* **differenziale** d *è* **commutabile** *con gli operatori* Δ, Δ'; cioè

[7] $$d(\Delta\alpha)=\Delta(d\alpha)$$
[8] $$d(\Delta'u)=\Delta'(du).$$

Dim. Osserviamo che per la [2] si ha subito [cfr. § 2, n. 1, [3]]

$$\Delta'u=\operatorname{grad}\frac{du}{dP} \qquad \text{[cfr. n. 3, [1]]}$$

e ricordando che il differenziale è commutabile con grad ecc., si ha:

$$d(\Delta' u) = d\left(\operatorname{grad} \frac{du}{dP}\right) = \operatorname{grad} d \frac{du}{dP} = \operatorname{grad} \frac{d(du)}{dP} = \Delta'(du)$$

che dimostra la [8]. - Se a è vettore costante e si applicano le [6], [8], si ha:

$$|\, d(\Delta\alpha) \,|\, a = d \,|\, (\Delta\alpha) a \,| = d \,|\, \Delta'(\alpha a) \,| = \Delta'(d\alpha \cdot a) = |\, \Delta(d\alpha) \,|\, a$$

che per l'arbitrarietà di a dimostra la [7].

Si noti che alle [7], [8] si possono dare, per a vettore costante, le forme seguenti [cfr. § 2, n. 4]:

$$\frac{d(\Delta\alpha)}{dP} a = \Delta \left(\frac{d\alpha}{dP} a\right) \tag{7'}$$

$$\frac{d(\Delta' u)}{dP} a = \Delta' \left(\frac{du}{dP} a\right). \tag{8'}$$

Osservazione. Nell'*Introduzione* [cfr. III, n. 8] abbiamo esaminati, del tutto in generale, differenziali e derivate successive. Per ciò che riguarda un *vettore* u e una *omografia* α, funzioni di P ed essendo dP, $d_1 P$, $d_2 P$, $d_3 P$ differenziali arbitrari di P, si ha, in modo ovvio,

$$\left\{\begin{aligned} d_2 d_1 u &= (d^2 u / dP^2) d_1 P d_2 P; \quad d^2 u = (d^2 u / dP^2) dPdP \\ d_2 d_1 \alpha &= (d^2 \alpha / dP^2) d_1 P d_2 P; \quad d^2 \alpha = (d^2 \alpha / dP^2) dPdP. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ad es. osservando che, per α, β omografie funzioni di P, si ha

$$d(\beta\alpha) = \beta \cdot d\alpha + d\beta \cdot \alpha, \quad d^2(\beta\alpha) = \beta \cdot d^2\alpha + 2 d\beta \cdot d\alpha + d^2\beta \cdot \alpha$$

e in conseguenza

$$\frac{d^2(\beta\alpha)}{dP^2} dPdP = \beta \cdot \frac{d^2\alpha}{dP^2} dPdP + 2 \frac{d\beta}{dP} dP \cdot \frac{d\alpha}{dP} dP + \frac{d^2\beta}{dP^2} dPdP \cdot \alpha,$$

portando, mediante gli operatori k, k*, nel 2° membro a destra il $dPdP$ si ricava la $d^2(\beta\alpha)/dP^2$.

3. Alcune forme di definizioni possibili di Δ e Δ'.

Siano: $\boldsymbol{u}$ un *vettore*, α una *omografia*, m un *numero reale* funzioni di P.

Il vettore $\Delta'\boldsymbol{u}$ si può esprimere mediante il grad, ovvero mediante grad, div, rot e l'operatore differenziale leibniziano $\dfrac{d}{dP}$:

[1] $$\Delta'\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}$$

[2] $$\Delta'\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{u}$$

e queste dànno due possibili definizioni di Δ' mediante altri operatori differenziali del 1° ordine già noti [si tenga presente che $\operatorname{rot}^2 \boldsymbol{u}$, sta, secondo le leggi generali delle potenze degli operatori, al posto di $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$].

Dim. La [1] risulta subito dalla [2] del n. 2 e dalla definizione di grad [cfr. § 2, n. 1, [3]], poichè si ha:

$$\Delta'\boldsymbol{u} = \mathrm{V}\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2} = \mathrm{V}\left\{\frac{d}{dP}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)\right\} = \operatorname{grad}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}.$$

Anche la [2] si dimostra facilmente [cfr.; 1ª delle [1]; § 2, n. 4, [2]; n. 7, [1]; § 2, n. 2, [3]; § 2, n. 4, [1]; § 2, n. 3],

(a) $$\Delta'\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = \operatorname{grad}\left\{(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\wedge + \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right\} = \\ = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \operatorname{grad}\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP};$$

ma poichè dP è vettore indipendente da P, si ha:

$$\operatorname{grad}\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\times dP = \operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}dP\right) = \operatorname{div}(d\boldsymbol{u}) = d(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\times dP$$

che, per l'arbitrarietà di dP, dà $\operatorname{grad}\mathrm{K}\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}$, e quindi, da (a):

$$\Delta'\boldsymbol{u} = -\operatorname{rot}^2\boldsymbol{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u};\ \text{c. d. d.}$$

La omografia $\Delta\alpha$ si può esprimere mediante grad, Rot e la solita derivata leibniziana, sotto la forma:

[3] $$\Delta\alpha = \mathrm{K}\frac{d\operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha}{dP} - \operatorname{Rot}^2\alpha,$$

ovvero sotto la forma, apparentemente diversa:

$$\Delta\alpha = \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP} - \mathrm{K}\ \mathrm{Rot}^2\ \mathrm{K}\alpha. \tag{4}$$

Dim. Da formule note [n. 2, [6]; [2]; § 2, n. 2, [3], [4]; n. 6, [3]] e per $\boldsymbol{a}$ vettore costante si ha:

$$(\Delta\alpha)\boldsymbol{a} = \Delta'(\alpha\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} (\alpha\boldsymbol{a}) - \operatorname{rot}^2 (\alpha\boldsymbol{a}) =$$

$$= \operatorname{grad} \{ \operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha \times \boldsymbol{a} \} - (\mathrm{Rot}^2\alpha)\, \boldsymbol{a} = \mathrm{K}\, \frac{d \operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha}{dP}\, \boldsymbol{a} - (\mathrm{Rot}^2\alpha)\boldsymbol{a},$$

che, per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$, dimostra la [3].

Posto, per abbreviare la scrittura, $\mu_3 = d^2\alpha / dP^2$, dalla definizione di $\Delta\alpha$ e dalla [5] del n. 1 si ha, successivamente:

$$\Delta(\mathrm{K}\alpha) = \mathrm{v}(\mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathrm{K}\mu_3) = \mathrm{k}\mathrm{k}^*\mathrm{k}^*\mathrm{k}\mathrm{K}\mu_3\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \ldots =$$

$$= \mathrm{K}\mu_3\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \ldots = \mathrm{K}(\mu_3\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \ldots) = \mathrm{K}\mathrm{v}(\mathrm{k}^*\mathrm{k}\mu_3) = \mathrm{K}(\Delta\alpha);$$

si è così provato che gli operatori Δ, K sono commutabili, cioè che

$$\Delta(\mathrm{K}\alpha) = \mathrm{K}(\Delta\alpha).$$

Allora, se nella [3] cambiamo α in $\mathrm{K}\alpha$ e poi operiamo con K nei due membri, si ottiene la [4].

Si può anche esprimere il vettore che si ottiene applicando l'omografia $\Delta\alpha$ al vettore generico $\boldsymbol{u}$, per mezzo del grad e della solita derivata leibniziana:

$$(\Delta\alpha)\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \left\{ \frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} - 2\alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} + \alpha \operatorname{grad} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}. \tag{5}$$

Dim. È noto [cfr. § 1, n. 7, [2]] che

$$\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} = \alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + \left(\mathrm{k}\, \frac{d\alpha}{dP}\right)\boldsymbol{u}. \tag{b}$$

Ora si ha [cfr. § 1, n. 5, [3]]

$$\mathrm{k}\, \frac{d\left(\alpha \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)}{dP} = \mathrm{k}\, \frac{d\alpha}{dP} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + \alpha \cdot \mathrm{k}\, \frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP};$$

ed operando con k nei due membri [cfr. Cap. I, § 6, n. 3, [4], [6]]

$$(c)\qquad \frac{d\left(\alpha\,\frac{du}{dP}\right)}{dP}=\mathrm{k}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\right)+\alpha\cdot\frac{d^2u}{dP}\cdot$$

Si ha anche [cfr. n. 1, [8[]

$$(d)\qquad \frac{d\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot u\right)}{dP}=\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}+\mathrm{k}^*\mathrm{k}\,\frac{d^2\alpha}{dP^2}\,u.$$

Derivando la (b) e tenendo conto delle (c), (d) si ha:

$$(e)\quad \frac{d^2(\alpha u)}{dP^2}=\mathrm{k}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\right)+\alpha\,\frac{d^2u}{dP^2}+\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}+\mathrm{k}^*\mathrm{k}\,\frac{d^2\alpha}{dP^2}\cdot u.$$

Applicando v ai due membri di questa si ha [cfr. n. 2, [2]; Cap. I, § 6, n. 4, [3], [5]; n. 2, [1]]

$$\Delta'(\alpha u)=2\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\right)+\alpha\Delta' u+(\Delta\alpha)u\,;$$

ricavando $(\Delta\alpha)u$ e applicando altre formule note si ha [cfr. [1]; § 2, n. 5, [7]]

$$(\Delta\alpha)u=\operatorname{grad}\frac{d(\alpha u)}{dP}-\alpha\operatorname{grad}\frac{du}{dP}-2\left\{\operatorname{grad}\left(\alpha\cdot\frac{du}{dP}\right)-\alpha\operatorname{grad}\frac{du}{dP}\right\}$$

che dopo semplici riduzioni dà la [5].

Se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ è sistema unitario-ortogonale di vettori, allora:

$$[6]\qquad \Delta\alpha=\frac{d^2\alpha}{dP^2}\,\boldsymbol{ii}+\frac{d^2\alpha}{dP^2}\,\boldsymbol{jj}+\frac{d^2\alpha}{dP^2}\,\boldsymbol{kk}$$

$$[7]\qquad \Delta' u=\frac{d^2u}{dP^2}\,\boldsymbol{ii}+\frac{d^2u}{dP^2}\,\boldsymbol{jj}+\frac{d^2u}{dP^2}\,\boldsymbol{kk},$$

alle quali, per $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ vettori costanti, si possono dare le forme

$$[8]\quad \Delta\alpha=\frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\boldsymbol{i}\right)}{dP}\,\boldsymbol{i}+\ldots+\ldots,\quad \Delta' u=\frac{d\left(\frac{du}{dP}\,\boldsymbol{i}\right)}{dP}\,\boldsymbol{i}+\ldots+\ldots;$$

o ancora, per O, i, j, k *sistema cartesiano ortogonale costante* e

$$P = O + xi + yj + zk,$$

divenendo così α ed u funzioni di x, y, z, le forme

$$[9] \qquad \Delta\alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}, \quad \Delta' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

e quindi $\Delta\alpha$ e $\Delta' u$ si ottengono applicando ad α o ad u, indifferentemente, *l'operatore simbolico di* LAPLACE

$$[10] \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dim. Dalla [1] del n. 2, dalla [5] del n. 1 e ricordando che kk e k*k* indicano l'identità, si ha:

$$\Delta\alpha = \mathrm{v}\left(\mathrm{k^*k}\,\frac{d^2\alpha}{dP^2}\right) = \mathrm{kk^*k^*k}\,\frac{d^2\alpha}{dP^2}\,ii + \ldots = \frac{d^2\alpha}{dP^2}\,ii + \ldots$$

che dimostra la [6]. - La [7] si ottiene subito dalla [2] del n. 2 e dalla [5'] del n. 1.

Per la 1ª forma [8] si ha [cfr. n. 1, [8], [3]]

$$\frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}\,i\right)}{dP}\,i = \frac{d\alpha}{dP}\,\frac{di}{dP}\,i + \mathrm{k}^*\,\frac{d^2\alpha}{dP^2}\,ii = \frac{d^2\alpha}{dP^2}\,ii, \text{ ecc.,}$$

e analogamente per la 2ª forma facendo uso della [8'] del n 1.

Se ora h è ente funzione di P e quindi di x, y, z si ha per formule note

$$(a) \qquad \frac{dh}{dP}\,i = \frac{dh}{dP}\,\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ ecc. per } j,\ k;$$

dunque applicando le (a) alla forma [8] si hanno le [9], [10].

OSSERVAZIONI. - 1.ª Le [1]-[4], [6], [7], [8] sono delle *possibili* definizioni *assolute* e *nominali* di $\Delta\alpha$ e di $\Delta' u$. Le [6], [7], per quanto *formalmente* (ma *non* realmente) più semplici delle altre, non sono consigliabili perchè richiedono l'uso del sistema di riferimento, per quanto assoluto, i, j, k; lo stesso dicasi delle forme [8].

2.ª La [5| si può pure assumere come definizione di $\Delta\alpha$; ma come definizione *indiretta*, non normale, poichè essa dà, non $\Delta\alpha$ ma il vettore che si ottiene applicando l'omografia $\Delta\alpha$ al vettore generico u. Assumendo la [5] come definizione è necessario *dimostrare* che essa individua realmente una omografia $\Delta\alpha$ e tale dimostrazione è assai complessa [cfr. 1ª Ediz. di A. V. G., Vol. I, pag. 98]. Mentre per le definizioni indicate nella Oss. 1.ª, basta ammettere l'esistenza della derivata seconda di α od n perchè $\Delta\alpha$ e $\Delta' u$ risultino, senz'altro, esistenti e univocamente determinati.

3.ª La [6] del n. 2 *non* può essere assunta per definire, anche indirettamente, $\Delta\alpha$ (si intende, una volta definito Δ') poichè, dandoci il vettore $(\Delta\alpha)a$ con a costante, non ci dà $(\Delta\alpha)u$ con u funzione di P, e quindi resta impossibile *dedurre* dalla [6] del n. 2 che $\Delta\alpha$ è una omografia funzione di P. - Si noti che la [6] del n. 2 si ottiene subito dalla [5] di questo n. per u costante.

4.ª Le [8] forniscono definizioni *nominali* ma **non** *assolute* di $\Delta\alpha$ e $\Delta' u$, poichè richiedono il *sistema cartesiano* O, i, j, k e le *coordinate* x, y, z di P rispetto a tale sistema. Esse sono dunque da *escludere*, non bastando a giustificarle il fatto che i secondi membri di essi sono degli *invarianti*, poichè è inutile introdurre degli *invarianti cartesiani* quando si possono introdurre degli enti assoluti, indipendenti da coordinate, e quindi *invarianti assoluti*.

5.ª Si è già osservato [cfr. n. 2, [3], [4]] che: Δ è operatore tra H_1 e H_1; Δ' è operatore tra H_0 e H_0. Dunque Δ ha una proprietà che Δ' non possiede; *basta questo* [cfr. Intr. I, n. 1] per *poter affermare* che $\Delta \neq \Delta'$.

Che i secondi membri delle [6]-[9] abbiano la *stessa forma* [cfr. con [10]], potendosi in essi scrivere, indifferentemente, α od u per ottenere $\Delta\alpha$ o $\Delta' u$, non basta per distruggere l'affermazione precedente $\Delta \neq \Delta'$, poichè *rimane sempre il fatto che* Δ *e* Δ' **non** *hanno a comune* **tutte** *le proprietà* [cfr. [1] e [2] con [3[, [4] e anche con la [6] del n. 2].

Nelle [1], [2'] del n. 2, insieme alla *identità* di *forma* dei secondi membri vi è la *differenza* di *sostanza*, come indicano chiaramente le [1], [2] del n. 2; e lo stesso si ha dalle [6], [7], [8] perchè $\mu_3 \boldsymbol{ii}$, $\mu_2 \boldsymbol{ii}$ sono enti di specie *diversa.* Invece con le [9], o, meglio, con il simbolo [10] di LAPLACE, *rimane* la *forma* e la *sostanza* sparisce; ciò non deve far meraviglia perchè: *una volta introdotte le* **coordinate** *si* **distruggono** *formalmente le* **proprietà geometriche.**

In conclusione nelle [1], [2] del n. 2 *occorrono*, come abbiamo fatto, *due simboli* **diversi**, ed *errano* tutti coloro che *sostengono potersi far uso di un solo simbolo*, cioè che sostengono essere Δ *identico* a Δ', mentre si ha, *indiscutibilmente*, $\Delta \neq \Delta'$.

4. Operatori Δ, Δ' applicati a prodotti funzionali, interni, esterni.

Siano: m, n *numeri reali*, α, β *omografie*, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *vettori*, tutti funzioni di P.

Si hanno le formule notevoli seguenti:

$$[1] \qquad \Delta'(\alpha \boldsymbol{u}) = (\Delta\alpha)\boldsymbol{u} - \alpha(\Delta'\boldsymbol{u}) + 2 \operatorname{grad}\left(\alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right),$$

$$[2] \qquad \Delta'(m\boldsymbol{u}) = m(\Delta'\boldsymbol{u}) + (\Delta m)\boldsymbol{u} + 2 \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \operatorname{grad} m,$$

$$[3] \qquad \Delta(m\alpha) = m(\Delta\alpha) + (\Delta m)\alpha + 2 \frac{d\alpha}{dP} \operatorname{grad} m,$$

$$[4] \qquad \Delta(mn) = m(\Delta n) + n(\Delta m) + 2 \operatorname{grad} m \times \operatorname{grad} n,$$

$$[5] \qquad \Delta(\beta\alpha) = (\Delta\beta)\alpha + \beta(\Delta\alpha) + 2\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP} \cdot \mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right),$$

$$[6] \qquad \Delta(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \operatorname{div}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{v}\right) + \operatorname{div}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{u}\right) =$$
$$= \boldsymbol{u} \times \Delta'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \Delta'\boldsymbol{u} + 2\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right),$$

$$[7] \qquad \Delta'(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \wedge \Delta'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \wedge \Delta'\boldsymbol{u} + 4\mathrm{V}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \cdot \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right).$$

Dim. [1]. Dalla [5] del n. 3 si ha:

$$(\Delta\alpha)\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dP} - 2 \operatorname{grad}\left(\alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) + \alpha \operatorname{grad}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}$$

che per la [1] dello stesso n. 3 dà subito:

$$(\Delta\alpha)u = \Delta'(\alpha u) - 2\,\mathrm{grad}\left(\alpha\frac{du}{dP}\right) + \alpha(\Delta' u);\quad \text{c. d. d.}$$

Dim. [2]. Se nella [1] poniamo m al posto di α e si osserva che [cfr. § 2, n. 5, [3]]

$$\mathrm{grad}\left(m\frac{du}{dP}\right) = m\,\mathrm{grad}\frac{du}{dP} + \frac{du}{dP}\mathrm{grad}\,m =$$
$$= m\Delta' u + \frac{du}{dP}\mathrm{grad}\,m$$

si ha, dopo semplici riduzioni, la [2].

Dim. [3]. Se $\boldsymbol{a}$ è vettore costante, allora, dalla [2] e da altre proprietà ben note [cfr. n. 2, [6]: § 1, n. 7, [5]] si ha successivamente:

$$\{\Delta(m\alpha)\}\boldsymbol{a} = \Delta'(m\cdot\alpha\boldsymbol{a}) = m\Delta'(\alpha\boldsymbol{a}) + (\Delta m)\alpha\boldsymbol{a} + 2\frac{d(\alpha\boldsymbol{a})}{dP}\,\mathrm{grad}\,m =$$
$$= m(\Delta\alpha)\boldsymbol{a} + (\Delta m)\alpha\boldsymbol{a} + \left(2\frac{d\alpha}{dP}\mathrm{grad}\,m\right)\boldsymbol{a}$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la [3].

Dim. [4]. Se nella [3] si pone n al posto di α e si ricorda [cfr. § 2, n. 3, [1]] che $dn/dP = (\mathrm{grad}\,n)\times$ si ha subito la [4].

Dim. [5]. Se nella [1] poniamo β ed $\alpha\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ vettore costante, al posto di α ed u, si ha successivamente e per proprietà ben note [cfr. n. 2, [6]; § 2, n. 5, [7], ; § 1, n. 7, [2]; n. 1, [1]]

$$\{\Delta(\beta\alpha)\}\boldsymbol{a} = \Delta'(\beta\cdot\alpha\boldsymbol{a}) = (\Delta\beta)\alpha\boldsymbol{a} - \beta\Delta'(\alpha\boldsymbol{a}) + 2\,\mathrm{grad}\left(\beta\cdot\frac{d(\alpha\boldsymbol{a})}{dP}\right) =$$
$$= (\Delta\beta)\alpha\boldsymbol{a} - \beta(\Delta\alpha)\boldsymbol{a} + 2\beta\,\mathrm{grad}\frac{d(\alpha\boldsymbol{a})}{dP} + 2\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\cdot\frac{d(\alpha\boldsymbol{a})}{dP}\right) =$$
$$= \dots\dots\dots + 2\beta(\Delta\alpha)\boldsymbol{a} + 2\mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\cdot\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right)\boldsymbol{a} =$$
$$= \left\{(\Delta\beta)\alpha + \beta(\Delta\alpha) + \mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d\beta}{dP}\cdot\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\right)\right\}\boldsymbol{a}$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la [5] (1).

---

(1) Si noti che il prodotto di una H_m per una H_n è una H_{m+n-1} e quindi $\mathrm{k}(d\beta/dP)\cdot\mathrm{k}(d\alpha/dP)$ è una H_3.

Dalla [5] si possono ottenere le [3], [4] come casi particolari, ma sono più semplici le dimostrazioni indicate.

Dim. [6]. Come dimostreremo tra poco [cfr. n. 5, [1]] si ha:

$$\Delta m = \operatorname{div} \operatorname{grad} m.$$

Allora da questa formula e dalla nota espressione [cfr. § 2, n. 6, [3]]

$$\operatorname{grad}(u \times v) = \mathrm{K}\frac{du}{dP}v + \mathrm{K}\frac{dv}{dP}u$$

risulta subito la 1ª forma [5]. - Osservando che [cfr. § 2. n. 5, [5]],

$$\operatorname{div}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}v\right) = \left(\operatorname{grad}\frac{du}{dP}\right) \times v + \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\right) =$$

$$= (\Delta' u) \times v + \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\right),$$

e analoga per la $\operatorname{div}\left(\mathrm{K}\frac{dv}{dP}u\right)$ e che [cfr. Cap. I, n. 6, [4]; n. 7, [8]]

$$\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\right) = \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\frac{dv}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\right),$$

dalla 1ª forma [5] si ha pure la 2ª.

Dim. [7]. Dalla $d(u \wedge v)/dP$ [cfr. § 1, n, 3, [1]] e ricordando [cfr. § 3, n. 2, [1]] che $\Delta' u = \operatorname{grad}(du/dP)$ si ha successivamente [cfr. § 2, n. 5, [11]]:

$$\Delta'(u \wedge v) = \operatorname{grad}\left(u \wedge \frac{dv}{dP}\right) - \operatorname{grad}\left(v \wedge \frac{du}{dP}\right) =$$

$$= u \wedge \operatorname{grad}\frac{dv}{dP} + 2\mathrm{V}\left(\frac{dv}{dP}\cdot \mathrm{K}\frac{du}{dP}\right) - v \wedge \operatorname{grad}\frac{du}{dP} - 2\mathrm{V}\left(\frac{du}{dP}\cdot \mathrm{K}\frac{dv}{dP}\right) =$$

$$= u \wedge \Delta' v - v \wedge \Delta' u + 2\mathrm{V}\left(\frac{dv}{dP}\cdot \mathrm{K}\frac{du}{dP}\right) + 2\mathrm{V}\left(\frac{dv}{dP}\cdot \mathrm{K}\frac{du}{dP}\right) = \text{ecc.; c. d. d.}$$

5. Operatore Δ applicato alle omografie semplici.

Siano: m un *numero reale*, α una *omografia*, u, v *vettori*, tutti funzioni di P. Si ha:

[1] $\Delta m \quad = \operatorname{div} \operatorname{grad} m = \mathrm{I}_1 \dfrac{d \operatorname{grad} m}{dP}$

[2] $\Delta(u \wedge) \quad = (\Delta' u) \wedge$

[3] $\Delta \mathrm{H}(u, v) = \mathrm{H}(u, \Delta' v) + \mathrm{H}(\Delta' u, v) + 2\dfrac{dv}{dP}\cdot \mathrm{K}\dfrac{du}{dP}$

[4] *Se* α *è* **dilatazione,** *anche* $\Delta\alpha$ *è* **dilatazione**; cioè: *da* $\mathrm{V}\alpha = 0$ *segue che anche* $\mathrm{V}\Delta\alpha = 0$.

Dim. [1]. Se a è vettore costante, per proprietà ben note [cfr. n. 2, [6]; n. 3, [1]; § 2, n. 3, [5]; § 2, n. 7, [5]] si ha successivamente:

$$(\Delta m)a = \Delta'(ma) = \operatorname{grad} \frac{d(ma)}{dP} = \operatorname{grad} \mathrm{H}(\operatorname{grad} m, a) = (\operatorname{div} \operatorname{grad} \boldsymbol{m})\boldsymbol{a},$$

che per l'arbitrarietà di a dimostra la 1ª forma della [1]. La 2ª forma risulta dalla 1ª e dalla definizione di divergenza [cfr. § 2, n. 1, [1]].

Dim. [2], [3]. Per a vettore costante si ha, in virtù di proprietà ormai ben note e che crediamo inutile richiamare:

$$\{\Delta(u\wedge)\}\, a = \Delta'(u\wedge a) = -a\wedge\Delta' u = (\Delta' u)\wedge a;$$

$$\begin{aligned}\{\Delta \mathrm{H}(u, v)\}\, a &= \Delta'\{\mathrm{H}(u,v)a\} = \Delta'(u\times a\cdot v) = \\ &= u\times a\cdot\Delta' v + \Delta(u\times a)\cdot v + 2\frac{dv}{dP}\operatorname{grad}(u\times a) = \\ &= u\times a\cdot\Delta' v + a\times\Delta' u\cdot v + 2\frac{dv}{dP}\cdot \mathrm{K}\frac{du}{dP}a = \\ &= \left\{\mathrm{H}(u, \Delta' v) + \mathrm{H}(\Delta' u, v) + 2\frac{dv}{dP}\cdot\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right\}a;\end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di a dimostrano le [2], [3].

Dim. [4]. Se a, b sono vettori costanti si ha:

$$\begin{aligned}2\mathrm{V}(\Delta\alpha)\times a\wedge b &= b\times(\Delta\alpha)a - a\times(\Delta\alpha)b = b\times\Delta'(\alpha a) - a\times\Delta'(\alpha b) = \\ &= \Delta(b\times\alpha a - a\times\alpha b) = \Delta(2\mathrm{V}\alpha\times a\wedge b) = 2\Delta'(\mathrm{V}\alpha)\times a\wedge b\end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di $a\wedge b$ dimostra che

$$\mathrm{V}(\Delta\alpha) = \Delta'(\mathrm{V}\alpha) \qquad \text{[cfr. n. 6, [4]].}$$

Questa formula prova che da $\mathrm{V}\alpha = 0$ (cioè α è *dilatazione*) segue che $\mathrm{V}(\Delta\alpha) = 0$ (cioè $\Delta\alpha$ è *dilatazione*); c. d. d.

6. Prodotti di Δ per gli operatori I_1, K, D, V.

Se α è una omografia funzione di P, si ha:

[1] $\mathrm{I}_1\Delta\alpha = \Delta\mathrm{I}_1\alpha$
[2] $\mathrm{K}\Delta\alpha = \Delta\mathrm{K}\alpha$
[3] $\mathrm{D}\Delta\alpha = \Delta\mathrm{D}\alpha$
} cioè Δ è commutabile con gli operatori I_1, K, D

[4] $\mathrm{V}\Delta\alpha = \Delta'\mathrm{V}\alpha$ } Δ, e anche Δ', non è commutabile con V.

Dim. [1]. Se i, j, k è il solito sistema unitario-ortogonale costante, si ha:

$$I_1 \Delta\alpha = i \times (\Delta\alpha) i + \ldots = i \times \Delta'(\alpha i) + \ldots = \Delta(i \times \alpha i + \ldots) = \Delta I_1 \alpha; \text{ c. d. d.}$$

Dim. [4]. La [4] è già stata dimostrata nella Dim. della [4] del n. 5.

Dim. [2], [3]. Dalla nota identità [cfr. Cap. I, § 1, n. 10]

$$\alpha = D\alpha + (V\alpha)\wedge$$

applicando Δ ai due membri e tenendo conto della [4] e della [2] del n. 5 si ha

$$(a) \qquad \Delta\alpha = \Delta D\alpha + (\Delta' V\alpha)\wedge;$$

ma poichè $D\alpha$ è dilatazione anche $\Delta D\alpha$ è dilatazione [cfr. n. 5, [4]] e quindi dalla identità $\Delta\alpha = D\Delta\alpha + (V\Delta\alpha)\wedge$ e dalla (a) risulta subito la [3]. La [2] si ha dalla identità $K\alpha = \alpha - (V\alpha)\wedge$, ecc.

Si noti che un'altra dimostrazione della [2] l'abbiamo data per la [4] del n. 3, e si noti pure che l'attuale dim. della [2] è *indipendente* dall'altra ora citata.

7. Derivata, divergenza e rotazionale del vettore che si ottiene applicando $\Delta\alpha$ ad un vettore costante.

Se α è omografia funzione di P e a è vettore costante per il vettore $(\Delta\alpha)a$ si hanno le formule notevoli seguenti:

$$[1] \qquad \frac{d\{(\Delta\alpha)a\}}{dP} = \Delta \frac{d(\alpha a)}{dP}$$

$$[2] \qquad \operatorname{div}\{(\Delta\alpha)a\} = \Delta\{\operatorname{div}(\alpha a)\}$$

$$[3] \qquad \operatorname{rot}\{(\Delta\alpha)a\} = \Delta'\{\operatorname{rot}(\alpha a)\}.$$

Dim. Essendo dP vettore arbitrario, indipendente di P, si ha:

$$\frac{d\{(\Delta\alpha)a\}}{dP} dP = d\{(\Delta\alpha)a\} = \{d(\Delta\alpha)\}a = \{\Delta(d\alpha)a =$$
$$= \Delta'\{d(\alpha a)\} = \Delta'\left\{\frac{d(\alpha a)}{dP} dP\right\} = \left\{\Delta \frac{d(\alpha a)}{dP}\right\} dP$$

che dimostra la [1].

Applicando I_1 e $2V$ ai due membri della [1] e tenendo conto delle formule del n. 6 si hanno subito le [2], [3].

§ 4. Prodotti funzionali degli operatori differenziali del 1° e 2° ordine.

Noi abbiamo considerati i *sette* operatori differenziali

$$(a) \qquad \frac{d}{dP},\ \mathrm{div},\ \mathrm{rot},\ \mathrm{grad},\ \mathrm{Rot},\ \Delta,\ \Delta'$$

dei quali, — e *giova ricordarlo* —, gli ultimi sei sono esprimibili mediante il primo (leibniziano). I prodotti funzionali degli operatori (a), con due, tre,... fattori, daranno luogo a nuovi operatori differenziali del 2°, 3°... ordine i quali, — e anche qui *giova notarlo* —, si potranno sempre esprimere, volendo, per mezzo degli operatori leibniziani

$$\frac{d}{dP},\ \frac{d^2}{dP^2},\ \frac{d^3}{dP^3},\ \ldots$$

Noi esamineremo, in ciò che segue, alcuni, tra i più importanti, dei prodotti degli operatori (a), combinandoli, quando occorra, anche con gli operatori I_1, K, D, V per le omografie.

Nei numeri seguenti di questo §, u, α, m indicano, rispettivamente, un *vettore*, una *omografia*, un *numero reale* funzioni di P.

Alcune delle proposizioni seguenti sono già note e sarà citato, a destra in margine, ove si trova la proposizione stessa; altre hanno una dimostrazione ovvia, conseguenza di proposizioni note che pure saranno citate a destra in margine; per le rimanenti daremo la dimostrazione come abbiamo fatto fin qui.

1. Operatori del 2° ordiue.

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} [1]\ \mathrm{grad}\,\dfrac{du}{dP} = \Delta' u & [\S\ 3,\ \mathrm{n.}\ 3,\ [1]] \\[2ex] [2]\ \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\,\dfrac{du}{dP} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u & \\[2ex] [3]\ \mathrm{Rot}\,\dfrac{du}{dP} = \dfrac{d(\mathrm{rot}\,u)}{dP} & \\[2ex] [4]\ \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\dfrac{du}{dP} = 0. & \end{cases}$$

Dim. [2]. Si ha [cfr. § 2, n. 2, [3]; n. 4; n. 3, [1']]

$$\left(\operatorname{grad} \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) \times dP = \operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\,dP\right) = \operatorname{div}(d\boldsymbol{u}) = d(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) =$$
$$= (\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}) \times dP;\ \text{c. d. d., per l'arbitrarietà di } dP.$$

Dim. [3]. Se $\boldsymbol{a}$ è vettore costante, si ha [cfr. § 2, n. 2, [4]; n. 4, [1']]

$$\left(\operatorname{Rot}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{a}\right) = \frac{d(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})}{dP}\boldsymbol{a};\ \text{c. d. d.}$$

Dim. [4]. Essendo $\boldsymbol{a}$ vettore costante si ha, per formule ben note e che non stiamo a citare:

$$\left(\operatorname{Rot}\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{a}\right) = \operatorname{rot}\left\{\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{a} - \left(2\mathrm{V}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)\wedge\boldsymbol{a}\right\} =$$
$$= \frac{d(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})}{dP}\boldsymbol{a} - \operatorname{rot}\{(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\wedge\boldsymbol{a}\} = \frac{d(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})}{dP}\boldsymbol{a} + \left(\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} - \frac{d(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})}{dP}\right)\boldsymbol{a} =$$
$$= (\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}$$

e resta così dimostrato che

$$(a)\qquad \operatorname{Rot}\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}.$$

Ora si ha:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \mathrm{I}_1\frac{d(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})}{dP} = \mathrm{I}_1\operatorname{Rot}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = -2\operatorname{div}\mathrm{V}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = -\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$$

e quindi risulta subito

$$(b)\qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0.$$

Dalle (a), (b) risulta la [4].

(II)
- [5] $\dfrac{d(\operatorname{div}\boldsymbol{u})}{dP} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u})\times$ [da § 2, n. 3, [1]]
- [6] $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\mathrm{K}\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}$ [la [2]]
- [7] $\operatorname{Rot}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u})\wedge$ [da § 2, n. 3, [2]]

(III)
- [8] $\dfrac{d(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})}{dP} = \operatorname{Rot}\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}$ [la [3]]
- [9] $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$ [la (b) della Dim. [4]]
- [10] $\operatorname{rot}^2\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)$ [§ 2, n. 3, [2]]

$$
\text{(IV)}\quad \left\{
\begin{array}{lll}
[11] & \dfrac{d(\operatorname{grad}\alpha)}{dP} = \Delta\alpha + \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}^2\,\mathrm{K}\alpha & [\S\ 3,\ \text{n. } 3,\ [4]] \\
[12] & \operatorname{div}\operatorname{grad}\alpha = \mathrm{I}_1\,\dfrac{d(\operatorname{grad}\alpha)}{dP} & [\text{da } \S\ 2,\ \text{n. } 1,\ [1]] \\
[13] & \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha = \operatorname{div}\operatorname{grad}\alpha & \\
[14] & \operatorname{div}\operatorname{grad} m = \Delta m & [\S\ 3,\ \text{n. } 5,\ [1]] \\
[15] & \operatorname{rot}\operatorname{grad}\alpha = \operatorname{grad}\mathrm{Rot}\,\alpha & \\
[16] & \operatorname{rot}\operatorname{grad} m = 0 & [\text{da } \S\,2,\ \text{n. } 1,\ [2];\ \text{n. } 3,\ [4]].
\end{array}\right.
$$

Dim. [13]. Dalla identità $\alpha - \mathrm{K}\alpha = (2\mathrm{V}\alpha)\wedge$ e dalla [3] del n. 7, § 2 si ha

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}(\mathrm{K}\alpha - \alpha) = 2\operatorname{div}\operatorname{grad}(\mathrm{V}\alpha)\wedge = -2\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathrm{V}\alpha$$

che per la [9] dimostra la [13].

Dim. [15]. Si ha intanto per formule ben note:

$$(\operatorname{grad}\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha)\times \boldsymbol{a} = \operatorname{div}\{(\mathrm{Rot}\,\alpha)\boldsymbol{a}\} = \operatorname{div}\operatorname{rot}(\alpha\boldsymbol{a})$$

e quindi per la [9] si ha:

$$\operatorname{grad}\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 0. \tag{c}$$

Dalla nota identità $\mathrm{K}\beta = \beta - (2\mathrm{V}\beta)\wedge$ si ha, applicando, oltre la (c), altre formule note [cfr. § 2, n. 8, [2]; n. 7, [2]]

$$
\begin{aligned}
0 &= \operatorname{grad}\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \operatorname{grad}\{\mathrm{Rot}\,\alpha - (2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha)\wedge\} = \\
&= \operatorname{grad}\{\mathrm{Rot}\,\alpha - \{\operatorname{grad}(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\}\wedge\} = \\
&= \operatorname{grad}\mathrm{Rot}\,\alpha + \operatorname{rot}\operatorname{grad}(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha) = \\
&= \operatorname{grad}\mathrm{Rot}\,\alpha + \operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathrm{I}_1\alpha - \operatorname{rot}\operatorname{grad}\alpha;
\end{aligned}
$$

ma per la [16], già dimostrata, si ha $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathrm{I}_1\alpha = 0$ e quindi è vera la [15].

$$
\text{(V)}\quad \left\{
\begin{array}{lll}
[17] & \operatorname{grad}\mathrm{Rot}\,\alpha = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\alpha & [\text{la } [15]] \\
[18] & \operatorname{grad}\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 0 & [\text{la } (c) \text{ della Dim. } [15]] \\
[19] & \mathrm{Rot}^2\,\alpha = \mathrm{K}\,\dfrac{d(\operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha)}{dP} - \Delta\alpha & [\S\ 3,\ \text{n. } 3,\ ]3]] \\
[20] & \mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha & \\
[21] & \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}(\mathrm{V}\alpha\wedge) = (\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha)\wedge & \\
[22] & \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\alpha = \mathrm{D}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha. &
\end{array}\right.
$$

Dim. [20]. Si ha [cfr. § 2, n. 8, [2]; [18]; § 2, n. 8, [1]]

$$2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha) = \mathrm{grad}\,\{\mathrm{I}_1\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha\} =$$
$$= \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -2\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha;\ \text{c. d. d.}$$

Dim. [21]. Si ha [cfr. § 2, n. 7, [2]; [4]; [7]; [20]]

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}(\mathrm{V}\alpha\wedge) = \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\left\{\frac{d(\mathrm{V}\alpha)}{dP} - \mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha\right\} = -\mathrm{Rot}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha =$$
$$= -(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha)\wedge = (\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha)\wedge;\ \text{c. d. d.}$$

Dim. [22]. Si ha [cfr. [21]]

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\alpha = \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,(\alpha - \mathrm{V}\alpha\wedge) = \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha - (\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha)\wedge =$$
$$= \mathrm{D}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha;\ \text{c. d. d.}$$

È molto utile, per numerose applicazioni, di aver ben presente quei particolari operatori differenziali del 2° ordine, prodotto di due operatori del 1° ordine, che dànno risultato identicamente nullo:

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{array}{lll} [23] & \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = 0 & [9] \\ [24] & \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,m = 0 & [16] \\ [25] & \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 0 & [18] \\ [26] & \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP} = 0. & [4] \end{array}\right.$$

2. Operatori del 3° ordine.

[1] $\mathrm{rot}\,\Delta'\boldsymbol{u} = \Delta'\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = -\mathrm{rot}^3\,\boldsymbol{u}$

[2] $\mathrm{Rot}\,\Delta\alpha = \Delta\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -\mathrm{Rot}^3\,\alpha$

[3] $\mathrm{div}\,\Delta'\boldsymbol{u} = \Delta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$

[4] $\mathrm{grad}\,\Delta\alpha = \Delta'\,\mathrm{grad}\,\alpha$, ovvero $\mathrm{grad}\left\{\Delta\alpha - \dfrac{d(\mathrm{grad}\,\alpha)}{dP}\right\} = 0.$

Dim. [1]. Si è trovato [cfr. § 3, n. 3, [2]]

$$(a)\qquad \Delta'\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}^2\boldsymbol{u}.$$

Operando con rot nei due membri della (a) si ha [cfr. n. 1, [15]]

$$(b)\qquad \mathrm{rot}\,\Delta'\boldsymbol{u} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}^3\boldsymbol{u} = -\mathrm{rot}^3\boldsymbol{u}.$$

Se nella (a) si pone rot $\boldsymbol{u}$ al posto di $\boldsymbol{u}$ si ha [cfr. n. 1, [9]]

$$(c) \qquad \Delta' \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}^3 \boldsymbol{u} = -\operatorname{rot}^3 \boldsymbol{u}.$$

Le (b), (c) dimostrano le [1].

Dim. [2]. Se $\boldsymbol{a}$ è vettore costante, dalla [1] e da formule note [cfr. § 2, n. 2, [4]; § 3, n. 2, [6]] si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Delta'(\alpha\boldsymbol{a}) &= \Delta' \operatorname{rot}(\alpha\boldsymbol{a}) = -\operatorname{rot}^3(\alpha\boldsymbol{a}), \\ \operatorname{rot}\{(\Delta\alpha)\boldsymbol{a}\} &= \Delta'\{(\operatorname{Rot}\alpha)\boldsymbol{a}\} = -(\operatorname{Rot}^3\alpha)\boldsymbol{a}, \\ (\operatorname{rot}\Delta\alpha)\boldsymbol{a} &= (\Delta \operatorname{Rot}\alpha)\boldsymbol{a} = -(\operatorname{Rot}^3\alpha)\boldsymbol{a}, \end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la [2].

Dim. [3]. Operando con div nei due membri della [2] del n. 3, § 3 e tenendo conto della [9] del n. 1 si ha subito

$$\operatorname{div} \Delta'\boldsymbol{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u};$$

ma dalla [14] del n. 1, poichè div $\boldsymbol{u}$ è numero, si ha:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Delta \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

e quindi le [3] sono dimostrate.

Dim. [4]. Si ha successivamente, per le formule citate a destra, ed essendo $\boldsymbol{a}$ costante

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\{(\mathrm{K}\Delta\alpha)\boldsymbol{a}\} &= \Delta\{\operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha)\boldsymbol{a}\}, && [\S\ 3, \text{n. } 7, [2]] \\ \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} \Delta\alpha &= \Delta(\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad}\alpha), && [\S\ 2, \text{n. } 2, [3]] \\ \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} \Delta\alpha &= \boldsymbol{a} \times \Delta' \operatorname{grad}\alpha, && [\S\ 3, \text{n. } 4, [6]\ 2^{\text{a}} \text{ forma}] \end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la 1ª forma della [4]. La 2ª forma si ottiene dalla 1ª ricordando che $\Delta'\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}(d\boldsymbol{u}/dP)$.

3. Operatori del 4° ordine.

$$[1] \qquad \Delta^2 m = \operatorname{div} \Delta' \operatorname{grad} m$$

$$[2] \qquad \Delta'^2 \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Delta \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \operatorname{rot} \Delta' \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$$

$$[3] \qquad \operatorname{Rot} \Delta \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = 0.$$

Dim. [1]. Dalla [14] del n. 1 si ha $\Delta^2 m = \Delta \operatorname{div} \operatorname{grad} m$; da questa e dalla [3] del n. 2 si ha $\Delta^2 m = \operatorname{div} \Delta' \operatorname{grad} m$, c. d. d.

Dim. [2]. Dalla [2] del n. 3 del § 3 si ha, operando con Δ',

$$\Delta'^2 u = \Delta' \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta' \operatorname{rot}^2 u$$

che per le [3], [1] del n. 2 dà appunto la [2].

Dim. [3]. Si ha [n. 2, [2]; n. 1, [4]]:

$$\operatorname{Rot} \Delta K \frac{du}{dP} = -\operatorname{Rot}^3 K \frac{du}{dP} = -\operatorname{Rot}^2 \left(\operatorname{Rot} K \frac{du}{dP} \right) = -\operatorname{Rot}^2 0 = 0.$$

Noi abbiamo citate tre sole formule per gli operatori del 4° ordine, ma dalle precedenti possono ottenersene molte altre; come pure si possono ottenere operatori di ordine superiore al 4°.

Osservazione. Gli operatori differenziali si possono anche raggruppare a seconda del loro *campo di applicabilità* (vettore, omografia, numero) e allora *stabilito tale campo* si può scrivere la formula senza bisogno dell'ente (u, α, m) cui l'operatore deve essere applicato. Così ad es.

campo dei *vettori*;	$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$,	[n. 1, [9]]
» delle *omografie*;	$\operatorname{rot} \operatorname{grad} = \operatorname{grad} \operatorname{Rot}$	[n. 1, [15]]
» dei *numeri*;	$\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$	[n. 1, [16]].

Questi due ultimi esempi confermano quanto abbiamo detto nella Intr. che le proprietà di un operatore dipendono dal suo campo di applicazione che si considera; e bene spesso non si tien conto di un fatto così importante.

§ 5. Funzioni di funzioni.

1. Funzioni di un punto il quale è funzione di un punto.

Gli enti h che si considerano (*punti, vettori, omografie,...*) siano *funzioni del punto P*, essendo, a sua volta, *P funzione del punto Q*. Si hanno allora da considerare le *derivate rispetto a Q* che si otterranno dalle *derivate rispetto a P* e dalla *derivata di P rispetto a Q*, per la quale porremo, allo scopo di abbreviare la scrittura:

[0] $$\sigma = \frac{dQ}{dP},$$

tenendo conto che: se P *è funzione invertibile di Q*, cioè Q è funzione di P e la σ è invertibile, si ha

$$\sigma^{-1} = \frac{dQ}{dP}. \tag{0'}$$

Qualunque sia *l'h* funzione di P è noto [cfr. Intr. III, n. 7] che

$$\frac{dh}{dQ} = \frac{dh}{dP}\frac{dP}{dQ} = \frac{dh}{dP}\sigma \tag{1}$$

e così resta espressa la dh/dQ per mezzo di σ e della dh/dP.

Ciò che abbiamo ora fatto, con la [1], per l'operatore differenziale *fondamentale* leibniziano, dobbiamo ripeterlo per gli operatori

$$\mathrm{div}_Q, \quad \mathrm{rot}_Q, \quad \mathrm{grad}_Q, \quad \mathrm{Rot}_Q, \quad \Delta_Q, \quad \Delta'_Q$$

che verranno espressi mediante σ e i medesimi operatori con l'indice P.

Come al solito, u, α, m sono, rispettivamente, *vettore*, *omografia*, *numero reale*, funzioni di P e quindi anche funzioni di Q, poichè P è funzione di Q.

$$\mathrm{div}_Q\, u = \mathrm{div}_P(\sigma u) - (\mathrm{grad}_P \mathrm{K}\sigma) \times u \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}_Q\, u = -\mathrm{rot}_P(\mathrm{K}\sigma u) + (\mathrm{Rot}_P \mathrm{K}\sigma) u + (\mathrm{I}_1\sigma - \sigma)\,\mathrm{rot}_P u. \tag{3}$$

Dim. [2]. Per formule note, che citiamo in margine a destra, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_P(\sigma u) &= (\mathrm{grad}_P \mathrm{K}\sigma) \times u + \mathrm{I}_1\left(\sigma \cdot \frac{du}{dP}\right) = && [\S\ 2,\ \text{n. } 5,\ [5]]\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{I}_1\left(\frac{du}{dP}\sigma\right) = && [\text{Cap. I}, \S\ 4,\ \text{n. } 5,\ [1]]\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{I}_1\frac{du}{dQ} = && [[1]]\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{div}_Q\, u && [\S\ 2,\ \text{n. } 1,\ [1]].
\end{aligned}$$

Dim. [3]. Dalla definizione di rot [cfr. § 1, n. 1, [2]] e poi da altre formule si ha successivamente:

$$\operatorname{rot}_Q u = 2\mathrm{V}\frac{du}{dQ} = 2\mathrm{V}\left(\frac{du}{dP}\sigma\right) = 2\mathrm{V}\left[\left\{\mathrm{K}\frac{du}{dP} + \left(2\mathrm{V}\frac{du}{dP}\right)\wedge\right\}\sigma\right] =$$

$$= 2\mathrm{V}\left\{\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\sigma + (\operatorname{rot}_P u)\wedge\sigma\right\} = [\text{ Cap. I, § 4, n. 2, [3]}]$$

$$= 2\mathrm{V}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\sigma\right) + (\mathrm{I}_1\sigma - \sigma)\operatorname{rot}_P u = \qquad [\text{§ 2, n. 5, [5]}]$$

$$= -\operatorname{rot}_P(\mathrm{K}\sigma u) + (\operatorname{Rot}_P \mathrm{K}\sigma)u + (\mathrm{I}_1\sigma - \sigma)\operatorname{rot}_P u; \quad \text{c. d. d.}$$

[4] $\operatorname{grad}_Q m = \mathrm{K}\sigma \operatorname{grad}_P m$

[5] $\operatorname{grad}_Q \alpha = \operatorname{grad}_P(\alpha\cdot\mathrm{K}\sigma) - \alpha \operatorname{grad}_P \mathrm{K}\sigma = \mathrm{v}\left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\mathrm{K}\sigma\right).$

Dim. [4]. Dalla nota espressione di dm [§ 2, n. 3, [1']] si ha:

$$\operatorname{grad}_Q m \times dQ = \operatorname{grad}_P m \times dP = \operatorname{grad}_P m \times \sigma dQ = \mathrm{K}\sigma \operatorname{grad}_P m \times dQ$$

che per l'arbitrarietà di dQ dimostra la [4].

Dim. [5]. Se, essendo a vettore costante, nella [2] poniamo $u = \mathrm{K}\alpha a$ si ha subito [cfr. § 2, n. 2, [3]] la 1ª forma della [5]. La 2ª forma si ottiene dalla 1ª e da, § 2, n. 5, [7].

[6] $\operatorname{Rot}_Q m = (\mathrm{K}\sigma \operatorname{grad}_P m)\wedge$

[7] $\operatorname{Rot}_Q \alpha = -\operatorname{Rot}_P(\mathrm{K}\sigma\cdot\alpha) + (\operatorname{Rot}_P \mathrm{K}\sigma)\alpha + (\mathrm{I}_1\sigma - \sigma)\operatorname{Rot}_P \alpha.$

Dim. [6]. Si ottiene subito dalla [4] e dalla § 2, n. 7, [2].

Dim. [7]. Si ottiene dalla [3] per $u = \alpha a$, con a vettore costante e dalla § 2, n. 2, [4].

Per gli operatori rot, Rot si hanno anche le formule seguenti assai notevoli che si esprimono mediante l'operatore R:

[8] $\begin{cases} \operatorname{rot}_Q(\mathrm{K}\sigma u) = \mathrm{RK}\sigma \operatorname{rot}_P u \\ \operatorname{rot}_Q u = \mathrm{RK}\sigma \operatorname{rot}_P(\mathrm{K}\sigma^{-1} u), \quad \text{per } \sigma \text{ invertibile.} \end{cases}$

[9] $\begin{cases} \operatorname{Rot}_Q(\mathrm{K}\sigma\cdot\alpha) = \mathrm{RK}\sigma \operatorname{Rot}_P \alpha \\ \operatorname{Rot}_Q \alpha = \mathrm{RK}\sigma \operatorname{Rot}_P(\mathrm{K}\sigma^{-1}\cdot\alpha), \quad \text{per } \sigma \text{ invertibile.} \end{cases}$

Dim. [8]. Dalla [2] del § 2, n. 2 e da altre formule ben note si ha:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_Q(\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{u})\times dQ\wedge\delta Q &= d(\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{u}\times\delta Q)-\delta(\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{u}\times dQ)=\\ &= d(\boldsymbol{u}\times\sigma\delta Q)-\delta(\boldsymbol{u}\times\sigma dQ)=\\ &= d(\boldsymbol{u}\times\delta P)-\delta(\boldsymbol{u}\times dP)=\\ &= \mathrm{rot}_P\boldsymbol{u}\times dP\wedge\delta P=\mathrm{rot}_P\boldsymbol{u}\times(\sigma dQ)\wedge(\sigma\delta Q)=\\ &= \mathrm{rot}_P\boldsymbol{u}\times\mathrm{R}\sigma(dQ\wedge\delta Q)=\\ &= \mathrm{RK}\sigma\,\mathrm{rot}_P\boldsymbol{u}\times dQ\wedge\delta Q\end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di $dQ\wedge\delta Q$ dimostra la 1ª delle [8]. La 2ª si ottiene subito dalla 1ª ponendo $\mathrm{K}\sigma^{-1}\boldsymbol{u}$ al posto di $\boldsymbol{u}$.

Dim. [9]. Se nelle [8] si pone $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ vettore costante, si ottengono subito le [9] applicando formule ormai ben note.

Per gli operatori Δ_Q, Δ'_Q, abbiamo le due formule:

[10] $$\Delta_Q m=\mathrm{div}_P(\sigma\cdot\mathrm{K}\sigma\,\mathrm{grad}_P m)-\mathrm{grad}_P m\times\sigma\,\mathrm{grad}_P\mathrm{K}\sigma$$

[11] $$\Delta'_Q\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}_P\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\sigma\cdot\mathrm{K}\sigma\right)-\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\sigma\,\mathrm{grad}_P\mathrm{K}\sigma$$

che ci furono date da M. Pieri in una sua lettera del 26 Agosto 1912.

Dim. [10]. Essendo [cfr. § 3, n. 5, [1]] $\Delta_Q m=\mathrm{div}_Q\,\mathrm{grad}_Q m$, ed inoltre essendo, per la [4], $\mathrm{grad}_Q m=\mathrm{K}\sigma\,\mathrm{grad}_P m$, applicando la [2] si ha subito la [10].

Dim. [11]. Come è ben noto si ha:

$$\Delta'_Q\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}_Q\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}=\mathrm{grad}_Q\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\sigma\right);$$

applicando la [5] si ha la [11].

Notiamo infine che per la omografia $\mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}$ si ha:

[12] $$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dQ}\boldsymbol{u}=\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\cdot\sigma.$$

Dim. $\mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dQ}\boldsymbol{u}\boldsymbol{a}=\dfrac{d\alpha}{dQ}\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}=\dfrac{d\alpha}{dP}\sigma\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\mathrm{k}\dfrac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\cdot\sigma\boldsymbol{a}$; c. d. d.

Osservazione. Se a è vettore costante e nella [11] si pone $u = \alpha a$, si ha, dopo semplici trasformazioni,

$$(a) \qquad \Delta_Q \alpha) a = \mathrm{grad}_P \left\{ \mathrm{k}\left(\frac{d\alpha}{dP}\cdot\sigma\cdot \mathrm{K}\sigma\right) a \right\} - \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\sigma\, \mathrm{grad}_P\, \mathrm{K}\sigma\right) a$$

che non sappiamo liberare da a, poichè il 1° termine del 2° membro, che è della forma generica grad$(\mu_2 a)$ non possiamo scriverlo, senza nuove convenzioni speciali, sotto la forma (grad μ_2)a poichè grad *non* è operatore lineare per le omografie.

2. Funzioni di numeri i quali sono funzioni di un punto. Gli enti h che si considerano (*punti, vettori, omografie,...*) siano funzioni dei numeri $x, y, \ldots$ e questi, a loro volta, siano funzioni del punto P. Gli enti h sono ancora funzioni del punto P pel tramite dei numeri $x, y, \ldots$ ed è noto [cfr. Intr. III, n. 7] che

$$[0] \qquad \frac{dh}{dP} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dP} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dP} + \ldots$$

ovvero sotto altra forma [cfr. § 2, n. 3, [1]]

$$[0'] \qquad \frac{dh}{dP} = \frac{\partial h}{\partial x}\cdot \mathrm{grad}\, x \times + \frac{\partial h}{\partial y}\cdot \mathrm{grad}\, y \times + \ldots.$$

Sono importanti le forme che assumono le [0], [0′] quando al posto di h si pone o un vettore u o una omografia α (in particolare anche un numero m).

$$[1] \qquad \frac{du}{dP} = H\left(\mathrm{grad}\, x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + H\left(\mathrm{grad}\, y, \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \ldots$$

$$[2] \qquad \mathrm{div}\, u = \mathrm{grad}\, x \times \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{grad}\, y \times \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots$$

$$[3] \qquad \mathrm{rot}\, u = \mathrm{grad}\, x \wedge \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{grad}\, y \wedge \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots$$

$$[4] \qquad \mathrm{grad}\, \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\, \mathrm{grad}\, x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\, \mathrm{grad}\, y + \ldots$$

[5] $$\operatorname{Rot}\alpha = \operatorname{grad} x \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \operatorname{grad} y \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \dots = (\operatorname{Rot} x)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\operatorname{Rot} y)\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \dots .$$

Dim. Dalla [0'] si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} x \times \boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \dots = \mathrm{H}\left(\operatorname{grad} x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)\boldsymbol{a} + \dots$$

che dimostra la [1] perchè $\boldsymbol{a}$ è vettore arbitrario.

Essendo $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \mathrm{I}_1(d\boldsymbol{u}/dP)$ dalla [1] si ha subito la [2].

Essendo $\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 2\mathrm{V}(d\boldsymbol{u}/dP)$ dalla [1] si ha subito la [3].

Applicando la [2] si ha, per $\boldsymbol{a}$ vettore costante:

$$\operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{a} = \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} x \times \frac{\partial \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}}{\partial P} + \dots = \operatorname{grad} x \times \mathrm{K}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\boldsymbol{a} + \dots = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\operatorname{grad} x\right) \times \boldsymbol{a} + \dots$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la [4].

In modo analogo si ha, per la [3],

$$(\operatorname{Rot}\alpha)\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}(\alpha\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} x \wedge \frac{\partial(\alpha\boldsymbol{a})}{\partial x} + \dots = \operatorname{grad} x \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x}\boldsymbol{a} + \dots$$

che dimostra la [5].

Volendo, — il che non è necessario e anzi *non* deve farsi sistematicamente —, far uso di un sistema ***fisso*** di ***coordinate cartesiane***, allora tale sistema si individua [E. C. V.] con il sistema assoluto O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ***sistema unitario ortogonale positivo***, e per il punto P si ha

[6] $$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Allora l'elemento h è funzione di x, y, z soltanto e questi numeri sono funzioni di P e del sistema di riferimento ($x = (P - O) \times \boldsymbol{i}$, ecc.). Per poter applicare le formule [1]-[5] basta conoscere grad e Rot di x, y, z; ora si ha:

[7] $$\operatorname{grad} x = \boldsymbol{i}, \qquad \operatorname{grad} y = \boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{grad} z = \boldsymbol{k}$$

[8] $$\operatorname{Rot} x = \boldsymbol{i}\wedge, \qquad \operatorname{Rot} y = \boldsymbol{j}\wedge, \qquad \operatorname{Rot} z = \boldsymbol{k}\wedge .$$

Dim. Da $x = (P - O) \times i$ si ha $dx = dP \times i$; e quindi valgono le [7] [cfr. § 2, n. 3, [1']].

Essendo [cfr. § 2, n. 3, [2]], $\mathrm{Rot}\, x = (\mathrm{grad}\, x)\wedge$, dalle [7] si hanno le [8].

Dalle [7], [8] e dalle [4], [5] risultano subito anche le [8], [9] del § 2, n. 3 che dànno grad m e Rot m mediante il sistema cartesiano.

Di $\Delta\alpha$ e $\Delta' u$ abbiamo già date le espressioni cartesiane [cfr. § 2, n. 3, [9]].

Nota III. Operatori differenziali superficiali.

1. Essendo P il punto generico di una superficie, indichiamo con $\boldsymbol{n}$ un *vettore unitario*, *funzione* **continua** di P e parallelo alla normale in P alla superficie (1).

Sia μ una *omografia di ordine* n, H_n con $n \gtreqless 1$, funzione di P e si indichi con μ_σ (l'indice σ riferendosi alla superficie considerata) la H_n che resta definita dalle condizioni seguenti:

$$(0) \quad \mu_\sigma \boldsymbol{n} = 0, \; \mu_\sigma x = \mu x \text{ per } x \text{ vettore normale ad } \boldsymbol{n} \text{ (cioè } x \times \boldsymbol{n} = 0).$$

La seconda delle condizioni (0) basta sia vera per due vettori non paralleli e normali ad $\boldsymbol{n}$ perchè sia verificata per *tutti* i vettori x normali ad $\boldsymbol{n}$. Segue da ciò che le condizioni (0) individuano la μ_σ, poichè dànno la $\mu_\sigma y$, che è una H_{n-1}, per *tre* vettori non complanari ($\boldsymbol{n}$ e *due* vettori normali ad $\boldsymbol{n}$); anzi ci

(1) Ad es. se la superficie è data da $\varphi = \mathrm{cost}$, con φ numero funzione di P, si può porre $\boldsymbol{n} = (\mathrm{grad}_P \varphi)/(\mathrm{mod}\, \mathrm{grad}_P \varphi)$.

L'omografia σ, che è la derivata di $\boldsymbol{n}$ rispetto a P,

$$\sigma = d\boldsymbol{n}/dP$$

gode di notevoli proprietà che sono già note. Cfr. per i due modi diversi di individuare la superficie (congruenza di *rette* o di *linee*): C. Burali-Forti, *Fondamenti...* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 33, pp. 1-40); Caldonazzo, *Sulla geometria differenziale di superficie...* (Rend. Acc. Lincei, vol. XXXIII, ser. 5ª, pp. 396-400, 1924).

dànno la forma effettiva

$$(1) \qquad \mu_\sigma = \mu - \mu \cdot \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = \mu \,|\, 1 - \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) \,|\, = -\mu(\boldsymbol{n}\wedge)^2$$

poichè per $\mu_\sigma \boldsymbol{n}$ e $\mu_\sigma \boldsymbol{x}$, con $x \times n = 0$, si hanno appunto le (0).

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore qualunque si ha dalla 2^a forma delle (1)

$$\mu_\sigma \boldsymbol{u} = \mu[\,|\, 1 - \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) \,|\, \boldsymbol{u}]$$

e poichè $|\, 1 - \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) \,|\, \boldsymbol{u}$ è la *proiezione ortogonale di u sul piano tangente alla superficie in P*, si può dire che: μ_σ *è la* H_n *in superficie, e nel punto P, individuata da* μ.

In particolare, se $\boldsymbol{u}$ è *vettore* e α è *omografia* funzione di P le *derivate in superficie*, e dei vari ordini, di $\boldsymbol{u}$ ed α sono le omografie di ordine $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)_\sigma; \quad \left(\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2}\right)_\sigma, \quad \left(\frac{d\alpha}{dP}\right)_\sigma; \quad \left(\frac{d^3\boldsymbol{u}}{dP^3}\right)_\sigma, \quad \left(\frac{d^2\alpha}{dP^2}\right)_\sigma; \ldots\ldots$$

che si esprimono mediante le derivate ordinarie con le formule (1).

2. Siano $\boldsymbol{u}$ un *vettore*, α una *omografia* e m un *numero reale* funzioni di P.

Con le notazioni seguenti (nelle quali è *sottinteso*, come d'uso, l'indice P)

$$\mathrm{div}_\sigma \boldsymbol{u}, \quad \mathrm{rot}_\sigma \boldsymbol{u}, \quad \mathrm{grad}_\sigma \alpha, \quad \mathrm{Rot}_\sigma \alpha, \quad \Delta_\sigma \alpha, \quad \Delta'_\sigma \boldsymbol{u},$$

che chiameremo *divergenza*, *rotazionale*,... **nella superficie** e nel punto P, indichiamo gli elementi corrispondenti senza l'indice σ, quando nella derivata che vi comparisce si ponga [cfr. n. 1] l'indice σ [1].

Cioè poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{div}_\sigma \boldsymbol{u} = \mathrm{I}_1 \left(\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)_\sigma, \quad \mathrm{rot}_\sigma \boldsymbol{u} = 2\mathrm{V}\left(\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)_\sigma, \quad \mathrm{grad}_\sigma \alpha = \mathrm{v}\left(\dfrac{d\alpha}{dP}\right)_\sigma, \\[2ex] \mathrm{Rot}_\sigma \alpha = 2\mathrm{Vk}\left(\dfrac{d\alpha}{dP}\right)_\sigma, \quad \Delta_\sigma \alpha = \mathrm{v}\left\{\mathrm{k}^*\mathrm{k}\left(\dfrac{d^2\alpha}{dP^2}\right)_\sigma\right\}, \quad \Delta'_\sigma \boldsymbol{u} = \mathrm{v}\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2}\right)_\sigma, \end{cases}$$

---

[1] P. BURGATTI. *I teoremi del gradiente,....* (Acc., Bologna, 1917). P. BURGATTI. *Sulle discontinuità...* (Rend. Acc. Lincei), S. 5^a, vol. XXV, pp. 311-816. R. MARCOLONGO. *Su alcuni operatori superficiali.* (Lincei, vol. XXVI, 1917).

e risulta subito, da queste definizioni e dal n. 1, che gli enti considerati sono univocamente determinati in ogni punto P della superficie.

Interessa esprimere gli enti (2) per mezzo degli enti ordinari senza l'indice σ. Si hanno le formule assai notevoli

$$(3)\qquad \operatorname{div}_\sigma \boldsymbol{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{n}$$

$$(4)\qquad \operatorname{rot}_\sigma \boldsymbol{u} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{n} \wedge \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{n}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{grad}_\sigma \alpha = \operatorname{grad} \alpha - \dfrac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n} \\ \operatorname{grad}_\sigma \boldsymbol{m} = \operatorname{grad} \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = \{1 - \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\} \operatorname{grad} \boldsymbol{m}, \\ \text{cioè } \operatorname{grad}_\sigma \boldsymbol{n} \text{ è la proiezione ortogonale di } \operatorname{grad} \boldsymbol{m} \text{ sul piano} \\ \qquad\qquad \text{tangente in } P. \end{cases}$$

$$(6)\qquad \operatorname{Rot}_\sigma \alpha = \operatorname{Rot} \alpha - \boldsymbol{n} \wedge \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{n}$$

$$(7)\qquad \Delta_\sigma \alpha = \Delta\alpha - \frac{d^2\alpha}{dP^2}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}$$

$$(8)\qquad \Delta'_\sigma \boldsymbol{u} = \Delta' \boldsymbol{u} - \frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}.$$

Dim. (3), (4). Siccome per le (1) si ha

$$\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)_\sigma = \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} - \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} - \mathrm{H}\left(\boldsymbol{n}, \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{n}\right),$$

applicando I_1, o $2\mathrm{V}$, ai due membri si hanno subito, in virtù delle (2), le (3), (4).

Dim. (5). Si ha [cfr. anche Cap. I, § 6, n. 4, 1ª delle [6]],

$$\operatorname{grad}_\sigma \alpha = \mathrm{v}\left\{\frac{d\alpha}{dP} - \frac{d\alpha}{dP}\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\right\} = \operatorname{grad} \alpha - \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n};\ \text{c. d. d.}$$

Per il $\operatorname{grad}_\sigma \boldsymbol{m}$ si applica la formula ora dimostrata e si osserva che $(d\boldsymbol{m}/dP)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} \boldsymbol{m}$.

Dim. (6). Si ha [cfr. ancora Cap. I, § 6, n. 4, 2ª delle [6]]

$$\operatorname{Rot}_\sigma \alpha = 2\mathrm{V}\left[\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP} - \mathrm{k}\left\{\frac{d\alpha}{dP}\cdot\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\right\}\right] = \operatorname{Rot}\alpha - \boldsymbol{n} \wedge \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{n};\ \text{c. d. d.}$$

Dim. (7). Se μ_3 è una H_3 si ha [cfr. Cap. I, § 6, n. 4, [8]]

$$(\mathrm{v}\mu_3)\boldsymbol{x} = \mathrm{v}(\mu_3\boldsymbol{x}) = \mu_3\boldsymbol{x}\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots = (\mathrm{k}\mathrm{k}^*\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots)\boldsymbol{x}$$

e quindi per l'arbitrarietà di x

(a) $\mathrm{v}\mu_3 = \mathrm{kk}^*\mu_3 \boldsymbol{ii} + \ldots + \ldots$, con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ terna unitaria ortogonale.

Si ha dunque, per le (1), (2), (a)

$$\Delta_\sigma \alpha = \mathrm{v}\left[\mathrm{k}^*\mathrm{k}\frac{d^2\alpha}{dP^2} - \mathrm{k}^*\mathrm{k}\left\{\frac{d^2\alpha}{dP^2}\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\right\}\right] =$$
$$= \Delta\alpha - \left\{\frac{d^2\alpha}{dP^2}\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{ii} + \ldots\right\} = \Delta\alpha - \left\{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{i}\cdot\frac{d^2\alpha}{dP^2}\boldsymbol{ni} + \ldots\right\} =$$
$$= \Delta\alpha - \frac{d^2\alpha}{dP^2}\boldsymbol{n}\cdot\{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + \ldots\} = \Delta\alpha - \frac{d^2\alpha}{dP^2}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n};\ \text{c. d. d.}$$

Dim. (8). Si ha [cfr. Cap. I, § 6, n. 4, [6]]

$$\Delta'_\sigma \boldsymbol{u} = \mathrm{v}\left\{\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2} - \frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2}\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\right\} = \Delta'\boldsymbol{u} - \frac{d^2\boldsymbol{u}}{dP^2}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n};\ \text{c. d. d.}$$

3. Per gli operatori differenziali con l'indice σ sussistono alcune (ma non tutte) delle formule già note (Cap. II) per i medesimi operatori nello spazio generale.

Ad es., per $\boldsymbol{a}$ vettore costante, si ha ancora:

(9) $\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha \times \boldsymbol{a} = \mathrm{div}_\sigma(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a})$, $(\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha)\boldsymbol{a} = \mathrm{rot}_\sigma(\alpha\boldsymbol{a})$, $(\Delta_\sigma\alpha) = \Delta'_\sigma(\alpha\boldsymbol{a})$

che il lettore può dimostrare per esercizio.

Per i prodotti di due operatori valgono, in generale, le formule ordinarie quando uno solo (e non uno qualunque) degli operatori ha l'indice σ. Ad es. si ha

$$\Delta'_\sigma \boldsymbol{u} = \mathrm{grad}_\sigma \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \tag{10}$$

mentre il grad_σ di $(d\boldsymbol{u}/dP)_\sigma$ non vale più $\Delta'_\sigma\boldsymbol{u}$. Per tali prodotti si hanno anche delle forme *miste*, come ad es.,

$$\mathrm{div}_\sigma\, \mathrm{grad}_\sigma\, \boldsymbol{m} = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}_\sigma\, \boldsymbol{m}. \tag{11}$$

Per il prodotto di due operatori con l'indice σ non valgono in generale le formule ordinarie. Così ad es., mentre, come è noto,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{m} = 0$$

con gli indici σ si ha invece

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{div}_\sigma \operatorname{rot}_\sigma u = 2\mathrm{V}\left(\dfrac{du}{dP}\dfrac{dn}{dP}\right) \times n, \\ \operatorname{rot}_\sigma \operatorname{grad}_\sigma m = n \wedge \dfrac{du}{dP} \operatorname{grad} m = -\operatorname{Rot} \mathrm{H}(n, n) \operatorname{grad} m \end{cases}$$

e i secondi membri non sono necessariamente nulli [1].

Nota IV. Forme cartesiane.

Lo scopo che intendiamo raggiungere in questa Nota IV è lo stesso di quello indicato nella Nota I al Cap. I.

Sia i, j, k sistema *unitario-ortogonale-positivo* (in certi casi può anche esser negativo, cfr. Nota I), O punto fisso

$$P = O + xi + yj + zk, \quad u = ai + bj + ck,$$

α omografia funzione di P, m, n, p numeri pure funzioni di P, ed anche u funzione di P; e ne segue che α, m, n, p, u sono pure funzioni dei numeri x, y, z coordinate di P.

Essendo h ente derivabile rispetto a P, per le sue derivate nelle direzioni i, j, k [cfr. § 1 n. 2] si ha:

$$(1)\qquad \frac{dh}{dP}i = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{dh}{dP}j = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{dh}{dP}k = \frac{\partial h}{\partial z},$$

poichè si ha ad es.

$$\frac{dh}{dP}i = \frac{dh}{dP}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

In base alle (1) e alle formule ottenute nel Cap. II si ha facilmente:

$$(2)\qquad \frac{du}{dP} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ i\ , & j\ , & k \end{pmatrix}, \quad \frac{d\alpha}{dP} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial y}, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} \\ i\ , & j\ , & k \end{pmatrix}$$

$$(3)\qquad \operatorname{grad} \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} i + \frac{\partial \alpha}{\partial y} j + \frac{\partial \alpha}{\partial z} k$$

---

[1] Per alcune equazioni differenziali in superficie e per questioni di continuità cfr. le citate note di Burgatti e Marcolongo.

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times \boldsymbol{i}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{k}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \\[2ex] \mathrm{K}\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\cdot\boldsymbol{k} \\[2ex] \dfrac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i}\cdot\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j}\cdot\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{k}\cdot\dfrac{\partial \alpha}{\partial z} \end{cases}$$

$$(5)\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$(6)\quad \operatorname{Rot}\alpha = \boldsymbol{i}\wedge\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \boldsymbol{j}\wedge\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \boldsymbol{k}\wedge\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

$$(7)\quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

$$(8)\quad \Delta\alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}$$

$$(9)\quad \Delta'\boldsymbol{u} = \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial z^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i} + \dots + \dots$$

$$(10)\quad \operatorname{div}\operatorname{grad} m = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2};\quad \Delta_2 \text{ di Laplace}$$

$$\mathrm{I}_3\frac{d\operatorname{grad} m}{dP} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 m}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial x\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 m}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial y\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 m}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial z^2} \end{vmatrix};\quad \textit{Hessiano}$$

$$(11)\quad \operatorname{grad} m \wedge \operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} p = \mathrm{I}_3\frac{d(m\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k})}{dP} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial m}{\partial x} & \dfrac{\partial m}{\partial y} & \dfrac{\partial m}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial n}{\partial x} & \dfrac{\partial n}{\partial y} & \dfrac{\partial n}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} & \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix};\quad \textit{Jacobiano.}$$

Osserviamo che si ha, per x vettore arbitrario,

$$(c) \qquad \frac{dx}{dP} u = a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + c \frac{\partial x}{\partial z};$$

ora quale relazione ha il secondo membro con un *gradiente?* Certamente nessuna. Eppure, coloro che vogliono dedurre i simboli pseudo-assoluti delle forme cartesiane indicano con

$(u \operatorname{grad})x$ il vettore $(dx/dP)u$,

e non si accorgono che, per la (c), $u \operatorname{grad}$ (e grad di chi?) *non* può essere una omografia. Dello stesso calibro è il ∇, *vettore simbolico* di GIBBS.

CAPITOLO III.

INTEGRALI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 1. Integrali.

1. Formule fondamentali per la trasformazione d'integrali estesi a dei volumi in integrali estesi alla superficie contorno.

Noi consideriamo, qui ed in seguito, delle funzioni *finite, continue* e *derivabili,* definite, in generale, in tutto il campo dei punti. Per gli *integrali,* cfr. Intr. III, n. 10.

Le ipotesi seguenti si intendono stabilite una volta per tutte.

Il punto P varia in campo continuo T a *tre dimensioni* limitato da una o più *superficie* Σ;

$d\tau$ è l'*elemento* di *volume* nel punto generico P di T;

$d\sigma$ » » » *area* » » » » » Σ;

n è il vettore unitario normale a Σ nel suo punto generico P, diretto verso l'interno di Σ.

Talvolta, per abbreviare, diremo *volume* τ, *superficie* σ, in luogo di T, Σ.

Se u, α, *funzioni di* P, *sono, rispettivamente,* **vettore** *ed* **omografia,** *allora si hanno le formule fondamentali seguenti:*

[1] $\int \operatorname{div} u \cdot d\tau = -\int n \times u \cdot d\sigma$ [teorema della *divergenza*]

[2] $\int \operatorname{rot} u \cdot d\tau = -\int n \wedge u \cdot d\sigma$ [» della *rotazionale*]

[3] $\int \operatorname{grad} \alpha \cdot d\tau = -\int \alpha n \cdot d\sigma$ [» del *gradiente*]

[4] $\int \operatorname{Rot} \alpha \cdot d\tau = -\int n \wedge \alpha \cdot d\sigma$

$$[5]\quad \int \Delta' u \cdot d\tau = -\int \frac{du}{dP} n \cdot d\sigma$$

$$[6]\quad \int \Delta\alpha \cdot d\tau = -\int \frac{d\alpha}{dP} n \cdot d\sigma$$

$$[7]\quad \int \frac{du}{dP} \cdot d\tau = -\int \mathrm{H}(n, u) d\sigma, \quad \int \mathrm{K} \frac{du}{dP} \cdot d\tau = -\int \mathrm{H}(u, n) \cdot d\sigma.$$

Inoltre: se v, β, m sono, rispettivamente, **vettore, omografia, numero reale** *funzioni di P, tali che*

$$(a)\qquad u = \operatorname{grad} m + \operatorname{rot} v, \quad \alpha = \operatorname{Rot} \beta + \mathrm{K} \frac{dv}{dP}$$

(e, come vedremo, è sempre possibile porre u, ovvero α, sotto la forma (a)) allora si ha:

$$[8]\qquad \int u d\tau = -\int (mn + n \wedge v) d\sigma,$$

$$[9]\qquad \int \alpha d\tau = -\int \{ n \wedge \beta + \mathrm{H}(v, n) \} d\sigma.$$

Dim. [1], [2]. Intendiamo ripetute le dimostrazioni date in E. C. V., nelle pp. 161-162. La attuale [3] è data in E. C. V. nel solo caso di α numero reale, e dobbiamo quindi dimostrarla per α omografia generica].

Dim. [3]-[6]. Se a è vettore costante noi sappiamo che [cfr. Cap. II; § 2, n. 2, [3], [4]; § 3, n. 3, [1]; § 3 n. 2, [6]]

$$\operatorname{grad} \alpha \times a = \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha a), \ (\operatorname{Rot} \alpha) a = \operatorname{rot}(\alpha a), \ \Delta' u = \operatorname{grad} \frac{du}{dP}, \ (\Delta\alpha) a = \Delta'(\alpha a).$$

Allora dalle [1], [2] si ha:

$$\int \operatorname{grad} \alpha \times a \cdot d\tau = \int \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha a) d\tau = -\int n \times \mathrm{K}\alpha a \cdot d\sigma = -\int \alpha n \times a \cdot d\sigma,$$

$$\int (\operatorname{Rot} \alpha) a \cdot d\tau = \int \operatorname{rot}(\alpha a) d\tau = -\int n \wedge \alpha a \cdot d\sigma$$

$$\int \Delta' u \cdot d\tau = \int \operatorname{grad} \frac{du}{dP} \cdot d\tau = -\int \frac{du}{dP} n \cdot d\sigma$$

$$\int (\Delta\alpha) a \cdot d\tau = \int \Delta'(\alpha a) d\tau = -\int \frac{d(\alpha a)}{dP} n \cdot d\sigma = -\int \left(\frac{d\alpha}{dP} n \right) a \cdot d\sigma.$$

Ma il vettore *costante* a può esser portato fuori del simbolo $\int$ e poichè esso è arbitrario restano dimostrate le [3]-[6].

Dim. [7]. Se, essendo a vettore costante, poniamo $u \times a$ al posto di α e ricordiamo [cfr. Cap. II, § 2, n. 6, [3]] che

$$\operatorname{grad}(u \times a) = \mathrm{K}\frac{du}{dP}a,$$

allora si ha, applicando la [3],

$$\begin{aligned}\int \operatorname{grad}(u \times a) \cdot d\tau &= -\int (u \times a) n \cdot d\sigma,\\ \int \mathrm{K}\frac{du}{dP} a \cdot d\tau &= -\int \mathrm{H}(u, n) a \cdot d\sigma\end{aligned}$$

che per essere a costante $\left(\text{può portarsi fuori dell'}\int\right)$ e arbitrario dimostra la 2ª delle [7]; operando in questa con K si ottiene la 1ª.

Dim. [8], [9]. Risultano subito dalle (a) e dalle [2], [3], [4], [7].

Osservazione. Sia O un punto fisso interno al campo nel quale varia P e si ponga $r = \operatorname{mod}(P - O)$. I teoremi [1], [2], [3] valgono ancora se al posto di u ed α si pone u/r e α/r.

2. Alcune importanti conseguenze delle formule precedenti.

Siano u, v *vettori* ed α omografia, funzioni del punto P. Si hanno le formule seguenti, che si deducono dalle [1]-[6] del n. 1 e che per v costante si riducono alle formule del n. 1.

$$[1]\left\{\begin{aligned}\int (\operatorname{div} u) v \cdot d\tau &= -\int (n \times u) v \cdot d\sigma - \int \frac{dv}{dP} u \cdot d\tau\\ \int (\operatorname{Rot} \alpha) v \cdot d\tau &= -\int n \wedge \alpha v \cdot d\sigma - 2\int \mathrm{V}\left(\alpha \frac{dv}{dP}\right) d\tau\\ \int (\Delta\alpha) v \cdot d\tau &= -\int \left\{\left(\frac{d\alpha}{dP} n\right) v - \left(\alpha \frac{dv}{dP}\right) n\right\} \cdot d\sigma + \int \alpha \Delta' v \cdot d\tau\end{aligned}\right.$$

$$[2]\begin{cases}\int(\mathrm{rot}\,u)\times v\cdot d\tau=-\int n\times u\wedge v\cdot d\sigma+\int u\times\mathrm{rot}\,v\cdot d\tau\\ \int(\mathrm{grad}\,\alpha)\times v\cdot d\tau=-\int(\alpha n)\times v\cdot d\sigma-\int \mathrm{I}_1\left(\frac{dv}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha\right)\cdot d\tau\\ \int(\Delta' u)\times v\cdot d\tau\quad=-\int\left(\frac{du}{dP}n\right)\times v\cdot d\sigma-\int \mathrm{I}_1\left(\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\frac{dv}{dP}\right)\cdot d\tau\end{cases}$$

$$[3]\begin{cases}\int(\mathrm{rot}\,u)\wedge v\cdot d\tau\quad=-\int(n\wedge u)\wedge v\cdot d\sigma-\int\left(\mathrm{div}\,v-\mathrm{K}\frac{dv}{dP}\right)u\cdot d\tau\\ \int(\mathrm{grad}\,\alpha)\wedge v\cdot d\tau=-\int(\alpha n)\wedge v\cdot d\sigma-2\int \mathrm{V}\left(\frac{dv}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha\right)\cdot d\tau\\ \int(\Delta' u)\wedge v\cdot d\tau\quad=-\int\left(\frac{du}{dP}n\right)\wedge v\cdot d\sigma+2\int \mathrm{V}\left(\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\frac{dv}{dP}\right)\cdot d\tau.\end{cases}$$

Si noti che, mentre nelle formule [1]-[6] del n. 1, gli integrali estesi al solido τ si riducono ad integrali estesi alla superficie σ, nelle formule ora indicate l'integrale esteso a τ si riduce alla somma di due integrali, uno esteso a σ, l'altro esteso ancora a τ.

Dim. [1]. Per formule note, che citiamo a margine, si ha:

$$(\mathrm{div}\,u)v=\mathrm{grad}\,\mathrm{H}(u,\,v)-\frac{dv}{dP}u \qquad \text{[Cap. II, § 2, n. 7, [5]]}$$

$$(\mathrm{Rot}\,\alpha)v=\mathrm{rot}(\alpha v)-2\mathrm{V}\left(\alpha\frac{dv}{dP}\right) \qquad \text{[» , § 2, n. 5, [6]]}$$

$$(\Delta\alpha)v\quad=\Delta'(\alpha v)+\alpha\Delta' v-2\,\mathrm{grad}\left(\alpha\frac{dv}{dP}\right). \qquad \text{[» , § 3, n. 4, [1]].}$$

Integrando nel campo τ e tenendo conto delle formule del n. 1 si hanno ovviamente le prime due; analogamente per la terza ricordando che [cfr. Cap. II, § 1, n. 7, [1]]:

$$\frac{d(\alpha v)}{dP}n=\left(\frac{d\alpha}{dP}n\right)v+\alpha\frac{dv}{dP}n.$$

Dim. [1]. Per formule note, che citiamo a margine, si ha:

$$(\mathrm{rot}\,u)\times v=\mathrm{div}(u\wedge v)+(\mathrm{rot}\,v)\times u \qquad \text{[Cap. II, § 2, n. 6, [1]]}$$

$$(\mathrm{grad}\,\alpha)\times v=\mathrm{div}(\mathrm{K}\alpha v)-\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\cdot\frac{dv}{dP}\right); \qquad \text{[» , § 2, n. 5, [5]]}$$

integrando nel campo τ e tenendo conto delle formule del n. 1 si hanno subito le prime due. La terza si ottiene dalla seconda ponendo du/dP al posto di α e ricordando [cfr. Cap. II, § 3, n. 3, [1]] $\Delta' u = \operatorname{grad}(du/dP)$. Si noti che dalla 2ª si può ottenere la 1ª cambiando α in $u\wedge$, perchè [cfr. Cap. II, § 2, n. 7, [3]] $\operatorname{grad}(u\wedge) = -\operatorname{rot} u$, ecc. ma il calcolo è più lungo.

Dim. [3]. È noto [cfr. Cap. II, § 2, n. 5, [11]] che:

$$(\operatorname{grad} \alpha)\wedge v = -\operatorname{grad}(v\wedge\alpha) + 2\mathrm{V}\left(\frac{dv}{dP}\cdot \mathrm{K}\alpha\right);$$

integrando ed applicando la [3] del n. 1 si ha la 2ª. Se nella 2ª si pone $\alpha = u\wedge$ si ottiene la 1ª. Se nella 2ª si pone $\alpha = du/dP$ si ottiene la 3ª.

Se, essendo O un punto fisso, si pone, nelle formule precedenti $v = P - O$, allora osservando che

$$\frac{d(P-O)}{dP} = 1 \ (\textit{identità}) \text{ e } \Delta'(P-O) = 0,$$

dalle [1]-[3] si ottengono delle formule alcune delle quali hanno notevole importanza e che ora esamineremo.

La prima delle [1] dà subito

$$[4] \qquad \int (\operatorname{div} u)(P-O)\cdot d\tau = -\int (n\times u)(P-O)\cdot d\sigma - \int u\cdot d\tau,$$

ovvero sotto forma *baricentrica* [cfr. E. C. V.]

$$[4'] \qquad \int (\operatorname{div} u) P\cdot d\tau = -\int (n\times u) P\cdot d\sigma - \int u\cdot d\tau$$

che dà: *il baricentro dei punti P del campo τ con le masse* $\operatorname{div} u$. Si può quindi ottenere anche il *baricentro dei punti P con le masse m*; basta infatti calcolare l'$\int mP\cdot d\tau$, il che può farsi mediante la [4'] nella quale u sodisfi alla equazione differenziale $\operatorname{div} u = m$ [cfr. § 3, n. 2, n. 3].

Le [4], [4'] risolte rispetto ad $\int u\cdot d\tau$ si confrontino con la [8].

Si hanno anche $\int \mathrm{I}_1 \alpha \cdot d\tau$, $\int \mathrm{V}\alpha \cdot d\tau$:

[5] $\int \mathrm{I}_1 \alpha \cdot d\tau = -\int (\alpha n) \times (P-O) \cdot d\sigma - \int (\mathrm{grad}\, \alpha) \times (P-O) \cdot d\tau$

[6] $2\int \mathrm{V}\alpha \cdot d\tau = -\int n \wedge \alpha (P-O) \cdot d\sigma \;\; -\int (\mathrm{Rot}\, \alpha)(P-O) \cdot d\tau =$

$$= \int (\alpha n) \wedge (P-O) \cdot d\sigma + \int (\mathrm{grad}\, \alpha) \wedge (P-O) \cdot d\tau$$

che si ottengono, rispettivamente, dalla 2ª delle [2], [1], [3].

Osservazione. Le formule [3] dànno, per $v = P - O$ i momenti, rispetto al punto O, delle forze applicate nei punti P ed aventi $\mathrm{rot}\, u$, $\mathrm{grad}\, \alpha$, $\Delta' u$ per vettori. Volendo il momento quando il vettore della forza è un vettore generico v funzione di P basta esprimere v sotto la forma (a) indicata nel n. 1.

Se, essendo m numero reale, si pone nella [1] del n. 1, il vettore mv al posto di u si trova subito

[7] $$\int m \cdot \mathrm{div}\, v \cdot d\tau = -\int m \cdot v \times n \cdot d\sigma - \int \mathrm{grad}\, m \times v \cdot d\tau;$$

e se in questa poniamo $u \times w$ al posto di m si ha:

[8] $$\int u \times w \cdot \mathrm{div}\, v \cdot d\tau = -\int u \times w \cdot v \times n \cdot d\sigma - \\ -\int \frac{du}{dP} v \times w \cdot d\tau - \int \frac{dw}{dP} v \times u \cdot d\tau.$$

Questa formula è dovuta al prof. Boggio, ed ha molte applicazioni nell'Idrodinamica [1].

3. Integrali nulli su di una superficie chiusa.

Avendo u, α, m il solito significato, noi abbiamo già dimostrato [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [9], [16], [19], [4]] che:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, u = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, m = 0,\ \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\, \alpha = 0,\ \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\frac{du}{dP} = 0;$$

---

(1) F. Boggio. *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'Idrodinamica.* (Rendiconti R. Accad. Lincei; seria 5ª, vol. XXIII, 1° sem. 1914).

allora le [1]-[4] del n. 1 dànno, ordinatamente:

[1] $$\int n \times \operatorname{rot} u \cdot d\sigma \quad = 0$$

[2] $$\int n \wedge \operatorname{grad} m \cdot d\sigma = 0$$

[3] $$\int \mathrm{K}\,(\operatorname{Rot} \alpha) n \cdot d\sigma \quad = 0$$

[4] $$\int n \wedge \mathrm{K} \frac{du}{dP} \cdot d\sigma \quad = 0.$$

Infine se nella [3] poniamo $\alpha = u \wedge$ si ottiene facilmente

[5] $$\int \left(\operatorname{div} u - \mathrm{K} \frac{du}{dP} \right) n \cdot d\sigma = 0.$$

La [1]-[5] dànno dei notevoli integrali, estesi alla superficie chiusa σ, che sono sempre nulli.

4. Lemmi di Green.

Siano u, v *vettori*, α, β *omografie*, u, v *numeri reali* funzioni continue ecc. di P.

I teoremi noti sotto la denominazione *lemmi di* GREEN, sono dati, sotto *forma assoluta*, da:

[1] $$\int \{ \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v + u \operatorname{div} \operatorname{grad} v \} \cdot d\tau = -\int u n \times \operatorname{grad} v \cdot d\sigma.$$

[2] $$\int \{ u \operatorname{div} \operatorname{grad} v - v \operatorname{div} \operatorname{grad} u \} \cdot d\tau = -\int \{ u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u \} \times n \cdot d\sigma.$$

Dim. Cfr. E. C. V., pag. 164.

Se in luogo delle *particolari* omografie u, v (numeri) si considerano le omografie generiche α, β, allora, in luogo delle [1], [2], si hanno le forme seguenti:

[3] $$\int \left\{ \operatorname{grad} \alpha \times \operatorname{grad} \beta + \mathrm{I}_1 \left(\alpha \frac{d \operatorname{grad} \beta}{dP} \right) \right\} \cdot d\tau = -\int n \times \mathrm{K}\alpha \operatorname{grad} \beta \cdot d\sigma$$

[4] $$\mathrm{I}_1 \int \left\{ \alpha \frac{d \operatorname{grad} \beta}{dP} - \beta \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP} \right\} \cdot d\tau = -\int n \times (\mathrm{K}\alpha \operatorname{grad} \beta - \mathrm{K}\beta \operatorname{grad} \alpha) \cdot d\sigma$$

dalle quali per $\alpha = u$ e $\beta = v$ risultano ovviamente le [1], [2]. Quindi le [3], [4] sono una generalizzazione dei particolari lemmi di GREEN.

Dim. Se nella 2ª delle [2] del n. 2 si pone $v = \mathrm{grad}\,\beta$ si ottiene la [3]. Se dalla [3] si *toglie* la formula che da essa si ottiene scambiando tra loro α e β si ottiene la [4].

Come formule, nuove, analoghe alle [3], [4] ma provenienti dal *prodotto vettoriale* ($\wedge$), anzichè dal *prodotto scalare* ($\times$), si hanno le seguenti:

$$[5] \quad \int \left\{ \mathrm{grad}\,\alpha \wedge \mathrm{grad}\,\beta + 2\mathrm{V}\left(\frac{d\,\mathrm{grad}\,\beta}{dP} \cdot \mathrm{K}\alpha\right) \right\} \cdot d\tau = -\int (\alpha n) \wedge \mathrm{grad}\,\beta \cdot d\sigma,$$

$$[6] \quad 2\mathrm{V}\int \left\{ \frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{dP} \cdot \mathrm{K}\beta + \frac{d\,\mathrm{grad}\,\beta}{dP} \cdot \mathrm{K}\alpha \right\} \cdot d\tau =$$

$$= \int \{ (\mathrm{grad}\,\alpha) \wedge \beta + (\mathrm{grad}\,\beta) \wedge \alpha \} \, n \cdot d\sigma;$$

nel caso particolare $\alpha = u$, $\beta = v$, la [5], diviene.

$$[5'] \qquad \int \mathrm{grad}\,u \wedge \mathrm{grad}\,v \cdot d\tau = -\int u n \wedge \mathrm{grad}\,v \cdot d\sigma,$$

ma la [6] dà la [2] del n. 3·

Dim. Se nella 2ª delle [3] del n. 2 si pone $v = \mathrm{grad}\,\beta$ si ottiene la [5]. Se alla [5] si *aggiunge* la formula che da essa si ottiene scambiando tra loro α e β si ottiene la [6].

Per $\alpha = u$ e $\beta = v$, dalla [5] si ha la [5'] perchè [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [16]] $2\mathrm{V}\left(\frac{d\,\mathrm{grad}\,v}{dP} \cdot u\right) = u \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,v = 0$.

Si hanno anche le quattro formule seguenti che possono considerarsi, almeno per la forma, come generalizzazioni dei lemmi di GREEN.

$$[7] \quad \int \{ u \wedge \Delta' v + v \wedge \Delta' u \} \cdot d\tau = -\int \left\{ u \wedge \frac{dv}{dP} + v \wedge \frac{du}{dP} \right\} n \cdot d\sigma$$

$$[8] \quad \int \{ u \times \Delta' v - v \times \Delta' u \} \cdot d\tau = -\int \left\{ u \times \frac{dv}{dP} - v \times \frac{du}{dP} \right\} n \cdot d\sigma$$

$$[9] \quad \int \{ (\Delta\alpha)\,u \quad - \alpha(\Delta' u) \} \cdot d\tau \quad = - \int \left\{ \left(\frac{d\alpha}{dP} n \right) u - \left(\alpha \frac{du}{dP} \right) n \right\} \cdot d\sigma$$

$$[10] \quad \int \{ (\Delta\alpha)\beta \quad - \alpha(\Delta\beta) \} \cdot d\tau \quad = - \int \left\{ \left(\frac{d\alpha}{dP} n \right) \beta - \alpha \left(\frac{d\beta}{dP} n \right) \right\} \cdot d\sigma.$$

Dim. [7]. Alla 3ª delle [3] del n. 2, aggiungiamo la formula che si ottiene da essa scambiando tra loro u e v; si osservi che:

$$\mathrm{V}\left(\frac{du}{dP} \cdot \mathrm{K} \frac{dv}{dP} \right) = - \mathrm{V}\left(\frac{dv}{dP} \cdot \mathrm{K} \frac{du}{dP} \right), \quad a \wedge b = - b \wedge a$$

e si otterrà la [7].

Dim. [8]. Come per la precedente (per sottrazione), osservando che

$$\mathrm{I}_1\left(\frac{du}{dP} \cdot \mathrm{K} \frac{dv}{dP} \right) = \mathrm{I}_1\left(\frac{dv}{dP} \cdot \mathrm{K} \frac{du}{dP} \right); \quad a \times b = b \times a.$$

Dim. [9]. Si ottiene dalla 3ª delle [1] del n. 2 cambiando v in u.

Dim. [10]. Se, essendo a vettore costante, si pone, nella [9], $u = \alpha a$ e si ricorda che $\Delta'(\beta a) = (\Delta\beta) a$ si ottiene la [10].

Osservazioni. 1ª Per la validità delle formule precedenti, ove al posto di u, u, α si ponga u/r, u/r, α/r con $r = \mathrm{mod}(P - O)$ e O punto fisso, cfr. E. C. V., pag. 165. Lo stesso dicasi riguardo al *metodo delle singolarità*.

2ª Nelle formule precedenti, gli enti

$$\frac{du}{dP} n, \quad \frac{d\alpha}{dP} n, \quad \frac{du}{dP} n,$$

indicano le *derivate di u, α, u nella direzione n*, cioè *secondo la normale alla superficie in P* [cfr. Cap. II, § 1, n. 2] che, di solito, con notazione incompleta ed inesatta, si indicano con

$$\frac{du}{dn}, \quad \frac{d\alpha}{dn}, \quad \frac{du}{dn}.$$

5. Teoremi di Green e di Gauss.

Abbiano $\boldsymbol{u}$, α, u il solito significato ed essendo O un punto fisso si ponga $r = \mathrm{mod}\,(P - O)$.

Se O è punto interno al campo τ, e u_0, α_0, sono i valori che assumono $\boldsymbol{u}$, α, u nel punto O, allora, avendo r il significato prima stabilito, si ha:

$$[1] \quad 4\pi u_0 = \int \left\{ u \operatorname{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} u \right\} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma - \int \frac{1}{r} \Delta u \cdot d\tau =$$

$$= \int \left\{ u \frac{d(1/r)}{dP} - \frac{1}{r} \frac{du}{dP} \right\} \boldsymbol{n} \cdot d\sigma - \int \frac{1}{r} \Delta u \cdot d\tau$$

$$[2] \quad 4\pi \boldsymbol{u}_0 = \int \left\{ \left(\frac{d(1/r)}{dP} \boldsymbol{n} \right) \boldsymbol{u} - \frac{1}{r} \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \boldsymbol{n} \right) \right\} \cdot d\sigma - \int \frac{1}{r} \Delta' \boldsymbol{u} \cdot d\tau$$

$$[3] \quad 4\pi \alpha_0 = \int \left\{ \left(\frac{d(1/r)}{dP} \boldsymbol{n} \right) \alpha - \frac{1}{r} \left(\frac{d\alpha}{dP} \boldsymbol{n} \right) \right\} \cdot d\sigma - \int \frac{1}{r} \Delta \alpha \cdot d\tau.$$

Dim. [1]. La 1ª forma è dimostrata in E. C. V. a pag. 165; solo si è scritto Δu al posto di $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$ [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [14]]. La 2ª forma si ha subito dalla 1ª, ricordando [cfr. Cap. II, § 2, n. 3, [1]] $dm/dP = (\operatorname{grad} m) \times$.

Dim. [2]. Si può dimostrare come la [1], valendosi della [8] del n. 4 nella quale al posto di $\boldsymbol{v}$ si pone $\boldsymbol{a}/r$, con $\boldsymbol{a}$ vettore costante. Ma si può dimostrare anche nel modo seguente deducendola dalla [1].

Essendo $\boldsymbol{a}$ un vettore costante, si ha dalla [1], applicando proprietà ormai ben note:

$$4\pi u_0 \boldsymbol{a} = \int \left\{ u \left(\frac{d(1/r)}{dP} \boldsymbol{n} \right) \boldsymbol{a} - \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dP} \boldsymbol{n} \right) \boldsymbol{a} \right\} \cdot d\sigma - \int \frac{1}{r} (\Delta u) \boldsymbol{a} \cdot d\tau =$$

$$= \int \left\{ \left(\frac{d(1/r)}{dP} \boldsymbol{n} \right) (u\boldsymbol{a}) - \frac{1}{r} \left(\frac{d(u\boldsymbol{a})}{dP} \boldsymbol{n} \right) \right\} \cdot d\sigma - \int \frac{1}{r} \Delta'(u\boldsymbol{a}) \cdot d\tau.$$

Dunque la [2] risulta vera per $\boldsymbol{u}$ della forma $u\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ costante. Ma se si pone $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$, si scrive la [2] per i vettori $u\boldsymbol{i}$, $v\boldsymbol{j}$, $w\boldsymbol{k}$, per i quali è stata dimostrata vera, e si somma, si ottiene la [2].

Dim. [3]. Se nella [2] si pone $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ costante, si ottiene subito la [3].

Si hanno anche le proposizioni notevoli seguenti:

[4] *Se O è un punto ordinario del contorno σ, allora valendo le altre ipotesi precedenti, sussistono le formule* [1], [2], [3] **quando al posto di π si ponga $\pi/2$** (*o anche* 2π *al posto di* 4π).

[5] *Se il punto ordinario O è esterno a τ, ecc. allora valgono le* [1], [2], [3] **nelle quali i primi membri si riducono a zero.**

Dim. Basta imitare, sotto le nuove ipotesi, la dimostrazione della [1] per avere la 1ª del gruppo [4] e del gruppo [5]. Le altre due si possono dimostrare come si è fatto per le [2], [3].

Si ha ancora la proprietà particolare

$$[6] \qquad \int \frac{(P-O)\times n}{r^3} \cdot d\sigma = -\,\varepsilon, \quad \text{cioè} \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma = \varepsilon$$

ove ε vale 4π, 2π, 0, secondo che O è interno a τ, su σ, esterno a τ.

Dim. Se u è costante, dalla [1] e dalla corrispondente per i gruppi [4], [5] si ha subito

$$\int \operatorname{grad}(1/r) \times n \cdot d\sigma = \varepsilon;$$

ma si ha

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\operatorname{grad} r = -\frac{P-O}{r^3}$$

e quindi è vera la [6].

6. Trasformazione di integrali estesi ad un contorno lineare.

Sia s un contorno lineare chiuso e σ un diaframma avente s per contorno. Consideriamo, come al solito, gli elementi u, α, m funzioni di P variabili in σ, e quindi anche su s, e n abbia, rispetto a σ, il significato stabilito nei numeri precedenti.

Alcuni integrali *estesi al contorno s*, nel cui punto generico P l'elemento lineare è individuato dal vettore dP parallelo alla tangente ad s in P, si trasformano utilmente in integrali estesi al diaframma σ. Si hanno le formule notevoli seguenti:

[1] $$\int_s u \times dP = \int n \times \operatorname{rot} u \cdot d\sigma \qquad \text{[\textit{Teorema di} STOKES]}$$

[2] $$\int_s u \wedge dP = \int \left\{ \operatorname{div} u - K \frac{du}{dP} \right\} n \cdot d\sigma$$

[3] $$\int_s \alpha dP = \int (K \operatorname{Rot} K\alpha)\, n \cdot d\sigma$$

[4] $$\int_s m dP = \int n \wedge \operatorname{grad} m \cdot d\sigma$$

[5] $$\int_s \frac{du}{dP} dP = 0$$

[6] $$\int_s K \frac{du}{dP} dP = \int K \frac{d \operatorname{rot} u}{dP} n \cdot d\sigma$$

[7] $$\int_s (\Delta\alpha)\, dP = \int (\Delta K \operatorname{Rot} K\alpha)\, n \cdot d\sigma.$$

Dim. [1]. Ripetere la dimostrazione a pag. **167** di E. C. V. Interessa anche esaminare, per questo teorema della **circuitazione** *del vettore u lungo la linea s*, quanto è esposto in E. C. V. nelle pp. **166–170**.

Dim. [2]. Se nella [1] poniamo $u \wedge a$ al posto di u, essendo a vettore costante si ha:

$$a \times \int_s u \wedge dP = -\int n \times \operatorname{rot}(u \wedge a) \cdot d\sigma = \qquad \text{[cfr. Cap. II, § 2 n. 6, [2]]}$$

$$= + \int n \times \left\{ \operatorname{div} u - \frac{du}{dP} \right\} a \cdot d\sigma =$$

$$= a \times \int \left\{ \operatorname{div} u - K \frac{du}{dP} \right\} n \cdot d\sigma$$

che per l'arbitrarietà di a dimostra la [2].

Dim. [3]. Essendo $\boldsymbol{a}$ vettore costante, si ponga, nella [1], $\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}$ al posto di $\boldsymbol{u}$. Osservando che [cfr. Cap. II, § 2, n. 2, [4]]

$$\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a} \times d P = \boldsymbol{a} \times \alpha d P,$$
$$\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot}(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{n} \times (\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times (\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha)\boldsymbol{n},$$

per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ risulta la [3].

Dim. [4]. Ponendo, nella [1], $m\boldsymbol{a}$, con $\boldsymbol{a}$ costante, al posto di $\boldsymbol{u}$ e ricordando [cfr. Cap. II, § 2, n. 5, [2]] che

$$\operatorname{rot}(m\boldsymbol{a}) = (\operatorname{grad} m)\wedge\boldsymbol{a},$$

si ha subito

$$\boldsymbol{a} \times \int_S m\,dP = \int \boldsymbol{n} \times (\operatorname{grad} m)\wedge\boldsymbol{a}\cdot d\sigma = \boldsymbol{a} \times \int \boldsymbol{n}\wedge\operatorname{grad} m\cdot d\sigma; \quad \text{c. d. d.}$$

Allo stesso risultato si giunge ponendo, nella [3], m al posto di α e ricordando che [cfr. Cap. II, § 2, n. 7, [2]]

$$\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}m = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,m = \mathrm{K}(\operatorname{grad} m\wedge) = -\operatorname{grad} m\wedge.$$

Dim. [5]. Risulta subito dalla [3] ponendovi $d\boldsymbol{u}/dP$ al posto di α e ricordando che [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [4]],

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}(d\boldsymbol{u}/dP) = 0.$$

Dim. [6]. Dalla [3] si ha [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [3]]

$$\int_S \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\,dP = \int \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{n}\cdot d\sigma = \int \mathrm{K}\,\frac{d\operatorname{rot}\boldsymbol{u}}{dP}\,\boldsymbol{n}\cdot d\sigma; \quad \text{c. d. d.}$$

Dim. [7]. Se nella [3] si pone $\Delta\alpha$ al posto di α si ha [cfr. Cap. II; § 3, n. 6, [2]; § 4, n. 2, [2]]

$$\int_S (\Delta\alpha)\,dP = \int (\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\Delta\alpha)\boldsymbol{n}\cdot d\sigma = \int (\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\Delta\mathrm{K}\alpha)\boldsymbol{n}\cdot d\sigma =$$
$$= \int (\Delta\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha)\boldsymbol{n}\cdot d\sigma; \quad \text{c. d. d.}$$

§ 2. Alcuni teoremi differenziali.

1. Differenziali esatti.

Siano, come al solito, *u, v vettori*, *α omografia*, *m numero reale*, tutti funzioni continue ecc. del punto P variabile in un campo (continuo, ecc.) a tre dimensioni.

Inoltre *supponiamo* che *due differenziali qualunque*, d, δ, siano *sempre commutabili*, cioè $d\delta h = \delta d h$.

Si hanno i due teoremi seguenti:

[1] $v \times du$, è un *differenziale esatto*, **solamente quando** $\mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\dfrac{du}{dP}v\right) = 0$, in tutto il campo di variazione di P

[2] αdu, è un *differenziale esatto*, **solamente quando** $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\left(\alpha \cdot \dfrac{du}{dP}\right) = 0$, in tutto il campo di variazione di P,

notando che alla condizione [2] si può dare mediante l'operatore k la forma

[2']
$$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP} - \mathrm{k}\left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\right) = 0$$

che contiene soltanto la derivata prima di α e di u.

Dim. [1]. Affinchè $v \times du$ sia un differenziale esatto è necessario e sufficiente [cfr. Intr. III, n. 8, f)] che

$$\delta(v \times du) = d(v \times \delta u), \text{ cioè } \delta v \times du = dv \times \delta u;$$

condizione che può scriversi, successivamente,

$$\frac{dv}{dP}\delta P \times \frac{du}{dP}dP = \frac{dv}{dP}dP \times \frac{du}{dP}\delta P,$$

$$dP \times \mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\delta P = dP \times \mathrm{K}\frac{dv}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\delta P,$$

che, per l'arbitrarietà di dP e δP, dà subito

$$\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP} = \mathrm{K}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\right).$$

Una omografia identica alla sua coniugata ha il vettore nullo e quindi

$$\mathrm{V}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\right)=0$$

dalla quale risulta [cfr. Cap. II, § 2, n. 5, [6]; § 4, n. 1, [26]]

$$\operatorname{rot}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot v\right)=\left(\operatorname{Rot}\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right)v+2\mathrm{V}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\frac{dv}{dP}\right)=0+0=0;\ \text{c. d. } d.$$

Dim. [2], [2′]. Se $\boldsymbol{a}$ è vettore costante, allora

$$\alpha du \quad \text{e} \quad a\times\alpha du=\mathrm{K}\alpha a\times du$$

sono entrambi, o nessuno, differenziali esatti. Ora, per la [1], $\mathrm{K}\alpha a\times du$ è differenziale esatto solamente quando

$$\operatorname{rot}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha a\right)=\operatorname{Rot}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{K}\alpha\right)a=\operatorname{Rot}\mathrm{K}\left(\alpha\cdot\frac{du}{dP}\right)a=0,$$

che per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ dimostra la [2].

La [2′] si può ottenere dalla [2] con calcolo un po' lungo. Più rapidamente si opera così. Se $\alpha du=dx$, anche $\alpha\delta u=\delta x$; operando con δ e d, rispettivamente si ha

$$\delta\alpha\cdot du-d\alpha\cdot\delta u=0$$

che *equivale* alle condizioni seguenti

$$\frac{d\alpha}{dP}\delta P\cdot\frac{du}{dP}dP-\frac{d\alpha}{dP}dP\cdot\frac{du}{dP}\delta P=0,$$

$$\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}dP\delta P-\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\delta PdP=0,$$

$$\left\{\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}-\mathrm{k}\left(\mathrm{k}\frac{d\alpha}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\right)\right\}dP\delta P=0;\ \text{c. d. d. (1)}$$

(1) Si può anche dedurre la [1] dalla [2]. Se $\boldsymbol{a}$ è vettore costante, allora $v\times du$ e $v\times du\cdot a=\mathrm{H}(v,\ a)du$ sono entrambi, o pur no, differenziali esatti.

Dunque la condizione [1] si ricava dalla [2] per $\alpha=\mathrm{H}(v,\ a)$ e per proprietà note [cfr. Cap. II, § 2, n. 7, [6]; Cap. I, § 2, n. 4 [2]] si ha:

$$0=\operatorname{Rot}\mathrm{K}\left\{\mathrm{H}(v,\ a)\cdot\frac{du}{dP}\right\}=\operatorname{Rot}\left\{\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot\mathrm{H}(a,\ v)\right\}=$$

$$=\operatorname{Rot}\mathrm{H}\left(a,\ \mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot v\right)=\mathrm{H}\left\{a,\ \operatorname{Rot}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\cdot v\right)\right\};\ \text{c. d. d.}$$

La [1] dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè:

[3] $(\alpha v) \times du, \quad v \times \alpha du,$ siano *differenziali esatti*

bastando porre, al posto di v, rispettivamente αv e $K\alpha v$.

La [2] dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè:

[4] $(\alpha v) \wedge du, \quad v \wedge du, \quad v \wedge \alpha du, \quad \alpha(v \wedge du),$ siano *differenziali esatti*,

bastando porre al posto di α, rispettivamente

$$(\alpha v)\wedge, \quad v\wedge, \quad v\wedge\alpha, \quad \alpha\cdot v\wedge.$$

Il lettore può scrivere le formule nei casi [3], [4], alcune delle quali sono abbastanza complesse.

Nel caso particolare $du = dP$, cioè $u = P - O$ con O punto ordinario costante si hanno condizioni più semplici. Particolarmente interessanti sono le tre seguenti

[5] $\begin{cases} u \times dP, \quad \alpha dP, \quad u \wedge dP \quad \text{sono } \textit{differenziali esatti}, \\ \textbf{solamente quando } \text{si ha, rispettivamente:} \\ \operatorname{rot} u = 0, \quad \operatorname{Rot} K\alpha = 0, \quad u = \text{cost.} \end{cases}$

Dim. Nell'ipotesi $du = dP$ si ha che du/dP è l'identità. In conseguenza dalle [1], [2] si ha subito, ordinatamente, nei primi due casi [5]:

$$\operatorname{rot} u = 0, \quad \operatorname{Rot} K\alpha = 0; \text{ c. d. d.}$$

Nel terzo caso si ha dalla [2]

$$(a)\ 0 = \operatorname{Rot} K(u\wedge) = -\operatorname{Rot}(u\wedge) = \operatorname{div} u - du/dP = I_1(du/dP) - du/dP;$$

operando nel 1° ed ultimo membro con I_1 si ha

$$0 = 3I_1(du/dP) - I_1(du/dP) = 2I_1(du/dP);$$

e poichè $I_1(du/dP) = 0$ anche $du/dP = 0$, per la (a), e quindi $u = \text{cost}$.

È chiaro che $(du/dP)dP$ è sempre un differenziale esatto (poichè vale du); ma lo stesso non avviene per $\{K(du/dP)\}dP$.

Si ha:

$$[6]\quad \begin{cases} \left(\mathrm{K}\,\dfrac{du}{dP}\right)dP \text{ è un } \textit{differenziale esatto}, \\ \textbf{solamente quando } u \text{ è della forma} \\ \qquad u = u_0 \wedge (P - O) + \operatorname{grad} m \\ \text{essendo } u_0 \text{ vettore costante, } O \text{ punto fisso e } m \text{ numero funzione di } P. \end{cases}$$

Dim. La condizione [5] dà [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [3]]

$$\operatorname{Rot} \mathrm{KK}\frac{du}{dP} = 0, \quad \operatorname{Rot}\frac{du}{dP} = 0, \quad \frac{d \operatorname{rot} u}{dP} = 0, \quad \operatorname{rot} u = 2u_0;$$

vedremo in seguito [cfr. § 3, n. 2, [2]] che per essere $\operatorname{rot} u = 2u_0$, u deve appunto avere la forma indicata.

Osservazioni. 1.ª La seconda delle [5] esprime che: $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = 0$, *è la condizione* **necessaria** *e* **sufficiente** *affinchè* αdP *sia un differenziale esatto*. Ora, noi avevamo trovato [cfr. Cap. II, § 1, n. 6, [2]] come condizione necessaria e sufficiente

$$(a) \qquad \mathrm{k}\,\frac{d\alpha}{dP} = \frac{d\alpha}{dP},$$

forma che si ottiene immediatamente dalle [2], [2'] per

$$u = P - O.$$

2.ª La (a), ovvero la 2ª delle [5], esprimono in qual solo caso una *omografia* (una H_1)α è la *derivata, rispetto a P di un* vettore.

Possiamo ora domandarci quale è la condizione *necessaria* e *sufficiente* affinchè una *iperomografia* (una H_2)μ sia la *derivata, rispetto a P di una* **omografia**, cioè, in altri termini, affinchè μdP *sia un* **differenziale esatto**. Tale condizione è

$$(b) \qquad \mathrm{k}^*\frac{d\mu}{dP} = \frac{d\mu}{dP}$$

che per le H_1 si riduce alla (a) essendo, in tal caso, k^* coincidente con k.

Ciò risulta subito da Intr. III, n. 8, *f*), poichè per essere μdP un differenziale esatto deve essere

$$\delta\mu \cdot dP = d\mu \cdot \delta P, \quad \text{cioè} \quad \frac{d\mu}{dP}\delta P \cdot dP = \frac{d\mu}{dP} dP \cdot \delta P$$

che per l'arbitrarietà di dP e δP dà appunto la (*b*) [cfr. Cap. II, § 3, n. 1].

3.ª Le condizioni, necessarie e sufficienti, (*a*) e (*b*) esprimono quali sono i casi nei quali le ***equazioni differenziali*** semplici

$$(c) \qquad \frac{dx}{dP} = \alpha, \quad \frac{d\xi}{dP} = \mu$$

ammettono soluzione, essendo α ***omografia***, μ ***iperomografia***, **date** funzioni di P e x ***vettore***, ξ ***omografia***, **incognite**, da determinare sodisfacendo alle (*c*).

Se α e μ sono ***nulle***, allora x e ξ sono delle costanti.

Se α e μ sono ***costanti***, allora

$$x = \alpha(P - O), \quad \xi = \mu(P - O)$$

ove O è punto ***fisso*** arbitrario.

Se α e μ non sono costanti, allora le (*a*), (*b*) dànno le condizioni affinchè le (*c*) ammettano soluzioni, ma tali soluzioni potranno esser determinate soltanto in casi particolari che non è il caso di esaminare qui.

2. Superficie e linee vorticose e di corrente. Teoremi di Jacobi.

Sia u un ***vettore*** e φ un ***numero reale*** funzioni del punto P.

Fissato ad arbitrio un numero reale φ_0, la condizione $\varphi = \varphi_0$, ovvero sotto forma ***generica*** $\varphi = \text{cost}$, può esser sodisfatta da una classe di punti P. Se tale classe esiste, essa, in generale, costituisce una ***superficie***. Supponiamo che φ sia funzione tale di P che la condizione $\varphi = \varphi_0$, o la generica $\varphi = \text{cost}$, individui, nel senso ora indicato, una ***superficie***.

Si tenga ben presente che:

La **normale** *nel punto generico P della superficie* $\varphi = \text{cost}$ *è parallela al vettore* $\operatorname{grad} \varphi$;

Se, essendo anche ψ numero funzione di P, si considera la linea intersezione di due delle superficie $\varphi = \text{cost}$, $\psi = \text{cost}$, *allora la* **tangente** *nel punto generico P di tali linee è parallela al vettore* $\operatorname{grad} \varphi \wedge \operatorname{grad} \psi$.

Dim. Essendo $d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \times dP$, per $\varphi = \text{cost}$ si ha

$$\operatorname{grad} \varphi \times dP = 0;$$

e poichè dP varia sul piano tangente in P alla superficie, risulta che $\operatorname{grad} \varphi$ è parallelo alla normale in P.

Il vettore $\operatorname{grad} \varphi \wedge \operatorname{grad} \psi$ è normale alle due normali in P alle superficie φ, ψ e quindi è parallelo alla tangente in P alla loro intersezione.

Si dirà che la superficie $\varphi = \text{cost}$ è una ***superficie vorticosa rispetto ad u***, quando

$$[1] \qquad \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{rot} u = 0$$

in *tutti i punti P della superficie* $\varphi = \text{cost}$.

Si dirà, invece, che la superficie $\varphi = \text{cost}$ è una ***superficie di corrente rispetto ad u***, quando

$$[2] \qquad \operatorname{grad} \varphi \times u = 0$$

in *tutti i punti P della superficie* $\varphi = \text{cost}$.

Chiameremo: ***linee vorticose***, ovvero ***linee di corrente***, sempre ***rispetto ad u***, le *intersezioni* di due *superficie vorticose*, o di due *superficie di corrente*, sempre *rispetto ad u*.

Dalle definizioni e proprietà ora esposte risulta, in modo ovvio, che:

Nel punto generico P di una **superficie vorticosa rispetto ad** u, *il vettore* $\operatorname{rot} u$ *è parallelo al piano tangente in P;*

Nel punto generico P di una **superficie di corrente rispetto ad** u, *il vettore u è parallelo al piano tangente in P.*

Dato il vettore u funzione di P, interessa certamente di avere le *equazioni differenziali*, delle *superficie* e *linee vorticose* o di *corrente* relative al vettore u.

È ovvio che: *un numero* φ *funzione di* P *sodisfacente alla equazione differenziale* [1], *ovvero* [2], *individua una* **semplice infinità** *di superficie* $\varphi = \text{cost}$, *che sono* **superficie vorticose,** *ovvero* **superficie di corrente** *rispetto ad* u. Integrate, quando lo si sappia fare, le [1], [2], si hanno le superficie *vorticose* e di *corrente* rispetto ad u.

Per le **linee** *vorticose*, o di *corrente*, rispetto ad u, che, naturalmente costituiranno, ciascuna, una *doppia infinità*, si avranno equazioni differenziali non contenenti φ, ma contenenti soltanto P ed u. Si ha precisamente:

L'equazione differenziale delle **linee vorticose rispetto ad** u, *è*

$$dP \wedge \operatorname{rot} u = 0, \tag{3}$$

e delle **linee di corrente rispetto ad** u *è*

$$dP \wedge u = 0. \tag{4}$$

Dim. Il dP per una linea vorticosa è *parallelo*, come si è osservato, a $\operatorname{grad}\varphi \wedge \operatorname{grad}\psi$; ma per la [1] i due gradienti sono *normali* a $\operatorname{rot} u$ e quindi $\operatorname{rot} u$ è parallelo a dP, cioè vale la [3]; e viceversa; c. d. d. Nello stesso modo per la [4].

Sono notevoli ed importanti i seguenti teoremi di JACOBI.

TEOREMA 1.° *Se P è punto generico di una linea* **vorticosa** *rispetto a P, e si considerano i differenziali dP che giacciono in una superficie vorticosa rispetto ad u uscente dalla linea (ma scelta ad arbitrio), allora $u \times dP$ è un differenziale esatto.*

Dim. Si ha [cfr. Cap. II, § 2, n. 2 [2]]

$$\operatorname{rot} u \times dP \wedge \delta P = d(u \times \delta P) - \delta(u \times dP); \tag{a}$$

per dP, δP sulla superficie vorticosa considerata si ha, per le ipotesi fatte, che $dP \wedge \delta P$ è normale a $\operatorname{rot} u$ e quindi la (a) esprime che $u \times dP$ è, nelle condizioni indicate, differenziale esatto.

TEOREMA 2.° *Se* $u \times \mathrm{rot}\, u = 0$ *in* **tutto il campo di variabilità di** *P, allora esistono i numeri m, f,* μ, *funzioni di P, per i quali si ha, pure in* **tutto** *il campo:*

$$u = m \,\mathrm{grad}\, f, \quad \mathrm{rot}\,(\mu u) = 0.$$

Dim. Siano $\varphi = \mathrm{cost}$, $\psi = \mathrm{cost}$ superficie vorticose rispetto ad u. Siccome [cfr. [1]] $\mathrm{grad}\,\varphi$ e $\mathrm{grad}\,\psi$ sono normali a $\mathrm{rot}\, u$ e, per ipotesi, $\mathrm{rot}\, u$, è normale ad u, segue che u, $\mathrm{grad}\,\varphi$, $\mathrm{grad}\,\psi$ sono vettori complanari e quindi esistono dei numeri h, k (funzioni di P), tali che

$$u = h \,\mathrm{grad}\,\varphi + k \,\mathrm{grad}\,\psi. \tag{b}$$

Moltiplicando ($\times$) la (b) per dP si ha [cfr. Cap. II, § 2, n. 3, [1']]

$$u \times dP = h d\varphi + k d\psi. \tag{c}$$

Ma [cfr. Teor. 1°] sulle superficie φ, ψ vorticose rispetto ad u, il numero $u \times dP$ è differenziale esatto e quindi dalla (c) segue

$$h d\varphi = d\lambda, \quad k d\psi = d\lambda',$$

vale a dire h, k sono funzioni soltanto di φ e ψ rispettivamente. Si potrà dunque porre

$$h = m \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad k = m \frac{\partial f}{\partial \psi},$$

essendo m un conveniente fattore integrante. Allora dalla (b) e per formula nota [cfr. Cap. II, § 5, n. 2, [4]] si ha:

$$u = m \,\mathrm{grad}\, f.$$

Per $m = 1/\mu$ si ha $\mu u = \mathrm{grad}\, f$ ed operando con rot

$$\mathrm{rot}(\mu u) = 0 \quad \text{[cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [24]]}.$$

TEOREMA 3.° *Se* $\mathrm{div}\, u = 0$ *in* **tutto il campo di variabilità di** *P, allora esistono dei numeri* λ, μ *funzioni di P, per i quali si ha, pure in tutto il campo*

$$u = \mathrm{grad}\,\lambda \wedge \mathrm{grad}\,\mu.$$

Dim. Siano $\varphi = \text{cost}$, $\psi = \text{cost}$ superficie di *corrente* rispetto ad u (e quindi integrali della $u \wedge dP = 0$). Essendo u normale [cfr. [2]] a grad φ e grad ψ si avrà

$$u = h \operatorname{grad} \varphi \wedge \operatorname{grad} \psi, \tag{d}$$

ove h è funzione di P.

Prendendo la divergenza dei due membri e tenendo conto della ipotesi div $u = 0$, si ha [cfr. Cap. II, § 2, n. 5, [1]; § 2, n. 6, [3]; § 4, n. 1, [24]]

$$\operatorname{grad} h \times \operatorname{grad} \varphi \wedge \operatorname{grad} \psi = 0,$$

la quale esprime che i vettori grad h, grad φ, grad ψ sono complanari. Esistono, dunque, i numeri m, n tali che

$$\operatorname{grad} h = m \operatorname{grad} \varphi + n \operatorname{grad} \psi$$

cioè, moltiplicando ($\times$) per dP, tali che

$$dh = m d\varphi + n d\psi$$

da cui risulta che h è funzione soltanto di φ e di ψ.

Se ora noi poniamo

$$\lambda = \int h d\varphi + f(\psi), \quad \text{con } f \text{ simbolo di funzione arbitraria,}$$

si ha subito

$$\operatorname{grad} \lambda = h \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \operatorname{grad} \psi$$

e in conseguenza [cfr. (d)]

$$\operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \psi = h \operatorname{grad} \varphi \wedge \operatorname{grad} \psi = u, \quad \text{c. d. d.}$$

Teorema 4.° *Esistono sempre almeno due numeri λ, μ, funzioni di P, per i quali si ha*

$$\operatorname{rot} u = \operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \mu.$$

Dim. Osservando [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [23]] che div rot $u = 0$ in tutto il campo, dal Teor. 3° risulta il 4°.

TEOREMA 5.° *Si possono determinare, in infiniti modi, i numeri reali m, λ, μ, funzioni di P, in modo che*

$$u = \operatorname{grad} m + \lambda \operatorname{grad} \mu. \quad \text{[Teorema di PFAFF].}$$

Dim. Dal Teor. 2° e sua dimostrazione si ha:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \mu = \operatorname{rot} (\lambda \operatorname{grad} \mu).$$

In conseguenza $\operatorname{rot} (\boldsymbol{u} - \lambda \operatorname{grad} \mu) = 0$ e quindi, per un teorema che vedremo fra poco (e indipendente da questo che ora stiamo dimostrando) [cfr. n. 4, Teor. 2°), esiste almeno un numero m funzione di P per il quale $\boldsymbol{u} - \lambda \operatorname{grad} \mu = \operatorname{grad} m$; c. d. d.

3. Cenno delle equazioni di Laplace e di Poisson.

Sia α una omografia funzione nota di P e si voglia determinare una omografia ξ, pure funzione di P, sodisfacente alla condizione (equazione differenziale del 2° ordine in ξ)

[1] $$\Delta \xi = \alpha.$$

Non possiamo addentrarci nello studio della equazione differenziale [1] e ci limitiamo ad *accennare* a due casi particolari.

a) Per $\alpha = 0$ una soluzione della [1] è data da

$$\xi = \alpha_0 / \operatorname{mod} (P - O)$$

ove α_0 è omografia arbitraria *costante* e O è un punto pure arbitrario *fisso*. Ciò si verifica facilmente.

Quando ξ deve essere *numero reale* (particolare omografia), e sempre per $\alpha = 0$ (numero anch'essa), allora la [1] è l'*equazione di* LAPLACE.

b) Per $\alpha \neq 0$, allora una soluzione della [1], nel campo τ, è data da

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha d\tau}{\operatorname{mod} (P - O)} \text{ (1).}$$

---

(1) Una soluzione dell'equazione $\Delta' x = \boldsymbol{u}$ è

$$x = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{u} d\tau}{\operatorname{mod} (P - O)}.$$

Quando ξ, e in conseguenza anche α [cfr. Cap. II, § 3, n. 2, [3] nota], è un *numero* allora la [1] è l'*equazione di* POISSON.

4. Vettori dei quali la divergenza o la rotazionale è nulla.

Noi abbiamo dimostrato [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [23], [24]] che

$$\mathrm{div\,rot}\,\boldsymbol{x} = 0, \quad \mathrm{rot\,grad}\ x = 0,$$

essendo $\boldsymbol{x}$ *vettore* e x *numero* funzioni di P, cioè che: **è sempre nulla *la* divergenza della rotazionale di un vettore *e la* rotazionale del gradiente di un numero.** Sussistono anche le proprietà inverse, cioè si hanno i teoremi seguenti, ove $\boldsymbol{u}$ è un vettore funzione di P.

TEOREMA 1.° *Se la divergenza di* $\boldsymbol{u}$ *è nulla,*

[1] $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0,$$

allora, $\boldsymbol{u}$ *è la rotazionale di un vettore, cioè esiste almeno un vettore* $\boldsymbol{v}$, *funzione di* P, *per il quale*

[1'] $$\boldsymbol{u} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}.$$

In altri termini: *affinchè si abbia* $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$ *è necessario e sufficiente che* $\boldsymbol{u}$ *sia la rotazionale di un vettore, cioè che sia* $\boldsymbol{u} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$.

Dim. Dal Teor. 3° del n. 2 e dall'ipotesi $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$ si ha

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\lambda \wedge \mathrm{grad}\,\mu;$$

ma [cfr. Cap. II, § 2, n. 5, [2]; § 4, n. 1, [24]]

$$\mathrm{rot}(\lambda\,\mathrm{grad}\,\mu) = \lambda\,\mathrm{rot\,grad}\,\mu + \mathrm{grad}\,\lambda \wedge \mathrm{grad}\,\mu = \mathrm{grad}\,\lambda \wedge \mathrm{grad}\,\mu$$

e quindi $\boldsymbol{u}$ è la rotazionale del vettore $\lambda\,\mathrm{grad}\,\mu$; c. d. d.

TEOREMA 2.° *Se la rotazionale di* $\boldsymbol{u}$ *è nulla*

[2] $$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = 0,$$

allora, $\boldsymbol{u}$ *è il gradiente di un numero, cioè esiste almeno un* *numero m, funzione di P, per il quale*

[2′] $$u = \operatorname{grad} m.$$

In altri termini: *affinchè si abbia* rot $u = 0$, *è necessario e sufficiente che u sia il gradiente di un numero, cioè che sia* $u = \operatorname{grad} m$.

Dim. Dalla ipotesi $\operatorname{rot} u = 0$ segue che $u \times \operatorname{rot} u = 0$. In conseguenza [cfr. n. 2, Teor. 2°] si ha:

$$u = \lambda \operatorname{grad} \mu.$$

Operando con rot nei due membri, si ha, dalla ipotesi, e da proprietà ben note,

$$\operatorname{grad} \lambda \wedge \operatorname{grad} \mu = 0.$$

Dunque, esiste un numero reale h tale che

$$\operatorname{grad} \lambda = h \operatorname{grad} \mu, \quad \text{cioè tale che} \quad d\lambda = h d\mu;$$

ne segue che h e λ sono funzioni di μ, e allora posto

$$m = \int \lambda d\mu$$

si ricava subito $\operatorname{grad} m = \lambda \operatorname{grad} \mu$, vale a dire che u è il gradiente di un numero; c. d. d.

5. Teoremi per vettori ed omografie derivati da un teorema analitico di Clebsch.

Teorema 1.° *Se u è vettore, funzione di P, e n è un numero intero positivo e non nullo, allora: si può determinare, ed in infiniti modi, un* **numero reale** *m e un* **vettore** *v, funzioni di P, in modo tale che*

[1] $$u = \operatorname{grad} m + \operatorname{rot}^n v.$$

Dim. Sia m una soluzione [cfr. n. 4] della equazione in m

$$\Delta m = \operatorname{div} u;$$

e poichè [cfr. Cap. II, § 4, n. 1 [14]] $\Delta m = \operatorname{div} \operatorname{grad} m$ si avrà

$$\operatorname{div}(u - \operatorname{grad} m) = 0$$

e quindi [cfr. n. 4, Teor. 1°] deve esistere almeno un vettore v, funzione di P, per il quale si ha

$$u - \operatorname{grad} m = \operatorname{rot} v.$$

Il teorema è dunque dimostrato per $n = 1$ (Teorema di CLEBSCH sotto forma assoluta).

Dalla [1] per $n = 1$, ed è vera, si ha:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{grad} m + \operatorname{rot} v_1 \\ v_1 &= \operatorname{grad} m_1 + \operatorname{rot} v_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-1} &= \operatorname{grad} m_{n-1} + \operatorname{rot} v; \end{aligned}$$

ma si ha [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [24]] $\operatorname{rot} \operatorname{grad} m_i = 0$ e quindi

$$u = \operatorname{grad} m + \operatorname{rot}^n v; \text{ c. d. d.}$$

TEOREMA 2.° *Stando per u ed n le ipotesi del teor. 1°, allora: esistono infiniti vettori x, funzioni di P, per i quali si ha*

[2] $$\operatorname{rot}^{n+1} x = \operatorname{rot} u,$$

e questi vettori x, sodisfacenti alla equazione differenziale [2], *sono tutti e soli i vettori v che verificano la relazione* [1].

Dim. Operando con rot nei due membri della [1] si ha

$$\operatorname{rot} u = \operatorname{rot}^{n+1} v$$

e quindi i vettori v della [1] sono dei vettori x che sodisfano alla [2].

Viceversa. Siccome la [2] può scriversi

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}^n x - u) = 0,$$

dal Teor. 2° del n. 4 risulta che esiste un numero m tale che

$$\operatorname{rot}^n x - u = -\operatorname{grad} m$$

e quindi i vettori x della [2] sono dei vettori v della [1].

Dei teoremi 1°, 2° per i vettori [il 1° dà sotto forma assoluta, e per $n = 1$, un teorema dovuto a CLEBSCH] si hanno i corrispondenti per le omografie.

Teorema 3.° *Se α è una omografia, funzione di P, e n è un numero intero positivo e non nullo, allora: si può determinare, ed in infiniti modi, un* **vettore** u *e una* **omografia** β, *funzioni di P, in modo tale che:*

$$[3] \qquad \alpha = \mathrm{K}\frac{du}{dP} + \mathrm{Rot}^n \beta.$$

Dim. Sia a un vettore costante. Si ha dalla [1] che

$$(a) \qquad \alpha a = \mathrm{grad}\, m + \mathrm{rot}^n v$$

ove il *numero* m e il *vettore* v sono, nel caso nostro, funzioni di P e di a. Operando nei due membri della (a) con div, o con rot, rispettivamente si ha [cfr. Cap. II, § 2, n. 5, [5], [6]; § 4, n. 1, [23], [14], [24]]

$$(a') \qquad \mathrm{grad}\, \mathrm{K}\alpha \times a = \Delta m, \quad (\mathrm{Rot}\,\alpha)a = \mathrm{rot}^{n+1} v.$$

I primi membri delle (a') sono *funzioni lineari* nel campo dei *vettori* costanti; lo stesso deve avvenire per i secondi membri. Per questo *basta* che m e v siano funzioni lineari di a nel campo dei vettori costanti; infatti, Δ e rot^{n+1} sono distributivi rispetto alla somma e per h numero costante si ha, per proprietà ben note,

$$\Delta(hm) = h\Delta m, \quad \mathrm{rot}^{n+1}(hv) = h\, \mathrm{rot}^{n+1} v.$$

Assumendo allora m e v funzioni lineari di a è noto [cfr. Intr. II, n. 7, 1°], che devono esistere un vettore u e una omografia β *funzioni di P soltanto* e tali che $m = u \times a$, $v = \beta a$. In conseguenza si ha dalla (a)

$$\alpha a = \mathrm{grad}(u \times a) + \mathrm{rot}^n(\beta a)$$

ovvero, per proprietà ben note,

$$\alpha a = \left(\mathrm{K}\frac{du}{dP}\right)a + (\mathrm{Rot}^n \beta)a$$

che per l'arbitrarietà di a dimostra la [3].

Teorema 4.° *Stando per α ed n le ipotesi del teor. 3°, allora: esistono infinite omografie ξ, funzioni di P, per le* *quali si ha:*

[4] $$\mathrm{Rot}^{n+1}\xi = \mathrm{Rot}\,\alpha$$

e le omografie ξ *sono tutte e sole le omografie* β *che verificano la* [3].

Dim. È conseguenza del Teor. 2°, ponendo $x = \xi a$ e $u = \alpha a$, come si è fatto per dedurre il Teor. 3° dal 1°.

§ 3. Equazioni differenziali.

Per non stare a ripetere in ogni teorema di questo § quale è il significato delle lettere e relazioni delle quali facciamo uso, stabiliamo, una volta per tutte che:

u, α, m sono, rispettivamente, *vettore*, *omografia*, *numero reale*, funzioni *note* del punto P e date in un campo continuo, ecc., a tre dimensioni;

u_0, ξ_0, m_0 elementi analoghi ai precedenti, ma costanti che si fissano ad arbitrio;

x, ξ, x, sono, rispettivamente, *vettore*, *omografia*, *numero reale*, che noi vogliamo determinare (le *incognite*) in funzione di P in modo da sodisfare a certe condizioni date (*equazioni differenziali*) in tutto il campo di variabilità di P;

v, w, β, n sono ancora, due *vettori*, una *omografia*, un *numero reale*, funzioni di P che noi possiamo fissare del tutto ad arbitrio, oppure sodisfacenti a condizioni che saranno indicate volta per volta;

O è un punto arbitrario costante.

Le *equazioni differenziali* che noi consideriamo in questo § sono della forma generale

(*a*) $$fy = h$$

ove: f è uno degli operatori differenziali stabiliti nel Cap. II, o formato (prodotto funzionale) con queste e gli operatori I, K, D, V e y, h sono dei convenienti elementi delle classi *vettore*, *omografia*, *numero reale*.

Delle equazioni differenziali (a) noi diamo la ***soluzione generale*** nel caso $h = 0$, e delle ***soluzioni particolari*** per $h \neq 0$, *costante* o ***funzione di P***. È evidente che si ottengono le *soluzioni generali* delle equazioni (a) per $h \neq 0$, aggiungendo alla *soluzione particolare* la ***soluzione generale della equazione*** (a) per $h = 0$.

1. Soluzioni generali delle equazioni $fy = 0$.

Le equazioni differenziali [1]-[10] *hanno per* **soluzioni generali** *le espressioni* [1′]-[10′] *delle incognite* x, ξ, x.

[1]	$\operatorname{div} x = 0$	[1′]	$x = \operatorname{rot} v$
[2]	$\operatorname{rot} x = 0$	[2′]	$x = \operatorname{grad} n$
[3]	$\operatorname{grad} x = 0$	[3′]	$x = \text{cost}$
[4[	$\operatorname{grad} \xi = 0$	[4′]	$\xi = \mathrm{K} \operatorname{Rot} \beta$
[5]	$\operatorname{grad} \mathrm{D}\xi = 0$	[5′]	$\mathrm{D}\xi = \operatorname{Rot} \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{D}\beta$
[6]	$\operatorname{Rot} \xi = 0$	[6′]	$\xi = \mathrm{K} \dfrac{dv}{dP}$
[7]	$\mathrm{V} \operatorname{Rot} \xi = 0$	[7′]	$\left\{\begin{array}{l} \xi = \mathrm{K} \operatorname{Rot} \beta + \operatorname{div} \mathrm{V}\beta \\ \xi = \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{D}\beta + \mathrm{K} \dfrac{dv}{dP} \end{array}\right.$
[8]	$\mathrm{D} \operatorname{Rot} \xi = 0$	[8′]	$\xi = n + \mathrm{K} \dfrac{dv}{dP}$
[9]	$\operatorname{Rot} \mathrm{D}\xi = 0$	[9′]	$\mathrm{D}\xi = \dfrac{d \operatorname{grad} n}{dP}$
[10]	$\mathrm{V} \dfrac{d \operatorname{grad} \xi}{dP} = 0$	[10′]	$\xi = n + \mathrm{K} \operatorname{Rot} \beta.$

Dim. [1′[, [2′]. Dai teoremi del § 2, n. 4.

Dim. [3′]. La equazione $\operatorname{grad} x = 0$ *equivale* a

$$dx = \operatorname{grad} x \times dP = 0,$$

poichè dP è arbitrario, ciò equivale a $dx = 0$, c. d. d.

Dim. [4′]. Se $\boldsymbol{a}$ è vettore costante, le relazioni seguenti

$$\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} \xi = 0, \quad \operatorname{div}(\mathrm{K}\xi\boldsymbol{a}) = 0, \quad \mathrm{K}\xi\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} w$$

equivalgono alla condizione [4] w essendo funzione lineare di a nel campo dei vettori costanti, vale a dire $w = \beta a$, con β omografia funzione di P; allora

$$\mathrm{K}\xi a = \mathrm{rot}(\beta a) = (\mathrm{Rot}\,\beta) a$$

che per l'arbitrarietà di a dà la [4'].

Dim. [5']. Dalle formule [5] e [4'] si ha

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\gamma$$

con γ omografia tale che $\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\gamma = 0$, cioè tale che [cfr. Cap. II, § 2, n. 8]

$$\mathrm{grad}(\mathrm{I}_1\gamma - \gamma) = 0$$

e quindi, per le [4], [4'] tali che

$$\gamma - \mathrm{I}_1\gamma = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\beta.$$

Operando con I_1 nei due membri si ricava $2\mathrm{I}_1\gamma = -\mathrm{I}_1\,\mathrm{Rot}\,\beta$ e quindi si ha [cfr. Cap. II, § 2, n. 8]

$$\gamma = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\beta + \mathrm{div}\,\mathrm{V}\beta.$$

Da questa applicando formule note e che non stiamo a citare si ha:

$$\begin{aligned}\gamma &= \mathrm{K}\,\{\mathrm{Rot}\,\beta + \mathrm{div}\,\mathrm{V}\beta\} = \mathrm{K}\,\{\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\beta + \mathrm{Rot}(\mathrm{V}\beta\wedge) + \mathrm{div}\,\mathrm{V}\beta\} = \\ &= \mathrm{K}\,\{\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\beta + (d\mathrm{V}\beta)/dP - \mathrm{div}\,\mathrm{V}\beta + \mathrm{div}\,\mathrm{V}\beta\} = \\ &= \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\beta + \mathrm{K}\,\{(d\mathrm{V}\beta)/dP\};\end{aligned}$$

indi applicando l'operatore K Rot,

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\gamma = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\beta + 0; \text{ c. d. d.}$$

Dim. [6']. Essendo a vettore costante arbitrario, la [6] equivale a

$$(\mathrm{Rot}\,\xi) a = 0,.\ \ \mathrm{rot}(\xi a) = 0, \quad \xi a = \mathrm{grad}\, n$$

con n funzione lineare di a e quindi $n = v \times a$, cioè

$$\xi a = \mathrm{grad}(v \times a) = \mathrm{K}\frac{dv}{dP} a$$

che per l'arbitrarietà di a dimostra la [6'].

Dim. [7']. Nella Dim. [5'] si è già visto che la [7] equivale a

$$\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\beta + \mathrm{div}\,\mathrm{V}\beta$$

il che dimostra la 1ª forma [7']. Operando in questa prima forma con Rot si ha, dalla Dim. [5'],

$$\mathrm{Rot}\,\xi = \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\beta, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{Rot}\,(\xi - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\beta) = 0$$

che per la [6] dimostra la 2ª forma.

Dim. [8']. La [8] equivale a

$$\mathrm{Rot}\,\xi = w\wedge;$$

ma poichè grad K Rot $\xi = 0$, w deve esser tale che

$$\mathrm{grad}\,(w\wedge) = 0, \quad \text{cioè tale che} \quad \mathrm{rot}\,w = 0$$

e in conseguenza, per la [2], $w = \mathrm{grad}\,n$. La [8] prende dunque la forma

$$\mathrm{Rot}\,\xi = (\mathrm{grad}\,n)\wedge = \mathrm{Rot}\,n, \quad \text{cioè} \quad \mathrm{Rot}\,(\xi - n) = 0$$

che per la [6'] dimostra la [8'].

Dim. [9']. Dalle [6], [6'] si ha:

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{K}\,\frac{dv}{dP}$$

purchè si abbia

$$\mathrm{V}\,\frac{dv}{dP} = 0, \text{ cioè } \mathrm{rot}\,v = 0, \text{ vale a dire } v = \mathrm{grad}\,n; \text{ c. d. d.}$$

Dim. [10']. Per proprietà ormai ben note le relazioni seguenti sono equivalenti alla condizione [10]:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\xi = 0, \quad \mathrm{grad}\,\xi = \mathrm{grad}\,n, \quad \mathrm{grad}\,(\xi - n) = 0,$$
$$\xi - n = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\beta; \text{ c. d. d.}$$

2. Soluzioni particolari delle equazioni $fy = \text{cost.}$

Le equazioni differenziali [1]-[8] *hanno come* **soluzioni particolari,** *le espressioni* [1']-[8'].

[1]	$\mathrm{div}\,x = m_0$	[1']	$x = \frac{1}{3} m_0 (P - O)$
[2]	$\mathrm{rot}\,x = u_0$	[2']	$x = \frac{1}{2} u_0 \wedge (P - O)$
[3]	$\mathrm{grad}\,x = u_0$	[3']	$x = u_0 \times (P - O)$
[4]	$\mathrm{grad}\,\xi = u_0$	[4']	$\xi = u_0 \times (P - O)$
[5]	$\mathrm{grad}\,\mathrm{D}\xi = u_0$	[5']	$\mathrm{D}\xi = u_0 \times (P - O)$

[6] $\operatorname{Rot}\xi = \alpha_0$ [6'] $\xi = -\frac{1}{2}(P-O)\wedge\alpha_0$

[7] $\operatorname{V}\operatorname{Rot}\xi = u_0$ [7'] $\xi = u_0 \times (P-O)$

[8] $\operatorname{D}\operatorname{Rot}\xi = \operatorname{D}\alpha_0$ [8'] $\xi = -\frac{1}{2}(P-O)\wedge\operatorname{D}\alpha_0.$

Dim. Gli operatori div, rot, ... applicati ai secondi membri delle [1']-[8'] dànno, in virtù di proprietà ben note, i secondi membri delle [1]-[8].

Della equazione $\operatorname{Rot}\xi = m_0$ diamo la soluzione generale. L'equazione differenziale

[9] $$\operatorname{Rot}\xi = m_0$$

ha come soluzione generale

[9'] $$\xi = -\frac{1}{2}m_0(P-O)\wedge + \operatorname{K}\frac{dv}{dP}$$

ovvero

[9''] $$\xi = \operatorname{K}\operatorname{Rot}\operatorname{D}\beta + \operatorname{K}\frac{dv}{dP}$$

ove $\operatorname{D}\beta$ deve avere la forma

$$\operatorname{D}\beta = \frac{1}{4}m_0(P-O)^2 + \frac{d\operatorname{grad}n}{dP}.$$

Dim. La [9'] risulta subito dalla [6'] e dalla [6] del n. 1. La [9''] si ha dalla 2^a forma [7'] del n. 1 e la condizione per $\operatorname{D}\beta$ si ha perchè

$$\operatorname{K}\operatorname{Rot}\operatorname{D}\beta = -\frac{m_0}{2}(P-O)\wedge,$$

$$\operatorname{Rot}\operatorname{D}\beta = \frac{m_0}{2}(P-O)\wedge = \frac{1}{4}\{m_0\operatorname{grad}[(P-O)^2]\}\wedge = \frac{1}{4}\operatorname{Rot}\{m_0(P-O)^2\}$$

e in conseguenza

$$\operatorname{D}\beta = \frac{1}{4}m_0(P-O)^2 + \operatorname{K}\frac{dw}{dP};$$

ma deve essere $\operatorname{V}(dw/dP) = 0$, cioè $\operatorname{rot} w = 0$ o ancora $w = \operatorname{grad} n$; c. d. d.

3. Soluzioni particolari delle equazioni $fy =$ funzione di P.

TEOREMA 1.° *Le equazioni differenziali*

[1] $\operatorname{div} x = m$

[4] $\operatorname{grad} \xi = u$

[5] $\operatorname{grad} D\xi = u$

[7] $V \operatorname{Rot} \xi = u$

ammettono delle soluzioni, qualunque siano le funzioni m, u, di P, e delle **soluzioni particolari** *sono date rispettivamente da:*

[1′] $x = \operatorname{grad} n$ *con* $\Delta n = m$

[4′] $\xi = n - v\wedge$ » $u = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot} v$

[5′] $D\xi = n + 2D(\operatorname{div} v - dv/dP)$, » $u = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot}^2 v$

[7′] $\xi = n + 2v\wedge$ » $u = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot} v$.

Dim. [1′]. Poniamo [cfr. § 2, n. 5, Teor. 1°] $x = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot} v$. Si ha $\operatorname{div} x = \operatorname{div} \operatorname{grad} n + 0 = \Delta n$; c. d. d.

Dim. [4′]. Posto, come sopra, $u = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot} v$, si ha:

$$u = \operatorname{grad} n - \operatorname{grad}(v\wedge) = \operatorname{grad}(n - v\wedge);\ \text{c. d. d.}$$

Dim. [5′]. Posto [cfr. § 2, n. 5, Teor. 1°], $u = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot}^2 v$ si ha:

$$u = \operatorname{grad} n + \operatorname{grad}(\operatorname{div} v - dv/dP) + \operatorname{grad}(\operatorname{div} v - K dv/dP) =$$
$$= \operatorname{grad} \{ n + 2D(\operatorname{div} v - dv/dP) \};\ \text{c. d. d.}$$

Dim. [7′]. Posto $u = \operatorname{grad} n + \operatorname{rot} v$ si ha:

$$u = V \operatorname{Rot} n + 2V \frac{dv}{dP} = V \left\{ \operatorname{Rot} n + 2 \frac{dv}{dP} - 2 \operatorname{div} v \right\} =$$
$$= V \{ \operatorname{Rot} n + 2 \operatorname{Rot}(v\wedge) \} = V \operatorname{Rot}(n + 2v\wedge);\ \text{c. d. d.}$$

TEOREMA 2.° *Le equazioni differenziali*

[2] $\operatorname{rot} x = u$

[3] $\operatorname{grad} x = u$

[6] $\operatorname{Rot} \xi = \alpha$

[8] $D \operatorname{Rot} \xi = D\alpha$

ammettono delle soluzioni **solamente quando** *si ha, rispettivamente:*

[2'] $\mathrm{div}\, u = 0$

[3'] $\mathrm{rot}\, u = 0$

[6'] $\mathrm{grad}\, \mathrm{K}\alpha = 0$

[8'] $\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \alpha = 0.$

Se la condizione [3'] *è sodisfatta, allora un* **integrale particolare** *della* [3] *è dato da*

$$x = \int u \times dP, \tag{a}$$

(*non avendosi negli altri casi delle espressioni semplici*).

Dim. [2]. Dalla [2] si ha subito $\mathrm{div}\, u = \mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, x = 0$ e quindi la condizione [2'] è *necessaria*. Essa è pure *sufficiente*, poichè esprime [cfr. n. 1, [1]] che u è la rotazionale di un vettore.

Dim. [3]. La relazione [3] *equivale* a

$$dx = u \times dP$$

e in conseguenza $u \times dP$ *deve* essere un differenziale esatto, il che [cfr. § 2, n. 1, [5]] si verifica solamente quando è sodisfatta la [3']. Da ciò risulta anche la (*a*).

Dim. [6]. Essendo a vettore costante arbitrario, la condizione [6'] *equivale* alle condizioni

$$a \times \mathrm{grad}\, \mathrm{K}\alpha = 0, \quad \mathrm{div}\,(\alpha a) = 0, \quad \alpha a = \mathrm{rot}\, v,$$

con v funzione lineare di a nel campo dei vettori costanti, e quindi equivale anche ad

$$\alpha a = \mathrm{rot}\,(\beta a) = (\mathrm{Rot}\, \beta) a;$$

il che prova che la condizione [6'] è *sufficiente*. Essa è anche *necessaria* poichè [cfr. Cap. II, § 4, n. 1, [25]] $\mathrm{grad}\, \mathrm{K}\, \mathrm{Rot}\, \xi = 0$.

Dim. [8]. Osserviamo che la condizione [8'] equivale ad una qualunque delle condizioni

$$\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \mathrm{D}\alpha = 0, \quad \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \mathrm{K}\alpha = 0$$

poichè, come è noto,

$$\mathrm{D}\alpha = \alpha - \mathbf{V}\alpha \wedge, \qquad \mathrm{K}\alpha = \alpha - 2\mathbf{V}\alpha \wedge$$

ed inoltre

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (\mathbf{V}\alpha \wedge) = - \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V}\alpha = 0.$$

Alla [8] si può dare la forma

$$\mathrm{D}(\mathrm{Rot}\, \xi - \alpha) = 0, \quad \text{da cui} \quad \mathrm{Rot}\, \xi - \alpha = v \wedge;$$

operando nei due membri di quest' ultima con K, grad, div, si ha:

$$\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\, \xi - \mathrm{K}\alpha = - v \wedge, \quad \operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha = - \operatorname{rot} v, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha = 0$$

e quindi la condizione [8'] è *necessaria.* Se la condizione [8'] è vera da essa risulta [cfr. n. 1, [1]] che esiste un vettore v tale che

$$\operatorname{rot} v = - \operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha.$$

e quindi la condizione è anche *sufficiente.*

INDICE

Capitolo I. - OMOGRAFIE VETTORIALI

§ 1. *Operatori fondamentali* I, K, D, V *per le omografie.*

§ 2. *Omografie particolari (o semplici).*

§ 3. *Operatore* R.

§ 4. *Prodotti e potenze di omografie.*

§ 5. *Isomerie e similitudini vettoriali.*

§ 6. *Iperomografie.*

Capitolo II. - Funzioni di punti. Operatori differenziali

§ 1. *Derivate rispetto ad un punto.*

§ 2. *Operatori differenziali* div, rot, grad, Rot.

§ 3. *Operatori differenziali del 2° ordine* Δ, Δ'.

§ 4. *Prodotti funzionali degli operatori differenziali del 1° e 2° ordine.*

§ 5. *Funzioni di funzioni.*

Capitolo III. - Integrali ed equazioni differenziali

§ 1. *Integrali.*

§ 2. *Alcuni teoremi fondamentali.*

§ 3. *Equazioni differenziali.*